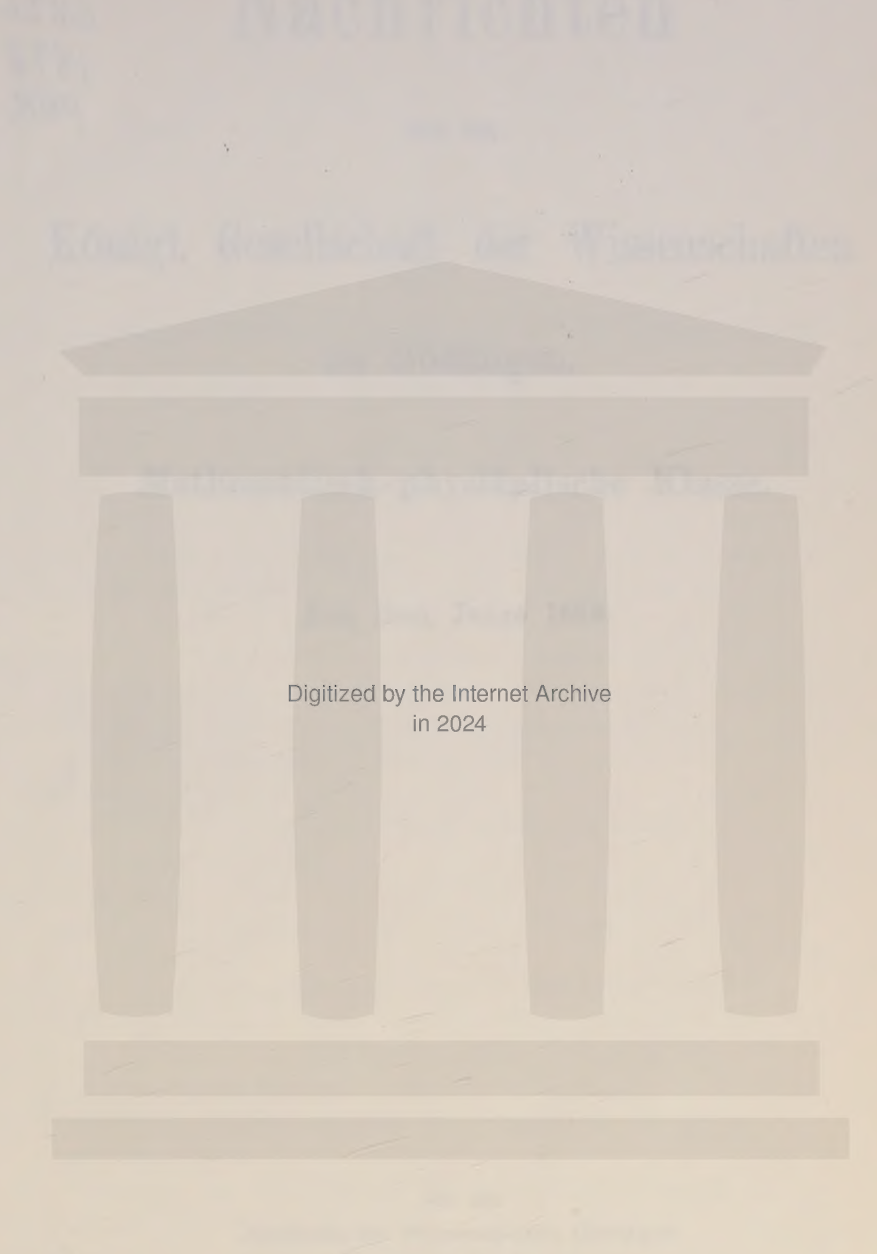


Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Aus dem Jahre 1898.

Von der
Akademie der Wissenschaften, Göttingen
genehmigter Nachdruck
KRAUS REPRINT LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1967

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1898.

Beweis eines von Herrn Dedekind angegebenen Satzes.

Von

E. Study in Greifswald.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Januar 1898 von D. Hilbert.

Weierstraß ist in seiner bekannten Untersuchung über die „in der allgemeinen Arithmetik zulässigen" sogenannten complexen Größen von der Bemerkung ausgegangen, daß in einem System complexer Größen (mit commutativer Multiplication) eine algebraische Gleichung $c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu = 0$ dann unendlich viele Wurzeln haben kann, wenn die Coefficienten c_i aus einem und demselben „Theiler der Null" durch Multiplication mit anderen Größen des Systems hervorgehen. (Ist nämlich die Größe y Wurzel einer solchen Gleichung, deren Coefficienten den Factor k haben, und ist $k \cdot l = 0$, aber $l \neq 0$, so ist stets auch $x = y + lz$ eine Wurzel derselben Gleichung, wie immer auch z gewählt sein möge.) Weierstraß erblickt nun in dem Verhalten dieser Gleichungen eine „naturgemäß begründete Analogie" zu dem Verhalten solcher Gleichungen der elementaren Algebra, deren Coefficienten sämmtlich den Werth Null haben. Er hat daher die Frage nach allen den Systemen complexer Größen mit commutativer Multiplication gestellt, bei denen nur solche algebraische Gleichungen unendlich viele Wurzeln zulassen können, deren Coefficienten alle einen und denselben Theiler der Null als Factor enthalten. Diese Frage ist von Weierstraß selbst unter gewissen Einschränkungen, von Dedekind allgemein beantwortet worden: Nur die ganz speciellen (wiewohl von Einigen so genannten „allgemeinen") Systeme, deren Multiplicationsregeln sich durch Einführung geeig-

neter Einheiten auf die besondere Form

(1) $$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \qquad (i \neq k,\ i, k = 1 \ldots n)$$

bringen lassen, genügen der gestellten Forderung. Da ein einigermaaßen elementarer Beweis dieses Satzes bis jetzt nicht bekannt zu sein scheint, so veröffentliche ich, einer Aufforderung des Herrn Hilbert folgend, zwei von einander verschiedene ganz einfache Beweise. Bei dem ersten Beweis werden keine von den Thatsachen benutzt, die erst bei einer genaueren Untersuchung allgemeinerer Systeme complexer Größen neuerdings hervorgetreten sind, sondern nur solche, die schon mit dem Begriff eines solchen Systems unmittelbar gegeben sind; dieser Beweis wird auch von einem mit der Litteratur des besonderen Gegenstandes gar nicht bekannten Leser ohne jede Vorbereitung verstanden werden können. Vorausgesetzt wird nur der Begriff eines Systems complexer Größen mit n Einheiten und mit associativem und commutativem Gesetz der Multiplication. Die Annahme, daß das betrachtete System eine Haupteinheit enthalte, deren Product mit irgend einer anderen Größe des Systems dieser selbst gleich ist, ist für die Geltung des zu beweisenden Satzes nicht nöthig, und wird daher auch von uns nicht gemacht. —

Unter den Potenzen $a, a^2, \ldots a^n$ irgend einer Größe a des angenommenen Systems sind nicht mehr als n linear-unabhängige, d. h. solche, zwischen denen keine lineare Relation mit reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten stattfindet. Wird die Zahl dieser Größen mit p bezeichnet, so ergiebt sich also eine einzige, völlig bestimmte Gleichung der Form

$$a^{p+1} + \alpha_1 a^p + \cdots + \alpha_p a = 0;$$

und diese Gleichung kann nach Zerlegung der ganzen Function $r^p + \alpha_1 r^{p-1} + \cdots + \alpha_p$ in ihre linearen Factoren $(r - r_1) \ldots (r - r_p)$ so geschrieben werden:

(2) $$a(a-r_1)(a-r_2)\ldots(a-r_p) = 0 \qquad (p \leqq n).$$

Die reellen oder gewöhnlichen complexen Größen $r_1 \ldots r_p$ müssen nun alle von einander und von Null verschieden sein, wie immer auch a gewählt sein möge. Wäre nämlich z. B. $r_1 = r_2$, so würde das Quadrat des von Null verschiedenen Ausdrucks $a(a-r_2)\ldots(a-r_p)$ die linke Seite von (2) als Factor enthalten, und daher verschwinden. Das aber wäre ein Widerspruch mit der gestellten Forderung, der zufolge insbesondere auch die Gleichung $x^2 = 0$ nicht unendlich viele Wurzeln und also auch keine von Null verschiedene Wurzel haben darf. Dasselbe würde folgen, wenn man etwa $r = 0$ annehmen wollte. Man kann daher die

p linearen Gleichungen

(3) $$a^m = r_1^m \eta_1 + r_2^m \eta_2 + \cdots + r_p^m \eta_p \qquad (m = 1, 2, \ldots p)$$

nach den Größen $\eta_1 \ldots \eta_p$ auflösen, wodurch sich ergiebt:

(4) $$\eta_i = \frac{a(a-r_1)\ldots(a-r_{i-1})}{r_i(r_i-r_1)\ldots(r_i-r_{i-1})} \frac{(a-r_{i+1})\ldots(a-r_p)}{(r_i-r_{i+1})\ldots(r_i-r_p)}.$$

Setzen wir nun

(5) $$\eta_0 = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_p,$$

so erhalten wir der Reihe nach die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\eta_i &= r_i\eta_i, & a\eta_0 &= \Sigma r_i\eta_i = a, \\ a^2\eta_i &= r_i^2\eta_i, & a^2\eta_0 &= \Sigma r_i^2\eta_i = a^2, \\ &\cdots & &\cdots \\ a^p\eta_i &= r_i^p\eta_i, & a^p\eta_0 &= \Sigma r_i^p\eta_i = a^p, \end{aligned}$$

und aus diesen und der Gleichung (4) folgt weiter, daß auch $\eta_i\eta_0 = \eta_i$ sein muß. Da aber zufolge (2) $\eta_i\eta_k = 0$ ist, wenn $i \neq k$, so ergiebt sich, daß zwischen den Größen η_i die Beziehungen

(6) $$\eta_i^2 = \eta_i, \quad \eta_i\eta_k = 0 \qquad (i \neq k;\ i, k = 1 \ldots p)$$

bestehen.

Hiermit wären wir schon am Ziele, wenn von vornherein feststände, daß die mit p bezeichnete Zahl bei passender Wahl von a den Werth n erreichen kann. Die vorläufig mangelnde Kenntniß dieser Thatsache kann nun durch folgende Schlußreihe ersetzt werden: Wie soeben gezeigt worden ist, kann jede beliebige Größe des betrachteten Systems als Aggregat von solchen Größen dargestellt werden, deren Quadrate ihnen selbst gleich sind. Ist also $p < n$, so giebt es mindestens eine von $\eta_1 \ldots \eta_p$ linear-unabhängige Größe ϑ, die der Gleichung $\vartheta^2 = \vartheta$ genügt. Ist nun das Product $\eta_0\vartheta$ von $\eta_1 \ldots \eta_p$ linear-abhängig, so ist $\zeta = \vartheta - \eta_0\vartheta$ von $\eta_1 \ldots \eta_p$ linear-unabhängig, und es bestehen die Gleichungen $\zeta^2 = \zeta$, $\zeta\eta_i = 0$. Ist aber das Product $\eta_0\vartheta$ linear-unabhängig von $\eta_1 \ldots \eta_p$, so müssen sich unter den $2p$ Größen

$$\eta_1\vartheta \ldots \eta_p\vartheta, \quad \eta_1 - \eta_1\vartheta \ldots \eta_p - \eta_p\vartheta$$

mindestens $p+1$ linear-unabhängige finden, da ja $\eta_1 \ldots \eta_p$ und $\eta_0\vartheta = \eta_1\vartheta + \cdots + \eta_p\vartheta$ durch sie ausgedrückt werden können. Die Quadrate dieser Größen aber sind ihnen selbst gleich, und ihre Producte zu zweien sind gleich Null. In beiden Fällen läßt sich also ein System von wenigstens $p+1$ Größen nachweisen, deren

gegenseitige Beziehung durch Gleichungen der Form (6) ausgedrückt wird. Durch Wiederholung dieser Schlußweise folgt nunmehr unmittelbar das Vorhandensein von n linear-unabhängigen Größen („Einheiten") $e_1 \dots e_n$, die den Gleichungen (1) genügen, und damit auch das Vorhandensein einer Haupteinheit

$$(7) \qquad e^0 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n,$$

die der Gleichung $e^0 x = x$ identisch genügt, und als „nullte Potenz" irgend einer Größe a auch mit a^0 berechnet werden kann.

Nachdem so das Vorhandensein der Einheiten e_i nachgewiesen ist, ergiebt sich auch, wie man die Größe a hatte wählen müssen, um statt der Größen η_i unmittelbar die Einheiten e_i zu erhalten. Aber man kann jetzt, nachdem das Vorhandensein einer Haupteinheit feststeht, noch etwas einfacher verfahren. Sind die Coordinaten a_i der Größe $a = \Sigma a_i e_i$ alle von einander verschieden, so sind die Potenzen $a^0 \dots a^{n-1}$ von einander linear-unabhängig, und umgekehrt. Ist also a so gewählt, daß $a^0 \dots a^{n-1}$ linear-unabhängig sind, so besteht eine einzige Gleichung der Form

$$(8) \qquad (a - a_1 e^0)(a - a_2 e^0) \dots (a - a_n e^0) = 0. \qquad (a_i \neq a_k)$$

Die Größen e_i ergeben sich dann durch Auflösung der linearen Gleichungen

$$(9) \qquad a^m = a_1^m e_1 + a_2^m e_2 + \cdots + a_n^m e_n \qquad (m = 0 \dots n-1)$$

in der Gestalt

$$(10) \qquad e_i = \frac{(a - a_1 e^0) \dots (a - a_{i-1} e^0)(a - a_{i+1} e^0) \dots (a - a_n e^0)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1}) \quad (a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}.$$

Damit ist zugleich der Nachweis erbracht, daß die Einheiten $e_1 \dots e_n$, abgesehen vor ihrer Anordnung, vollkommen bestimmt sind.

Daß die gefundenen, durch die Gleichung (1) definirten Systeme complexer Größen wirklich der gestellten Forderung genügen, folgt daraus, daß eine jede algebraische Gleichung $\Sigma c_k x^k = 0$ für eine Größe $x = \Sigma x_i e_i$ eines solchen Systems in n Gleichungen für je eine der Coordinaten x_i zerfällt. Unendlich viele Wurzeln werden also nur dann auftreten können, wenn alle Coefficienten von mindestens einer der letzten Gleichungen verschwinden. Es muß dann in allen Coefficienten c_k wenigstens eine der Einheiten e_i fehlen, anders ausgedrückt, es müssen diese Coefficienten die Summe der übrigen Einheiten — also einen Theiler der Null — als Factor haben. —

Den zweiten Beweis des besprochenen Satzes wollen wir nur skizziren. Er beruht auf dem Begriffe der Reducibilität eines Systems complexer Größen mit Haupteinheit, und auf dem

von G. Scheffers angegebenen, übrigens ganz elementaren Kriterium für diese Reducibilität[1]). Offenbar genügt es, wenn man zunächst das Vorhandensein einer Haupteinheit e^0 annimmt, nach irreducibelen Systemen der gesuchten Eigenschaft zu fragen. Ein irreducibeles System mit commutativer Multiplication kann aber außer seiner Haupteinheit keine Größe enthalten, deren Quadrat ihr selbst gleich wäre. Die Gleichung niedrigsten Grades, der irgend eine Größe a eines solchen Systems genügt, hat daher die ganz specielle Form $(a-\lambda e^0)^p = 0$. Der Exponent p aber muß hier gleich Eins sein, da andernfalls $(a-\lambda e^0)^{p-1}$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 = 0$ wäre. Das System mit einer Einheit $e = e^2$ ist also das einzige irreducibele der gesuchten Eigenschaft. Aus ihm entstehen durch einfache Wiederholung die reducibelen Systeme des Typus (1). Nun ist noch zu zeigen, daß es keine Systeme ohne Haupteinheit geben kann, die der gestellten Forderung Genüge leisteten. Wir bemerken zu diesem Zweck, daß aus jedem System (mit oder) ohne Haupteinheit ein anderes System mit Haupteinheit entsteht, wenn man zu den Einheiten $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}$ des angenommenen Systems eine neue Einheit ε_0 fügt, die den Gleichungen $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_0 = \varepsilon_i$ genügt. Dieses neue von n Einheiten gebildete System müßte ebenfalls zu den gesuchten gehören. Bei diesem System würden sich also n Einheiten $e_1 \dots e_n$ einführen lassen, die den Gleichungen (1) genügten. Nun lassen sich alle in dem System (1) enthaltenen Systeme von $n-1$ Einheiten sofort angeben: Sie entstehen entweder einfach dadurch, daß man eine Einheit e_i wegläßt, oder dadurch, daß man zwei Einheiten e_i und e_k durch deren Summe $e_i + e_k$ ersetzt. Unter allen diesen Systemen befindet sich aber kein System ohne Haupteinheit.

Der zuletzt ausgeführten Einbeziehung der Systeme ohne Haupteinheit möchten wir nur geringes Gewicht zuschreiben. Es ist ja das Auftreten einer Haupteinheit gleichbedeutend mit der Ausführbarkeit der Division „im Allgemeinen"; die Beschränkung auf Systeme mit Haupteinheit erscheint daher durchaus sachgemäß. Ebenso können wir keinen besonderen Werth darauf legen, daß die Eingangs gestellte Forderung bei der Beweisführung nicht in ihrem ganzen Umfange benutzt worden ist. Allerdings würde es genügt haben, nur zu verlangen, daß die Gleichung $x^2 = 0$ nicht unendlich viele Wurzeln haben soll. Aber solche Fassung des Problems trägt den Stempel der Willkür. Niemand vermöchte von vornherein zu sehen, warum nicht z. B. die der Form nach ebenso

---

1) Math. Ann. Bd. 39, 1891, S. 319.

specielle Gleichung $x^2 - x = 0$ in derselben Weise untersucht wird; wollte man das aber thun, so würde man zu einem ganz anderen Ergebniß kommen.

Auch der ganzen hier behandelten Problemstellung selbst können wir nicht die hohe principielle Bedeutung einräumen, die ihr, wie es scheint, ziemlich allgemein zugestanden wird. Wir können nicht zugeben, daß es sich um eine naturgemäß begründete Analogie handelt, wenn Gleichungen mit unendlich vielen Wurzeln, deren Coefficienten einen Theiler der Null als Factor enthalten, in Parallele gesetzt werden mit Gleichungen, deren sämmtliche Coefficienten den Werth Null haben. Denn diese letzten sind gar keine wirklichen Gleichungen; sie haben nur eine formale Existenz und sagen in Wahrheit absolut gar Nichts aus. Nur um schleppende Redewendungen zu vermeiden, begreift man sie zuweilen ein, da wo man von Gleichungen spricht. Die Gleichungen der ersten Art aber sind wirkliche Gleichungen oder vielmehr Systeme von solchen; sie enthalten immer eine Beschränkung des Werthgebietes der in sie eintretenden Unbekannten.

Zudem verfährt Weierstraß, wie uns scheint, nicht consequent. Faßt man einmal die von Null verschiedenen Theiler der Null mit der Null selbst in einen Begriff zusammen, so wird man (wenn man hier überhaupt von Analogieen reden will) wohl nicht umhin können, alle Gleichungen, deren Coefficienten einen Theiler der Null als Factor haben, als „Analoga“ zu den in der elementaren Algebra auftretenden sogenannten Gleichungen mit verschwindenden Coefficienten hinzustellen. Das aber würde zu der paradoxen Folgerung führen, daß Gleichungen ohne Wurzeln, wie sie bei den Systemen des Typus (1) im Falle $n = 3$ schon vorkommen — z. B. die Gleichung $(e_1 + e_2)(e_1 x + e_2) = 0$ — als Analoga aufgefaßt würden von Gleichungen mit unendlich vielen und sogar völlig unbestimmten Wurzeln.

Es ist, wie uns scheint, überhaupt nicht zweckmäßig, die von Null verschiedenen Theiler der Null mit der Null selbst in einen Begriff zu verschmelzen und beide zusammen den anderen Größen gegenüberzustellen. Denn die Kluft zwischen der Null und allen anderen Größen ist unendlich viel tiefer, als die Kluft zwischen den Theilern der Null und den Größen, die nicht Theiler der Null sind. Die Theiler der Null sind doch immer noch Größen oder vielmehr Systeme von solchen, die Null aber ist gar keine Größe, im strengen Sinne des Wortes; sie ist vielmehr gerade die Negation des Begriffes Größe, in der Rechnung ein Symbol für das Nichtvorhandensein einer solchen. Daß aber Weierstraß diesen

tiefgehenden, ihm natürlich wohlbekannten Unterschied bei vorliegender Gelegenheit nicht hinreichend gewürdigt hat (wie es uns der Fall zu sein scheint) glauben wir uns aus dem Umstande erklären zu können, daß in der That die Null in der Regel ohne Schaden wie eine Grösse behandelt werden kann und daher als „uneigentliche Größe" den wirklichen Größen zugesellt werden darf.

Die von Gauss gestellte Frage, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können" scheint uns in ungezwungener Weise schon beantwortet zu sein durch den von H. Hankel und den von Frobenius und C. S. Peirce aufgestellten Satz[1]). Danach müssen in der Theorie aller Arten complexer Größen mit commutativer Multiplication mit alleiniger Ausnahme der ein reelles System mit zwei Einheiten bildenden gemeinen complexen Größen immer Theiler der Null und daher sowohl (algebraische) Gleichungen ohne Wurzeln als auch Gleichungen mit unendlich vielen Wurzeln auftreten. Die gemeinen complexen Größen sind nun zunächst ausschließlich deshalb eingeführt worden, weil man mit ihrer Hülfe die Schwierigkeiten bewältigen konnte, die das Auftreten von Gleichungen ohne Wurzeln in der elementaren Algebra hervorruft. Diese Schwierigkeiten, deren Beseitigung Gauss' unsterbliches Verdienst ist, würden aber nach jenen beiden Sätzen nicht gehoben, sondern durch Einführung neuer Verwickelungen noch bedeutend vermehrt werden, wenn man andere als die gemeinen complexen Größen in allgemeinen Gebrauch nehmen wollte.

Jedenfalls darf nicht angenommen werden, daß Gauss etwa nur habe sagen wollen, daß die Algebra der gewöhnlichen complexen Größen schon alle erdenklichen Arten complexer Größen enthält. Denn dasselbe gilt von der „Algebra" irgend eines Systems complexer Größen, und auch schon von der Algebra der reellen Größen. Die besondere Stellung der gemeinen complexen Größen würde damit nicht erklärt werden.

Daß es sich bei allen solchen Erörterungen streng genommen nicht um eine Zulässigkeit irgend welcher Arten complexer Größen, sondern nur um deren Nützlichkeit, und zwar auch nur um eine Nützlichkeit „im Allgemeinen" handelt, darf und muß

---

1) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 70 und S. 106—108. Frobenius, Crelle's Journal Bd. 84, 1879, S. 59. C. S. Peirce, Am. Journal, v. 4. 1881, S. 226.

wohl einmal gesagt werden. Alle „complexen Größen" einschließlich der gemeinen sind ja niemals etwas Anderes als Systeme reeller Größen, im letzten Grunde also positiver ganzer Zahlen. Ihre auf Grund besonderer Definitionen conventionell als „Addition", „Multiplication" und „Division" bezeichneten Verknüpfungen sind ganz reeller Natur, und könnten ebensogut oder vielleicht besser anders benannt werden. Von einer Unzulässigkeit im strengen Sinne, wie bei den von Gauss im dritten Artikel seiner Dissertation besprochenen unmöglichen Größen, kann daher hier keinenfalls die Rede sein. Sicherlich hat Gauss, der die Hamilton'schen Quaternionen gekannt und in der heute üblichen Weise verwendet hat, etwas Derartiges gar nicht sagen wollen[1]). Wenn man freilich, wie selbst ganz moderne Lehrbücher noch thun, gleich mit dem Symbol $\sqrt{-1}$ zu rechnen anfängt, oder wenn man „Einheiten" $e_1 \dots e_n$ an die Spitze stellt, deren Sinn ebenfalls nicht definirt ist, so können leicht unklare Vorstellungen entstehen. Man muß mit der Betrachtung von Systemen reeller Größen beginnen, wie Hamilton schon im Jahre 1835 gezeigt hat[2]) und wie auch Weierstraß (in Vorlesungen) und neuerdings H. Weber (in seinem Lehrbuche der Algebra) gethan haben. Dann erst können die Einheiten als specielle Systeme reeller Größen erklärt werden.

Wer von einer Unzulässigkeit oder auch nur von einer Ueberflüssigkeit höherer complexer Größen reden will, wird sich nicht leicht mit den Thatsachen abfinden können, z. B. mit dem von Dedekind nachgewiesenen Umstand, daß die Systeme des Typus (1) in Gestalt mehrwerthiger Größen allenthalben in der Algebra auftreten. Denn der Nutzen der verschiedenen Gattungen algebraischer Größen kann nicht irgendwie fraglich erscheinen, wiewohl jede einzelne nur ein ganz beschränktes Anwendungsgebiet besitzt.

Greifswald, 3. Januar 1898.

---

1) Herr P. Stäckel hat die Freundlichkeit gehabt, Abschriften einiger Aufzeichnungen von Gauss, die sich in dessen Nachlaß gefunden haben, dem Verfasser zur Verfügung zu stellen. Bereits in der ältesten dieser Aufzeichnungen, die nach der Angabe Stäckels aus dem Jahre 1819 oder 1820 stammt, werden die Formeln für die Zusammensetzung der Euler'schen Parameter einer Drehung aufgestellt und in eine einzige Formel — das heute so genannte Multiplicationstheorem der Quaternionen — zusammengefaßt.

2) Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples. Trans. of the R. Irish Academy, v. 17 part 2.

Der anatomische Bau des Stengels in der Gattung Scorzonera.

Von

A. Peter.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Februar 1898.

Durch ältere Untersuchungen von Hanstein, Trécul, de Bary u. A. ist für eine Anzahl Gattungen der *Compositae Cichoriaceae* ein vom gewöhnlichen anatomischen Bau des Dikotylenstengels abweichendes Verhalten constatirt worden. Dieses zeigt sich darin, daß bei einigen Gattungen bicollaterale Gefäßbündel vorkommen, bei anderen markständige Stränge, die entweder nur aus Weichbast bestehen, oder aus solchem mit Bastfasergruppen oder auch mit etwas Holzgewebe sich zusammensetzen. Insbesondere werden für *Tragopogon*, *Scorzonera*, *Hieracium*, *Sonchus*, *Lactuca* und mehrere verwandte Gattungen bicollaterale Gefäßbündel angegeben. Da indessen manchen dieser Angaben von anderer Seite widersprochen worden ist, auch Petersen 1882 bei *Andryala*, *Hieracium*, *Picridium*, *Crepis*, *Barkhausia*, *Zacyntha* und zahlreichen anderen Genera die Bicollateralität der Gefäßbündel vermißte, und da es ferner mir selbst bei einer schon früher vorgenommenen Orientirung über den anatomischen Bau der *Hieracien* nicht gelang, dergleichen Vorkommnisse aufzufinden, so veranlaßte ich neuerdings Herrn Fritz Krüger, unter meiner Leitung das hier zugängliche einschlägige Material an wildwachsenden sowie cultivirten Pflanzen und an Herbariumexemplaren darauf durchzugehen und die Untersuchung, soweit thunlich, auf alle erreichbaren Gattungen europäischer *Cichoriaceen* auszudehnen. Ueber die Ergebnisse dieser etwas weitschichtigen Bemühungen wird Herr F. Krüger anderwärts berichten.

Hier seien nur die bei der Gattung *Scorzonera* beobachteten anatomischen Verhältnisse hervorgehoben. Letztere erweisen sich deswegen als besonders beachtenswerth, weil innerhalb der genannten Gattung die Arten sich bezüglich des anatomischen Baues ungleich verhalten und z. Th. recht auffällige Abweichungen von der normalen Structur zeigen, weil ferner bezüglich der Anordnung der Gewebe des Stengels nahezu alle bei den übrigen bisher untersuchten Gattungen vorkommende Eigenthümlichkeiten ebenfalls auftreten, und somit innerhalb einer einzigen Gattung diejenigen Typen, welche sonst über die ganze Unterfamilie der *Cichoriaceen* vertheilt sind, gewissermaßen wiederholt und zusammengefaßt erscheinen.

Diesem Befunde nach könnte man sich vorstellen, daß diejenigen gestaltenden und gruppirenden Vorgänge, welche im Laufe der Zeiten bei den Sippen der Unterfamilie wirksam gewesen und neben mancherlei Anpassungen an einigen derselben zum sichtbaren Ausdruck gelangt sind, so daß nicht bloß die Species und Varietäten zahlreicher und differenter geworden sind, sondern auch weitere Genera sich herausgebildet haben, insbesondere auch bei den Arten der *Scorzonera*-Gruppe sich geltend gemacht haben, hier aber vorzugsweise im anatomischen Bau sich ausprägten, ohne daß zugleich auch die systematischen Gattungsmerkmale sich erheblich geändert hätten. Bei den *Scorzoneren* wäre demgemäß noch keine so große morphologische Differenzirung eingetreten, daß sie zur Trennung derselben in mehrere Gattungen geführt hätte, während eine solche Differenzirung bei anderen Sippen bereits erfolgt ist, und deswegen innerhalb der Unterfamilie einige Gruppen sehr nahe verwandter Gattungen angetroffen werden. Dort aber in der kleineren, wie hier in der ungleich größeren Sippenschaar wäre die anatomische Differenzirung in paralleler Weise erfolgt, unabhängig von der morphologischen. Es läge also bei *Scorzonera* eine Discordanz im Gange und im Resultat der morphologischen und anatomischen Ausbildung vor, wie sie auch bei manchen anderen Pflanzengruppen sich beobachten läßt.

Man gelangt um so eher zu dieser Ansicht, als die gegenwärtig vorliegenden systematischen Gruppirungen der Arten von *Scorzonera*, wie sie etwa von Boissier oder Nyman gegeben wurden, durchaus nicht mit dem anatomischen Befunde übereinstimmen. Freilich können erstere auch wohl kaum als endgiltige angesehen werden, wenn man berücksichtigt, daß z. B. die Eintheilung von Boissier in erster Linie die Wuchsverhältnisse

und das Indument berücksichtigt, also ersichtlich Anpassungsmerkmale voranstellt. Die Differenzen der genannten Gruppirungen mit der unten gegebenen ausschließlich die Anatomie des Stengels benutzenden Zusammenstellung, sind aus folgender Uebersicht zu ersehen, welche nur die im hiesigen Institute untersuchten Arten enthält.

I. *Scorzonera,* Eintheilung nach Boissier.

1) *Scaposae*: Sc. mollis, inaequiscapa, limnophila.
2) *Foliosae* 1: Sc. hispanica.
2: Sc. purpurea, elata, austriaca, humilis, parviflora.
3) *Tomentosae* 1: Sc. cinerea, cilicica.
2: Sc. tomentosa.
4) *Pulvinares*: Sc. pygmaea, rigida, sericea.
5) *Lasiospora* 1: Sc. lanata, tuberosa.
2: Sc. eriophora, nervosa, cretica, ensifolia, eriosperma, sabaphylla, ramosissima.

II. *Scorzonera,* Eintheilnng nach Nyman.

Scorzonera 1: Sc. elata, stricta, crocifolia.
2: Sc. macrocephala, hispanica, austriaca, humilis, parviflora.
3: Sc. aristata.
4: Sc. purpurea.
Lasiospora: Sc. ensifolia, cretica, hirsuta, lanata, tuberosa.
Gelasia: Sc. villosa.

III. Eintheilung nach anatomischen Merkmalen.

1) Gefäßbündel auf dem Stengelquerschnitt undeutlich in mehrere unregelmäßige Kreisreihen geordnet, sämmtlich collateral und normal orientirt („*Polycyclicae*"): Sc. eriosperma, hirsuta, ensifolia, nervosa, cretica, tomentosa.
2) Gefäßbündel ziemlich deutlich in 2 Kreisen, aber unter einander verschieden groß, außerdem noch einzelne außerhalb oder innerhalb gelegene kleinere Bündel, alle collateral und normal orientirt („*Dicyclicae*"): Sc. rigida, pygmaea, subaphylla, ramosissima, cinerea.
3) Einfacher Kreis von normal orientirten Gefäßbündeln, innerhalb desselben im Mark zerstreute

Weichbaststränge ohne oder mit rudimentärem Holzkörper, dann umgekehrt orientirt („*Monocyclicae endodesmoticae*“).

A. Gefäßbündel bicollateral: Sc. latifolia, mollis, elata, hispanica, papposa, incisa, limnophila.

B. Gefäßbündel collateral: Sc. aristata.

4) **Nur 1 einfacher Kreis von normal gestellten Gefäßbündeln, keine inneren Stränge** („*Monocyclicae adesmoticae*“).

A. Gefäßbündel bicollateral: Sc. stricta, inaequiscapa, crocifolia, macrocephala.

B. Gefäßbündel collateral: Sc. lanata, tuberosa, humilis, parviflora, sericea, villosa, austriaca, purpurea, cilicica, eriophora.

Wie aus diesen Uebersichten hervorgeht, könnten der anatomischen Einrichtung nach nicht einmal mehr die zur Cassini'schen Gattung *Lasiospora* gerechneten Arten nahe beisammen stehen bleiben, weil *Sc. lanata*, *tuberosa* und *eriophora* nur einen einfachen Kreis von Gefäßbündeln besitzen, während die übrigen 6 untersuchten hiehergehörigen Arten unregelmäßig-mehrreihig gestellte Gefäßbündel haben. Man kommt demnach auch unter Berücksichtigung anatomischer Charaktere zunächst noch zu keiner befriedigenden systematischen Eintheilung der Gattung *Scorzonera*. Eine Neubearbeitung derselben unter Herbeiziehung noch weiterer Gesichtspunkte erweist sich daher als um so mehr erforderlich.

Versucht man nun den anatomischen Bau unter Zugrundelegung der Standortsverhältnisse oder der klimatischen Bedingungen des Verbreitungsgebietes der einzelnen Arten und Artengruppen zu verstehen, so gelangt man weder zu diesem Verständniß noch zu der vorstehenden Anordnung. Denn ähnliche Vegetationsbedingungen und ähnlicher Bau stehen oft nicht in Coincidenz mit einander. So stimmen beispielsweise die auf Wiesen Mitteleuropas wachsende *Sc. hispanica*, die auf Bergweiden Rumeliens auftretende *Sc. incisa* und die in Sümpfen vorkommende *Sc. limnophila* bezüglich der Stengel-Anatomie sehr nahe überein, trotz recht ungleicher Vorkommensverhältnisse. Anderseits stehen die zahlreichen, auf steinigem Boden und in continentalem Klima Osteuropas und des Orientes wachsenden Arten einander anatomisch öfters sehr fern. Man wird hier also weniger an die gegenwärtig die Pflanzengestalt und das Pflanzenleben beeinflussenden Agentien denken dürfen, als vielmehr an solche längst verflossener Zeiten, vielleicht früherer Erdperioden, und an damals schon erfolgte

Veränderungen und Anpassungen, die seither sich durch Vererbung erhalten haben, aber auch ganz besonders an die der Pflanzenwelt innewohnende allgemeine Variationsbewegung, deren Thätigkeit und Wirkungen Naegeli so anschaulich dargelegt hat.

Morphologisch stellt sich die Gattung *Scorzonera* als eine ziemlich einförmige dar. Ueber meist fleischiger oder knolliger Wurzel breitet sich eine grundständige Rosette von mehr oder minder lanzettlichen bis linealen Blättern aus, während der Stengel oft nur geringe Beblätterung zeigt. Gewöhnlich ist der Stengel schaftartig ausgebildet und im oberen Theil spärlich in lange köpfchentragende Aeste verzweigt. — Um eine zuverlässige Vergleichung anstellen zu können, wurden für die hier verfolgten Zwecke zur anatomischen Untersuchung stets die mittleren Internodien gewählt. Die unteren und die oberen Stengeltheile zeigen entsprechend den gesteigerten oder verminderten mechanischen Anforderungen an dieselben als Träger der Blätter und des Kopfstandes wie als Stütze gegen Windwirkungen eine damit übereinstimmende kräftigere oder schwächere Ausbildung der Festigungsgewebe.

Der gleichartigen Gestaltung gegenüber fällt um so mehr die Mannigfaltigkeit der anatomischen Einrichtung ins Auge. Letztere wurde schon oben in der allgemeinen Uebersicht durch einige Worte gekennzeichnet. Weiteres mag hier folgen, jedoch wird eine durch Abbildungen belegte ausführliche Darstellung erst später von Herrn F. Krüger gegeben werden.

Die allgemeinen Verhältnisse im anatomischen Bau des *Scorzoneren*-Stengels sind folgende. Die Epidermzellen sind gewöhnlich mit starken Außenwänden versehen. Unter derselben liegen vor den Gefäßbündeln tief eingreifende, oft bis zum Phloëm hinziehende Collenchymstränge, während interfascicular nur dünnwandiges parenchymatisches Rindengewebe ausgebildet ist. Gewöhnlich nur vor den Gefäßbündeln, selten (im ausgebildeten Zustande des Stengels) auch zwischen denselben liegt eine einschichtige dünnwandige Endodermis mit zuweilen recht deutlichen Caspary'schen Streifen. Die Gefäßbündel liegen alle oder zum größeren Theil in einer kreisförmigen Zone, die 1 oder mehr concentrische Kreise von Bündeln enthalten kann. Außerdem kommen bei mehreren Arten markständige kleinere Gefäßbündel vor. Die Hauptstränge sind collateral oder bicollateral. Im äußeren Phloëm sehr oft, im inneren nicht selten, werden Hartbaststränge beobachtet. Zwischen den primären Gefäßen ist das („intervasale“) Gewebe oft dünnwandig und unverholzt. Bei nicht wenigen Arten werden

die Gefäßbündel der Ringzone mittelst starkwandigen mehr oder minder verholzten Grundgewebes zu einem Festigungscylinder verbunden. Die markständigen Bündel können neben Weichbast auch Xylemgewebe und — wiewohl selten — Hartbastfasern enthalten; ihr Querschnitt nimmt gewöhnlich nur den Raum einer oder weniger Markzellen ein, zwischen denen sie wie eingeklemmt erscheinen.

Eine Bemerkung noch ist bezüglich des Ausdruckes „bicollaterale Gefäßbündel" vorauszuschicken. Gewöhnlich werden bei den Dikotylen solche Bündel darunter verstanden, deren Holztheil sowohl nach außen wie nach der Markseite hin von Phloëmpartien derartig begleitet werden, daß dort nur das Cambium eine Grenze bildet, hier oft nicht einmal ein solches sich vorfindet. Bei den *Cichoriaceen* aber scheinen bicollaterale Gefäßbündel in diesem Sinne überhaupt nicht vorzukommen. Stets liegen hier zwischen den innersten (ältesten) Gefäßen und dem radiär-inneren Phloëmstrange noch mehrere Schichten meist verholzten Grundgewebes. Dazu kommt, daß bei mehreren Arten von *Scorzonera* diesem inneren Phloëm unmittelbar nach außen hin kleine Holzgruppen mit Gefäßen sich anschließen, am deutlichsten bei *Sc. papposa*, wo diese Gefäße in kurzen Reihen stehen und daher besonders auffallen. Es liegen hier also umgekehrt orientirte („obverse") markständige Gefäßbündel vor, wie auch durch die mannigfachsten Färbungsmittel noch erhärtet werden konnte.

In Uebereinstimmung damit liegt bei diesen obversen Innensträngen der Hartbast (Bastfaserzellen), wo er überhaupt vorkommt, stets in der dem Centrum des Querschnittes am meisten genäherten Partie des Phloëms. Die Innenbündel können also bezüglich der Ausbildung ihrer Constituenten und hinsichtlich deren Anschlusses an die Bündel des äußeren Gefäßbündelkreises folgende Abstufungen zeigen:

1) Die inneren Bündel zeigen (in umgekehrter Orientirung der äußeren) von innen nach außen Hartbast, Weichbast, Holz; sie liegen frei im Markgewebe, radiär hinter den Außenbündeln, völlig getrennt von denselben.
2) Die inneren Bündel bilden nur Weichbast mit etwas Hartbast aus, oder nur ersteren allein; sie liegen den Außenbündeln im allgemeinen näher, als die unter 1) beschriebenen, jedoch immer noch durch Grundgewebe deutlich von denselben abgesondert.
3) Die inneren Bündel enthalten nur Weichbastelemente und rücken so nahe an die Holztheile der Außenbündel heran, daß sie wie Theile derselben erscheinen.

Auch bei anderen Pflanzenfamilien (z. B. *Solanaceen*, *Cucurbitaceen*, *Convolvulaceen*) werden wie hier bei *Scorzonera* und sonstigen *Cichoriaceen*, vorzugsweise die den ersten beiden Kategorien angehörigen Verhältnisse beobachtet.

Uebersicht der Anatomie des Stengels bei *Scorzonera.*

I. Gruppe (*Polycyclicae*). Die Gefäßbündel liegen in unregelmäßiger Weise zu mehreren undeutlichen Kreisen angeordnet im Querschnitt des Stengels; sie sind sämmtlich collateral. Markstrahlgewebe großzellig, wenig verdickt und -verholzt.

Scorzonera eriosperma MB. Epiderm außen viel stärker verdickt als innen, Cuticula kräftig. Spaltöffnungsschließzellen eingesenkt. Collenchym vor den äußeren Gefäßbündeln in großen bis zum Endoderm reichenden Complexen, stark verdickt, interfascicular fehlend. Endoderm vor den Gefäßbündeln deutlich, interfascicular nicht erkennbar. Hartbastgruppe aller Bündel scharf abgegrenzt, Wände stark verdickt; in den äußeren Gefäßbündeln reicht der Hartbastcomplex bis an die sehr schwach verholzten Markstrahlen heran, in den inneren Bündeln liegt derselbe bald mitten im Weichbast, bald an einer Seite desselben, wobei dann oft der Hartbast den Mittelpunkt einer fächerförmigen Anordnung der Gewebselemente des Bündels bildet. Die Axe der inneren Bündel liegt nicht selten schief oder gekreuzt zu derjenigen der benachbarten äußeren.

Sc. hirsuta L. ebenso, aber die Spaltöffnungen nicht eingesenkt.

Sc. ensifolia MB. wie hirsuta, die Spaltöffnungen ebenfalls flachliegend oder sogar emporgehoben.

Sc. nervosa Trev. Innere Bündel in Bezug auf Gestalt und Lagerung des Hartbastes eben so regelmäßig gebaut wie die äußeren. In der Rinde findet sich interfascicular eine Schicht collenchymatischen Hypoderms. Sonst wie Sc. eriosperma.

Sc. cretica Willd. sehr ähnlich Sc. eriosperma, jedoch die Epidermzellen nach außen stärker vorgewölbt und außerdem wie bei den anderen Arten gekörnelt; Spaltöffnungen nicht vertieft; Hartbast schwach verdickt.

Sc. tomentosa L. Die Pflanze ist sehr stark behaart, im Zusammenhange damit sind die Epidermzellen schwach verdickt, aufgetrieben, unregelmäßig. Endoderm kaum

oder nicht erkennbar, Spaltöffnungen nicht vertieft. Hartbast kräftig, scharf begrenzt. Markstrahlzellen sehr schwach verholzt.

II. Gruppe (*Dicyclicae*). Die Gefäßbündelanordnung auf dem Querschnitt zeigt 2 undeutliche Kreise von ungleich großen Bündeln, außerhalb oder innerhalb deren noch einige kleinere liegen. Oft stehen auf dem nämlichen Radius 2 Bündel hinter einander.

1) Markstrahlgewebe wenig oder garnicht verholzt, großzellig und dünnwandig.

Sc. rigida Auch. Spaltöffnungen eingesenkt. Meist 1 Schicht collenchymatischen Hypoderms zwischen den mächtigen Collenchymcomplexen. Hartbast stark verdickt. Milchsaftröhren vom Durchmesser der benachbarten Bastzellen.

Sc. pygmaea Sibth. Spaltöffnungen flachliegend oder emporgehoben. Kein Hypoderm und kein Hartbast, nur die äußeren Phloëmzellen schwach collenchymatisch verdickt. Im Holztheil fast nur die Gefäße verholzt. Viele Milchröhren vor jedem Gefäßbündel im Bogen angeordnet, die mittleren am größten.

2) Markstrahlgewebe mehr verholzt und verdickt, so daß dadurch eine Verbindung zwischen den Gefäßbündeln hergestellt wird, die mit diesen zusammen einen Festigungsring darstellt.

a. Alle Gefäßbündel beider Kreise werden durch eine mächtig entwickelte Zone verdickten und verholzten Grundgewebes mit einander verbunden.

Sc. subaphylla Boiss. Collenchymgruppen klein. Endoderm undeutlich. Die äußeren Rindenschichten bestehen aus regelmäßig angeordneten Palissadenzellen, deren radialer Durchmesser den tangentialen um das doppelte oder mehr übertrifft. Hartbastcomplex der äußeren Bündel klein; die inneren Bündel (nicht immer) mit vereinzelten Bastfaserzellen. Die Milchröhren aller äußeren Bündel bilden eine gemeinsame tangentiale Reihe außerhalb der Hartbastgruppen, sie sind verhältnißmäßig sehr groß, den inneren Gefäßbündeln aber fehlen sie.

Sc. ramosissima DC. Der innere Kreis besteht nur

aus wenigen Gefäßbündeln. Rinde aus lauter gewöhnlichen runden oder querovalen Zellen.

b. Die Gefäßbündel des inneren Kreises werden durch verdicktes und verholztes Grundgewebe mit einander verbunden. Außerhalb dieses Ringes liegen die Bündel des äußeren Kreises isolirt.

Sc. cinerea Boiss. Alle Bündel mit starkem Hartbastcomplex. Collenchym stark verdickt, in kräftigen Gruppen. Endoderm deutlich. Jedes Gefäßbündel hat seine eigenen Milchröhren.

III. Gruppe (*Monocyclicae endodesmoticae*). Ein regelmäßiger Kreis von Gefäßbündeln; innerhalb desselben durch das Mark zerstreute Phloëmstränge ohne oder mit Holzcomplex (observe Innenstränge).

A. Gefäßbündel bicollateral, aber das innere Phloëm auf der Außenseite meist von kleinen Gefäßen begleitet, demnach innere observe Bündelchen darstellend.

a. Aeußeres Phloëm mit Hartbastcomplex, inneres meist mit einzelnen Hartbastfasern.

Sc. latifolia Vis. Aeußeres Phloëm entweder halbkreisförmig in das Xylem eingebuchtet oder im Umriß queroval, mit großem scharf umgrenztem dickwandigem Hartbastcomplex. Grundgewebe zwischen den Bündeln und um dieselben schwach verholzt, großzellig. Wenige markständige Bündel. Rindenzellen klein, rund, nach innen größer werdend.

Sc. mollis MB. Aeußeres Phloëm queroval, mit großem, schwachwandigem, demnach wenig ausgezeichnetem Hartbastcomplex. Sonst wie Sc. latifolia.

Sc. elata Boiss. Aeußeres Phloëm flach, mit wenig dickwandigem Hartbast. Grundgewebe um die Gefäßbündel stark verholzt. Rindenzellen queroval. Epiderm außen bedeutend stärker verdickt als innen.

b. Aeußeres und inneres Phloëm ohne Hartbast.

Sc. hispanica L. Collenchymcomplexe vor den Gefäßbündeln groß, interfascicular nicht entwickelt. Grundgewebe um die Xylemtheile und Markstrahlen stark verholzt.

Sc. papposa DC. sehr ähnlich, aber Verholzung schwächer, dagegen sind die Gefäße am inneren Phloëm hier zahlreicher und in kurze Reihen geordnet.

Sc. incisa DC. Interfascicular ist ein 1 schichtiges collenchymatisches Hypoderm entwickelt. Epiderm außen viel stärker verdickt als innen.

Sc. limnophila Boiss. Collenchymcomplexe klein. Verholzung des Grundgewebes schwach, in den Markstrahlen fast fehlend.

B. Gefäßbündel collateral. Im Mark viele große kreisrunde Phloëmbündel ohne Hartbast.

Sc. aristata Ram. Collenchym in großen stark verdickten Gruppen. Markstrahlen wenig verholzt.

IV. Gruppe (*Monocyclicae adesmoticae*). Nur ein Gefäßbündelkreis vorhanden, keine markständigen Stränge.

A. Gefäßbündel bicollateral, inneres Phloëm ohne Hartbast.

1) Collenchym nur vor den Gefäßbündeln entwickelt, interfascicular fehlend. Aeußeres Phloëm mit größerem Hartbastcomplex.

Sc. stricta Hornem. Endoderm deutlich. Inneres Phloëm immer kleiner als das äußere.

Sc. inaequiscapa Boiss. sehr ähnlich, aber im inneren Phloëm zuweilen vereinzelte oder zerstreute sklerotische Zellen. Verholzung des Grundgewebes sehr stark, Collenchym kräftig verdickt.

Sc. crocifolia Sibth. Endoderm undeutlich. Inneres Phloëm etwa so groß wie das (kleine) äußere, dieses mit relativ großem scharf begrenztem Hartbast.

2) Collenchym auch interfascicular in mindestens 1 Schicht vorhanden. Aeußeres Phloëm meist ohne Hartbastfasern, aber mit etwas collenchymatischen äußeren Zellen.

Sc. macrocephala DC. Gefäßbündel nur zum Theil bicollateral. Inneres Phloëm viel kleiner als das äußere. Verdickung der Epidermzellen nach außen vorspringend.

B. Gefäßbündel collateral.

1) Ohne Hartbast (nur bei Sc. parviflora zuweilen eine oder einige zerstreute Faserzellen).

a. Verholzung überall, mit Ausnahme der Gefäße, sehr schwach. Endoderm undeutlich. Querschnittumriß unregelmäßig buchtig.

Sc. lanata MB. Epidermzellen beiderseits fast gleichmäßig verdickt. Collenchym im ganzen Umfange des Stengels 2—5 schichtig, wenig charakteristisch, Phloëm durch eine Milchröhrenschicht von der Rinde abgegrenzt.

Sc. tuberosa Pall. Epidermzellen nach außen bedeutend stärker verdickt als nach innen. Collenchym nur in den Stengelrippen. Phloëm nicht scharf abgegrenzt.

b. Xylem und Grundgewebe deutlich verholzt. Endoderm vor den Gefäßbündeln deutlich. Querschnitt rundlich.

Sc. humilis L. Größere Collenchymgruppen vor den Gefäßbündeln, kleinere dazwischen, keine bis zum Endoderm reichend. Phloëm sehr mächtig, weit in die Rinde vortretend. Markstrahlzellen groß, wenig verholzt.

Sc. parviflora Jacq. sehr ähnlich, aber Collenchym in großen Complexen nur vor den Gefäßbündeln und bis zum Endoderm reichend, sonst nicht ausgebildet. Phloëm queroval. Die Xylempartien der Gefäßbündel bilden einen geschlossenen, wenn auch nicht starken Holzring auf dem Stengelquerschnitt.

2) Mit Hartbastcomplex im Phloëm.

a. Hartbast aus schwach verdickten Zellen, in großem Complex.

Sc. sericea Auch. Querschnitt durch Rippen vor den Gefäßbündeln fast sternförmig. An Stelle des Collenchyms verdickte, häufig sklerotische Zellen. Rindenzellen queroval. In die Rinde öfters kleine Bündel eingelagert.

Sc. villosa Scop. Collenchym in großen Complexen, stark verdickt. Rindenzellen außen klein, kreisrund, nach innen größer. Endoderm deutlich. Sonst wie vorige.

Sc. austriaca Willd. Querschnitt rundlich, mit vielen unregelmäßigen Ausbuchtungen. Endoderm

wenig deutlich. Anordnung der Gewebe weniger regelmäßig als bei Sc. villosa; sonst dieser ähnlich.

b. Hartbast besteht aus stark verdickten Zellen in scharf abgesetztem Complex.

Sc. purpurea L. Epidermzellen außen viel stärker verdickt als innen. Spaltöffnungen stark emporgehoben. Collenchymgruppen oft seitlich verbunden. Intervasales Gewebe wenig verholzt.

Sc. cilicica Boiss. Querschnittsumriß fast sternförmig durch stärkere regelmäßige Rippen vor den Gefäßbündeln. Spaltöffnungen etwas vertieft. Außer den Collenchymcomplexen noch meist 1 collenchymatische interfasciculare Hypodermschicht ausgebildet. Verholzung des intervasalen Gewebes stärker als bei der vorigen Art.

Sc. eriophora DC. Epidermzellen außen und innen gleichmäßig wenig verdickt. Collenchym nur in sehr großen stark verdickten getrennten Complexen. Hartbastgruppe im Phloëm besonders groß. Markstrahlgewebe schwächer verholzt als bei den beiden vorigen Arten.

Beiträge zur Kenntniß der Hieracienflora Osteuropas und des Orientes.

Von

A. Peter.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Februar 1898.

II.[1]) Hieracien aus Kaukasien.

Von ihrer im Jahre 1890 ausgeführten botanischen Expedition in die Kaukasus-Länder brachten die Herren S. Sommier und Dr. E. Levier in Florenz eine Anzahl Hieracien heim, deren Bestimmung von mir gewünscht wurde. Einige wenige dieser Pflanzen haben die genannten Forscher bereits 1893/95 an verschiedenen Orten[2]) beschrieben, aber auch fast alle übrigen in der Sammlung enthaltenen Hieracien beanspruchen Interesse, theils deswegen, weil sie meines Wissens bisher nicht bekannt gewesen oder für jene Gegenden zum ersten Mal constatirt worden sind, theils wegen ihrer Stellung zu anderen Sippen, oder auch wegen ihrer anscheinenden Hybridität zwischen Arten, deren Kreuzungsfähigkeit nicht erwiesen war. Letzteres gilt namentlich für einige Formen aus der Gruppe der *Pseudostenotheca* Fr., deren Kenntniß durch die Sammlung der Herren Sommier und Levier überhaupt wesentlich gefördert wird (siehe darüber unten No. 27, 28, 35—39).

Indem ich die Pflanzen hier thunlichst genau beschreibe, glaube ich damit einen geeigneten Beitrag für eine später vorzunehmende gründlichere Bearbeitung der kaukasischen Hieracien zu liefern,

---

1) Vergl. diese Nachrichten, 1893 p. 65—81.

2) Bullettino della Società botanica italiana 1893. — Acta horti Petropolitani XIII, 1894, No. 10. — Nuovo Giornale botan. Italiano II, 1895, No. 2.

der zunächst Denjenigen als Leitfaden dienen kann, die in jenen Ländern sammeln und als Unterlage für ihre Bestrebungen mehr als eine bloße Artenliste wünschen werden. Die relativ große Anzahl verschiedener Hieracienformen in der doch keineswegs sehr umfangreichen Sammlung der Herren Sommier und Levier läßt vermuthen, daß die kaukasischen Gegenden weit mehr von dieser Gattung beherbergen, als bisher bekannt gewesen ist. Ein genaueres Studium dieser Sammlung hat auch gezeigt, daß von unseren alpin-karpathischen Arten mehrere den Kaukasus ebenfalls bewohnen, von denen dies nicht vermuthet wurde: ein Fingerzeig mehr auf die südöstliche Einwanderung eines Theiles unseres mittel- und- westeuropäischen Artenbestandes.

Die folgende Aufzählung richtet sich bezüglich Anordnung und Nomenclatur der Gruppen nach derjenigen, welche von mir in den „Natürlichen Pflanzenfamilien“ vorgeschlagen wurde.

I. Piloselloidea.

A. Pilosellina.

1. Hieracium Hoppeanum Schult. — Typische, nur etwas kleinköpfige Exemplare, die mit solchen aus den Alpen gut übereinstimmen. Die Species war bisher aus dem Kaukasus nicht bekannt, wenigstens nicht in solchen Sippen, die zur *Gr. Hoppeanum* gehören; manche Formen der *Gr. Macranthum* dagegen verbreiten sich weit nach Osten hin und wurden dort schon früher gefunden.

Blätter spatelig-länglich, allmählich in den Grund verschmälert, gelbgrün, reichlich mit hellen langen weichen Haaren bedeckt. Köpfchenhülle 10 mm lang, grau; äußere Schuppen ca. 2,5 mm breit, gerundet stumpf, innere 2 mm breit, spitz, alle nur filzig und reichdrüsig. Blüthen außen stark rothstreifig. Drüsen am Schaft oben sehr zahlreich, schwarz, abwärts bis zum Grunde stark vermindert.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Joche Latpari zwischen den Flüssen Hippus (Tzkhenis-Tzkhali) und Ingur ca. 3000 m, 4. VIII. 1890. (Herb. S. L. No. 10[1].)

2. H. Hoppeanum Schult. * antennarioides n. subsp. — Zur *Gr. Macranthum* gehörig, ist der in Siebenbürgen vorkommenden Form des *H. * atrichum* N. P. Monogr. Pilosell. p. 126 ähnlich.

Pflanze bis 20 cm hoch, mit grundständiger Blattrosette, we-

1) Für künftige Revisionen des Materiales gebe ich die Nummern an, welche die Pflanzen im Herbarium der Herren Sommier und Levier tragen.

nigen kurzen kaum dicklichen ziemlich großblättrigen Stolonen, aufsteigendem sehr schlankem 1köpfigem Schaft, kleinem Kopf, stark rothgestreiften Randblüthen, weißfilzigem Blattrücken. Rhizom kriechend, Ausläufer ziemlich schlank, deren Blätter wenig kleiner als diejenigen der Rosette. Blätter ± spatelig-lanzettlich, gerundet bis stumpf, zuweilen lang in den stielartigen Grund verschmälert, zuweilen ganz ungestielt, oberseits sattgrün, unterseits weißfilzig, 2—5 cm lang. Hülle 7—8(—9) mm lang, eiförmig, am Grunde gerundet; Schuppen 1,5—2,5 mm breit, äußere etwas zugespitzt, aber am Ende ± gerundet-stumpf, dunkel, schmal berandet, innere bis spitz. Blüthen gelb, außen stark roth gestreift. Haare an Hülle und Schaft 0, auf den Blättern oberseits zerstreut, steif, 4—5 mm lang. Drüsen der Hülle sehr zahlreich, schwarz, am Schaft zerstreut bis zum Grunde, sonst 0. Flocken (Sternhaare) überall Filz bildend, jedoch die Blätter oberseits nackt.

Vorkommen. — Trapezunt auf Hügeln, 14. VI. 1890. (Herb. S. L. No. 8.)

3. H. Pilosella L. — Wahrscheinlich zur *Gr. Vulgare* gehörig, jedoch ist die Subspecies nicht bestimmbar, weil nur ein völlig abgeblühtes Exemplar vorliegt. Was sich an dem Stück erkennen läßt, ist folgendes:

Blätter glaucescirend, ca. 4,5 cm lang, länglich, in den Grund verschmälert, spitzlich, mit ziemlich steifen ca. 10 mm langen Haaren bestreut, oberseits nackt, unterseits mit weißlichgrauem Filz bedeckt. Stolonen verlängert, schlank, mit zahlreichen kleinen Blättern. Hülle ca. 7 mm lang, Schuppen sehr schmal, spitz. Haare der Hülle ziemlich reichlich, hell, 1,5 mm, am Schaft sehr spärlich, 1—1,5 mm lang. Drüsen der Hülle spärlich, am Schaft ganz oben ziemlich zahlreich, abwärts bis zum Grunde sehr vermindert. Flocken: Schaft graufilzig.

Vorkommen. — Svanetien: am Flusse Hippus (Tzkhenis-Tzkhali) zwischen den Dörfern Muri und Leutekhi, 29. VII. 1890 (Herb. S. L. No. 9).

B. Echinina.

4. H. echioides Lumn. * asiaticum N. P. Monogr. Pilos. p. 486. — Es liegt eine Anzahl Exemplare vor, die Seitenstengel abgefressener Stauden darstellen. Soweit erkennbar, ist die Behaarung geringer als bei der l. c. beschriebenen Pflanze, namentlich zeigen die kleinen linealen Stengelblätter kaum überhaupt eine solche, und auch die Stengelbasis scheint statt der langen Haare um so dichteren Sternfilz zu tragen. Der Blattrücken ist grau, die Ober-

seite hauptsächlich längs des Mittelnervs flockig, sonst ziemlich nackt. Am Kopfstande dieser Nebenstengel sieht man bald doldige bald rispige Zusammenordnung der Strahlen 2. Ordnung. — (leg. Brotherus, Herb. No. 557.)

5. H. caucasicum N. P. * Sommieri n. subsp. — Ansehnliche *setigerum*-ähnliche Pflanze mit halbumfassenden Stengelblättern, 35—45 cm hoch, ohne Stolonen, ohne deutliche Blattrosette am Grunde, weil die unteren Blätter zur Blüthezeit bereits meist abgewelkt sind, mit am Grunde aufsteigendem, sonst aufrechtem etwas derbem, bis zu $^{2}/_{3}$ oder noch höher hinauf beblättertem Stengel, blaugrünen langborstigen lanzettlichen unteren, halbumfassenden oberen Blättern, mit locker-rispiger mehrköpfiger Inflorescenz, mittelgroßen Köpfchen, schmalen grauen Hüllschuppen, sattgelben ungestreiften Blüthen, reichlicher abstehender langer borstlicher Behaarung, durch Sternhaare graulich bekleidet.

Rhizom kräftig, Stolonen 0. Stengel fest, fast gerade oder etwas verbogen, feingestreift, beblättert, obere Internodien länger als die unteren. Blätter: untere in den Grund verschmälert, mittlere breit sitzend oder halbumfassend, obere schmallanzettlich bis lineal, alle spitz, weich. Kopfstand etwas unscharf begrenzt, ca. 10—15 köpfig, Strahlen 2. Ordnung 3—4, locker stehend, Ordnungen 4(—5). Hülle 8 mm lang, eiförmig mit gerundeter Basis; Schuppen schmal, sehr spitz, dunkelgrau, schmal hellrandig; Blüthen wenig länger als die Hülle. Haare an der Hülle reichlich, hell, weich, 3 mm, an den Kopfsticlen ziemlich reichlich, steifer, mit dunkelm Fuß, abwärts reichlicher und derber, 4—5 mm lang, überall abstehend, auf den Blättern beiderseits ziemlich reichlich, borstlich, 5—6 mm lang, unter der Lupe deutlich dicht-gezähnt. Drüsenhaare fehlen. Flocken: Hülle und Caulome graufilzig, Schuppenränder armflockig, Blätter oberseits nackt, unterseits ± reichflockig.

Von *H. incanum MB.* durch den Drüsenmangel, von *H. echioides Lumn.* durch breitsitzende Blätter und rispige Inflorescenz, von *H. setigerum Tausch* durch kleine Köpfe und schärfer abgesetzten Strauß, von *H. procerum Fr.* durch den zarteren Wuchs, den Blattgrund, den Mangel an Drüsen verschieden. Unter den bei N. P. Monogr. Pilosell. p. 490/491 beschriebenen Formen steht *H. Sommieri*, das ich nach einem seiner Entdecker zu benennen vorschlage, dem *H. Hohenackeri* näher als dem *H. caucasicum* sens. strict.

Vorkommen. — Georgien: auf dem Berge David bei Tiflis, 9. VII. 1890 (Herb. S. L. No. 7).

C. Praealtina.

6. **H. magyaricum * substoloniferum N. P.** Monogr. p. 581. — Die Exemplare sind theils mit theils ohne Ausläufer gesammelt worden. Sie haben sehr dünne Caulome und besonders schmale Stengelblätter, auch unterscheiden sie sich von der l. c. beschriebenen dalmatinischen Pflanze durch mäßig zahlreiche Drüsenhaare im Kopfstande.

Vorkommen. — Trapezunt auf Hügeln, 14. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 11). — Antikaukasus, Adjarien: zwischen Batum und Akhalzikh nahe dem Dorfe Keda in der mittleren Waldregion, 21. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 12).

D. Collinina-Auriculina.

7. **H. longiscapum Boiss.** (et Kotschy). — Mit denjenigen Exemplaren, welche in N. P. Monogr. p. 395 beschrieben worden sind, stimmen die hier vorliegenden Pflanzen besonders was das Indument anlangt nicht völlig überein. Dennoch vermag ich sie nur diesen anzureihen, weil sie gleiche Tracht, also gleiche Verzweigung, gleiche Beblätterung, gleiche Kopfgröße besitzen wie diese. Daß die Farbe der Haare, Blätter, Blüthen nicht genau übereinstimmt, mag seinen Grund z. Th. darin haben, daß ich früher nur sehr alte vielleicht stark gedunkelte Exemplare sah, hier aber frischere Pflanzen vorliegen, z. Th. aber wohl auch darin, daß in der That 2 Varietäten existiren; letzteres wird erst an reicherem Untersuchungsmaterial entschieden werden können.

Pflanze handhoch, mit grundständiger Blattrosette, schwächlichen halbunterirdischen Stolonen, aufrechtem 1 blättrigem an der Spitze lockerrispigem 2—4 köpfigem Schaft, länglichen fast ganzrandigen glaucescirenden Blättern, ziemlich kleinen Köpfchen, schmalen hellrandigen Hüllschuppen, gelben ungestreiften Blüthen, mäßiger weicher Behaarung.

Rhizom kurz, schief, dicklich, zur Blüthezeit mit wenigen etwas verlängerten sehr schlanken Stolonen, deren Blätter viel kleiner sind als die Rosettenblätter. Stengel 16—22 cm hoch, schlank. Blätter (4—)6—7 cm lang, länglich, spitzlich, oft mit verbogener Spitze, am Rande entfernt sehr klein gezähnelt; am Stengel 1 kleineres im unteren $^1/_3$. Kopfstand locker rispig, etwas übergipfelig, Akladium 4—8 mm lang, Bracteen 3—4, sehr klein, hell, dem Kopfe genähert; Strahlen 2. Ordnung 1—3, zerstreut; Ordnungen 2—3; Kopfzahl (1—)2—4(—5). Blühende Köpfchen ziemlich klein; Hülle 7—8 mm lang, am Grunde gestutzt; Schuppen

etwas breitlich, spitz, an der Spitze selbst stumpflich, in der Mitte schwärzlich, hellberandet; Blüthen hellgelb, außen ungestreift; Narben (trocken) dunkel. Haare der Hülle mäßig zahlreich, hell, 2 mm, an den Kopfstielen spärlich, am Stengel oben zerstreut, abwärts zahlreicher, unten ziemlich reichlich, hell mit dunkelm Fuß, 2—3 mm, weich, auf den Blättern beiderseits zerstreut bis mäßig, ziemlich weich, 3—4 mm lang. Drüsen der Hülle ziemlich zahlreich, an den Kopfstielen reichlich, schwärzlich, am Stengel rasch vermindert bis zum Stengelblatt, sonst 0. Flocken der Hülle spärlich, sehr klein, am Stengel zerstreut, auf den Blättern außer am Mittelnerv unterseits 0, Kopfstiele graulich.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Berge Tetenar über dem Dorfe Ciolur am Flusse Hippus (Tzkhenis-Tzkhali) auf Alpenweiden ca. 2200—2400 m, 1. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 17, 19 p.p.).

Interessant erscheint es, daß auch dieses *longiscapum*, wie das l. c. beschriebene, Uebergangsformen gegen die Spec. *Hoppeanum* hin zeigt. Eine derselben, die ich nicht als *H. longiscapum-macranthum*, sondern als *H. longiscapum* > *Hoppeanum* auffasse, ist das hier folgende *H. Levieri*, welches nach einem seiner Entdecker benannt werden möge.

E. Collinina-Auriculina-Pilosellina.

8. H. Levieri n. sp. — Handhoch, mit kriechenden Stolonen, grundständiger Rosette aus länglichlanzettlichen fast ganzrandigen gelblichgrünen Blättern, aufrechtem kurzgablig-2—3 köpfigem Schaft, mittelgroßen grauen Köpfchenhüllen, breiten hellrandigen Hüllschuppen, gelben ± gestreiften Blüthen, überall reichlicher steifer abstehender Behaarung.

Rhizom kriechend, wenige cm lang, schlank, zur Blüthezeit ohne oder mit wenigen mäßig verlängerten Stolonen, deren Blätter grün und halb so lang sind wie die Rosettenblätter. Blätter gelblichgrün, 5—7 cm lang, länglich-lanzettlich bis etwas spatelig-länglich, spitz, am Rande entfernt gezähnelt. Stengel 10—14 (—22) cm hoch, ziemlich schlank, weich, am Grunde kurz aufsteigend, blattlos oder nahe dem Grunde mit 1 kleinen Blatt, an der Spitze kurzgablig; selten 1—2 Nebenstengel oder Flagellen vorhanden. Kopfstand hochgablig, ± übergipflig, Akladium (6—)8—15(—30) mm lang; Bracteen 2—3, dem Kopfe genähert; Strahlen 2. Ordnung 1—2, Ordnungen 2(—3), Kopfzahl (1—)2—3. Blühende Köpfe mäßig groß, Hülle 9(—10) mm lang, am Grunde gestutzt, zuletzt etwas niedergedrückt; Schuppen breit, etwas zugespitzt, spitzlich, in der Mitte dunkel, beider-

seits breit hellgrün berandet; Blüthen hellgelb, ziemlich tief gezähnt, randständige außen gegen die Spitze hin ± röthlich-gestreift oder -angelaufen; Narben dunkel. Haare überall reichlich, ± steif, auf den meisten Blättern oberseits weichborstlich, 4—5 mm lang, auf den obersten Blättern der Rosette minder zahlreich, am Stengel 2—4(—5) mm, auf der Hülle 1,5—2 mm lang, überall hell, am oberen Theil der Pflanze mit dunkelm Fuß. Drüsen dunkel, an der Hülle mäßig zahlreich, an den Kopfstielen reichlich, am Stengel bis zum unteren Drittel rasch vermindert, sonst 0. Flocken der Hüllschuppen ziemlich reichlich, jedoch auf den Rändern derselben fehlend, an den Kopfstielen grauen Filz bildend, am Stengel bis zum Grunde reichlich, auf den Blättern oberseits 0, unterseits ziemlich reichlich bis (ältere) zerstreut, gegen den Mittelnerv zahlreicher. Früchte schwarzbraun, stark gestreift, 2,3 mm lang.

Vorkommen. — In Gesellschaft des *H. longiscapum Boiss.* in Svanetien: auf dem Berge Tetenar über dem Dorfe Ciolur am Flusse Hippus (Tzkhenis-Tzkhali) auf Alpenweiden 2200—2400 m, 1. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 17 part., 18, 19 part.).

Ist besonders durch die gesperrt gesetzten Merkmale von *H. longiscapum* verschieden. Wenn dieses = *H. collinum-Auricula* ist, wie ich annehme, so vereinigt *H. Levieri* in sich die Merkmale der Specc. *collinum*, *Auricula* und *Hoppeanum*. *H. collinum Gochn.* drückt sich am deutlichsten in den Blättern und in der Behaarung aus, *H. Auricula Lamk. et DC.* in den Köpfchen, den hellen Hüllschuppenrändern und in den Stolonen, *H. Hoppeanum Schult.* endlich in der Verzweigung und in der Bekleidung mit Sternhaaren. Da *H. collinum* wie *H. Auricula* zu den kleinköpfigen straußig-verzweigten Arten, *H. Hoppeanum* aber zu den großköpfigen Stengellosen gehört, so kann eine gablige Inflorescenz von wenigen mittelgroßen Köpfen, wie *H. Levieri* sie aufweist, als Resultante einer Mischung dieser Verzweigungsformen erwartet werden. Durch diese kurze Gabelung eben so sehr wie durch das Indument der Spec. *furcatum Hoppe* ähnlich, mit der es leicht zu verwechseln ist, zumal auch dieser z. Th. die Merkmale der Spec. *Hoppeanum* innewohnen.

Die sich hier aufdrängende Frage, ob das in N. P. Monogr. p. 245 beschriebene und bezüglich seiner Deutung unklare *H. brevisetum* etwa auch in die Nachbarschaft von *H. Levieri* gehört, muß indessen wegen Mangel an Material des ersteren unbeantwortet bleiben.

F. Echinina-Praealtina.

9. H. calodon Tausch * latpariense n. subsp. — Dem *H. * psammophilum* N. P. Monogr. Pilosell. p. 745 ähnlich im Aufbau, jedoch oft hochwüchsiger, länger behaart und mit Drüsenhaaren im Kopfstande, auch sind die Schuppen der Köpfchenhüllen am Rande nicht graufilzig, sondern nur wenig flockig.

Pflanze hochwüchsig, schlank, ohne Ausläufer, mit basaler wenigblättriger Rosette aus gelblichgrünen borstlich behaarten lanzettlichen Blättern, einigen decrescirenden Stengelblättern in der unteren Hälfte, endständigem doldigem lockerem Kopfstande von ziemlich zahlreichen kleinen schmalschuppigen Köpfchen, mit sattgelben ungestreiften Blüthen und ziemlich reichlicher steiflicher Behaarung aller Theile.

Stengel 40—62 cm hoch, fein gestreift, am Grunde etwas aufsteigend, sonst gerade-aufrecht, hohl, in der unteren Hälfte decrescirend-5—6 blättrig. Blätter lanzettlich, spitzlich und spitz, ganzrandig, lang in den Grund verschmälert, steiflich, ziemlich rasch in die wenigen Bracteen der oberen Stengelhälfte übergehend. Kopfstand doldig mit kurzem (ca. 10 mm) Akladium; Strahlen 2. Ordnung 5, dünn; Ordnungen 4; Köpfchen 10—15(—25). Hülle 6—7 mm lang, eiförmig mit gerundeter Basis; Schuppen sehr schmal, spitz, grau, hellrandig; Bracteen grau. Blüthen gelb, ungestreift. Haare der Hülle mäßig, hell, 1 mm, an den Caulomen oben ebenso, etwas dunkel, 2—3 mm, abwärts dichter, länger und steifer, auf den Blättern beiderseits ziemlich reichlich, steif bis borstlich, 3—4 mm lang. Drüsen an der Hülle kaum mäßig, klein, an den Kopfstielen und ganz oben am Stengel spärlich bis vereinzelt, abwärts 0. Flocken: Hülle graulich, Schuppenränder ± nackt, Kopfstiele grau, Stengel reichflockig, Blätter oberseits mit zerstreuten aber am Mittelnerv dichter stehenden, unterseits mit ziemlich zahlreichen Flocken bestreut, diese besonders klein. Früchte schwarz, 1,7 mm lang.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Passe, zwischen den Flüssen Hippus und Ingur in der Waldregion, 3. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 4); — daselbst ca. 2200 m, 4. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 6); — zwischen dem Dorfe Ipar und dem zum Mujal führenden Joch, 10. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 5).

Daß die Bestimmung des *H. * latpariense* als ein *H. calodon* = *echioides-florentinum* zutreffend ist, wird ersichtlich, wenn man einerseits die Haar- und Flockenbekleidung, die Form der Inflorescenz, die Drüsenarmuth (als Merkmale des *H. echioides*), ander-

seits die Blattform, Beblätterung, die Hüllschuppen (Merkmale von *H. florentinum*) ins Auge faßt.

10. H. pannonicum * Parreyssianum N. P. Monogr. p. 758. — Es ist in der Sammlung nur ein unvollständiges Exemplar vorhanden, mit gedrängtem Kopfstande; die Bestimmung ist daher etwas zweifelhaft.

Vorkommen. — Mit den beiden folgenden in Adjarien (Antikaukasus) zwischen Batum und Akhalzikh, zwischen den Dörfern Khula und Danais Paraul, 22. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 13 part.), — ferner zwischen den Dörfern Keda und Khula, 21. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 14).

11. H. pannonicum Pet. * adjarianum n. subsp. — Stattliche auffällige Pflanze, die in ziemlich zahlreichen Exemplaren aufliegt. — 60—70 cm hoch, mit grundständiger Rosette, verlängerten schlanken oberirdischen kleinblättrigen Stolonen, aufrechtem starkem am Grunde beblättertem, an der Spitze mehrköpfig-doldenrispigem Stengel, schmallanzettlichen gestielten Blättern, kleinen Köpfchen, schmalen dunkeln Hüllschuppen, gelben Blüthen, borstlicher Behaarung besonders am unteren Theil.

Rhizom kurz, schief, zur Blüthezeit mit einigen verlängerten, rauhhaarigen Stolonen, deren Blätter meist nur bis $^1/_3$ (höchstens $^1/_2$) so lang sind als die Rosettenblätter und gegen die Stolonenspitze langsam decresciren. Stengel etwas verbogen, hohl, gestreift. Blätter schmallanzettlich, in einen langen Stieltheil verschmälert, sehr spitz, sehr entfernt ganz klein gezähnelt, glaucescirend; in der unteren Stengelhälfte 5—6 aufwärts an Größe rasch abnehmende. Kopfstand doldig mit einigen abgerückten unteren Aesten, locker, ± überwipflig; Akladium 10—12 mm lang; Bracteen dunkel, fast pfriemlich; Strahlen 2. Ordnung 5–6(—8), obere doldig gedrängt, die 2–3 untersten zerstreut, alle dünn; Ordnungen 3—4; Kopfzahl (7—)10—20. Köpfchen klein, Hülle 6—7 mm lang, cylindrisch-oval mit gerundeter Basis; Schuppen sehr schmal, dunkel, schmal hellrandig, spitz. Blüthen hellgelb, ungestreift. Haare der Hülle mäßig zahlreich, ziemlich hell, 1,5 mm, an den Kopfstielen fast 0, am Stengel oben zerstreut, von der Mitte ab vermehrt, unten ziemlich reichlich, steif, abstehend, 3—5 mm, auf den Blättern oberseits überall und unterseits am Hauptnerv ziemlich zahlreich, borstlich, 4—5 mm, sonst unterseits spärlich, auf den Stolonen reichlich, weich, 3 mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen ziemlich reichlich, am Stengel bis zum unteren Drittel langsam vermindert, unten 0. Flocken an der Hülle zerstreut, an den Kopfstielen graulichen Ueberzug

bildend, am Stengel ziemlich reichlich bis zum Grunde, auf den Blättern oberseits zerstreut, unterseits ± zahlreich, bei den jüngeren Blättern reichlich. Blüthen nur wenig die Hüllschuppen überragend. Früchte schwarz, 1,8 mm lang.

Vorkommen. — Adjarien (Antikaukasus) zwischen Batum und Akhalzikh, zwischen den Dörfern Khula und Danais Paraul, 22. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 13 part.).

Steht dem *H. pannonicum * thracicum N. P.* Monogr. p. 759 nahe, hat aber zahlreichere Drüsen im Kopfstande und viel mehr Flocken auf den Blättern; letztere sind hier spitzer, die Haare länger. — Auch dem *H. pannonicum typicum* ähnlich.

17. H. pannonicum * xystrophyllum N. P. Monogr. p. 757.

β. syntomum n. var. — Pflanze ca. 60 cm hoch, mit grundständiger Rosette, sehr verlängerten sehr schlanken kleinblättrigen Stolonen, aufrechtem schlankem, am Grunde spärlich beblättertem Stengel, der an der Spitze eine lockerrispige mehrköpfige Inflorescenz trägt, mit lanzettlichen stumpfen bis spitzen Blättern, kleinen Köpfchen, schmalen dunkeln Hüllschuppen, gelben Blüthen, zerstreuter borstlicher Behaarung der Blätter, kahlem Stengel.

Vorkommen. — Antikaukasus, Adjarien zwischen Batum und Akhalzikh: zwischen den Dörfern Khula und Danais Paraul, 22. VI. 1890 (Herb. S. L. No. 13 part.).

Diese Form des *H. * xystrophyllum* kenne ich schon seit langer Zeit aus dem ungarischen Comitat Trencin, wo sie 1871 von Holuby auf Bergwiesen am Fuße des Lepennik 910 m gesammelt wurde. Sie unterscheidet sich von der l. c. beschriebenen Pflanze durch folgende Merkmale: Kopfstand sehr locker doldig oder rispig, übergipflig, Hüllschuppen dunkler, Kopfstiele minder flockig, Drüsen im Kopfstande zerstreut, Behaarung der Blätter etwas kürzer, an den Caulomen sehr gering. Sie ist auch einer armflockigen Form des *H. * pannonicum* nicht unähnlich, hat jedoch dunklere Hüllschuppen und ist weniger behaart.

II. Archieracia.

G. Vulgata.

13. H. silvaticum L. — Das einzige Exemplar hat abgeblüht. Rosette vielblättrig, Blätter breit-eiförmig, stumpf bis spitz, ± zugespitzt, am Rande ausgeschweift-gezähnt (Zähnchen aufgesetzt), am Grunde gerundet oder gestutzt, beiderseits kurz-weichhaarig, Stiel kürzer als die Spreite; 1 Stengelblatt in der Mitte. Kopfstand locker rispig, gleichgipflig, ca. 7köpfig, mit verlängerten

Kopfstielen. Hülle ca. 8 mm lang, Schuppen schmal, spitz, grau, sehr schmal berandet. Haare an Hülle und Kopfstielen 0, am Stengel oben sehr spärlich, abwärts bis zum Grunde (ziemlich reichlich an Zahl zunehmend. Drüsen an Hülle und Kopfstielen reichlich) am Stengel langsam vermindert fast bis zum Grunde. Flocken: Hülle und Kopfstiele grau, Stengel reichflockig. Früchte schwarz, 2,5 m lang. — Die Pflanze ist demnach in vielen Stücken unserem gemeinsten *H. silvaticum* (= *murorum Auct.*, *non Linn.*) sehr ähnlich.

Vorkommen. — Svanetien: zwischen Muri und Leutekhi am Hippus, 29. VII. 1890 (Herb. S. L. No. 40).

14. H. vulgatum Fr. — Auch hier ist nur ein einziges Exemplar vorhanden, nicht characteristisch genug, daher auch nicht näher bestimmbar. Blätter gelblich, länglich-eiförmig, spitz, in den Stiel vorgezogen, am Rande grob sägezähnig. Hüllschuppen breitlich, lang zugespitzt, sehr spitz, dunkel mit hellen Rändern, haarlos, aber ziemlich reichlich drüsig und flockig.

Vorkommen. — Kuban-Distrikt, auf dem Joche Tieberdinski zwischen den Flüssen Tieberda und Do-ut, 2. IX. 1890 (Herb. S. L. No. 39).

H. Prenanthoidea.

15. H. prenanthoides Vill. var. — der Form der Alpen, Sudeten etc. ähnlich, jedoch zeigen die kaukasischen Exemplare nicht die geigenförmige Gestalt der mittleren Blätter, die bei jenen so charakteristisch ist. Inflorescenz langästig-rispig, gleichgipflig. Hülle 9 mm lang, schwärzlich. Blüthenzähnchen kurzbewimpert. Früchte lehmfarbig, 4,5 mm lang. Blätter hellgrün, mittlere und obere fast ganz umfassend, jene länglich, diese herzeiförmig, oberste herzförmig, alle dünn, ± zugespitzt, entfernt-gezähnelt. Haare an der Hülle fast 0, im Kopfstande oben ebenso, abwärts bald mäßig, am Stengel ziemlich reichlich, 1,5 mm lang, Blätter beiderseits mäßig kurzweichhaarig. Drüsen an der Hülle und den obersten Verzweigungen der Kopfstiele reichlich, aber noch im Kopfstande verschwindend, sonst 0. Flocken am Grunde der Hülle spärlich, an den Kopfstielen reichlich, sonst 0.

Vorkommen. — Svanetien: zwischen dem Dorfe Ipar und dem Paß Eldasuruld, am Uebergange nach Mujal, 10. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 33).

16. H. lanceolatum Vill. — Blätter: mittlere mit gestutzter bis leicht herzförmiger Basis sitzend, halb-, die unteren geöhrt-umfassend, die obersten am Grunde breit herzförmig, alle ausgeschweift

gesägt-gezähnt, steiflich, gelblichgrün. Blüthenzähnchen sehr kurz bewimpert.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari zwischen den Flüssen Hippus und Ingur ca. 2100 m, 4. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 15).

17. H. cydoniifolium Vill. — Leider nur in 1 Exemplar vorhanden, etwa 45 cm hoch, aphyllopod, reich beblättert, mit endständigem locker-rispigem Strauß großer schwarzer Köpfchen. Mittlere Blätter gelblich, länglich, spitzlich, unterseits ziemlich netzaderig, mit gerundeter Basis sitzend, obere mit herzförmigem Grunde umfassend, eiförmig, zugespitzt, verbogen, alle entfernt-gezähnelt, dicklich; Bracteen des Kopfstandes krautig. Hülle ca. 12 mm lang, bauchig; Schuppen breit, schwarz, matt dunkelgrün berandet, stumpf; Strahlen 2. Ordnung 4, entfernt, Ordnungen 2—3, Kopfzahl 6. Behaarung überall ziemlich reichlich, steiflich, im Kopfstande dunkel, sonst hell, bis 2 mm, auf den Blatträndern am dichtesten, aber nur 1 mm lang, auf der Blattoberseite fast 0. Drüsen im Kopfstande ganz oben ziemlich reichlich, abwärts sehr rasch vermindert und bald verschwindend. Flocken an der Hülle spärlich, an den Kopfstielen mäßig, sonst 0. Blüthen hellgelb, Zähnchen nur mit vereinzelten sehr kleinen Wimpern.

Vorkommen. — Ossetien.

Erinnert sehr an das sudetische *H. strictum Auct. non Fr.*, mit dem es die dicken breitschuppigen Köpfchenhüllen theilt, und dem es auch im Habitus ähnlich ist.

18. H. strictum Fr. — Das Exemplar hat den Kopfstand noch nicht völlig entwickelt, kann daher nur unter Vorbehalt zu *strictum* gezogen werden. Daß es zur Verwandtschaft der *Prenanthoidea* gehört, geht aus folgenden Merkmalen deutlich hervor: Stengel reichblättrig, Blätter aufwärts sehr allmählich decrescirend, dünn, rauhbehaart, untere länglich-lanzettlich, mit ± geigenförmig eingezogenen Rändern, mit herzförmiger Basis halbumfassend, entfernt gezähnelt, spitz. Hülle schwärzlich, zerstreut dunkel behaart und drüsig, Schuppen breitlich.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Joche zwischen Hippus und Ingur in der Waldregion, 3. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 36).

I. Sabauda.

19. H. virgultorum Jord. — Gehört zur Verwandtschaft des *H. racemosum W. K.*, wie namentlich aus der Beschaffenheit des traubigen Kopfstandes hervorgeht. Die vorliegenden Exemplare

blühen noch nicht. Sie sind offenbar aus einem und demselben Rhizom entsprossen, 40—60 cm hoch, aphyllopod, in der Mitte reich und dicht beblättert, im oberen Drittel mit zahlreichen rasch sehr verkleinerten bracteenartigen Blättchen besetzt, die in ungefähr gleichen Abständen stehen und bis zur Inflorescenz gehen.

Vorkommen. — Colchis: Mekvena am Flusse Rion (Phasis), 2. Station von Kutais aus, 34 km aufwärts, 24. VII. 1890 (Herb. S. L. No. 16).

K. Umbellata.

20. H. umbellatum L. — Mehrere unter einander nach Blattzähnen und Hüllschuppen nicht völlig übereinstimmende Exemplare. Einige derselben sind nahe über dem Stengelgrunde verzweigt und bilden so beblätterte, am Ende nur wenige Köpfchen in rispiger Anordnung tragende Nebenstengel. Stengel 40—50 cm hoch, derb, fest, aufrecht, aphyllopod, reichblättrig. Blätter schmal-lanzettlich bis fast lineal, mit 2—4 Sägezähnen jederseits oder ohne solche, bis zum Kopfstande nur langsam decrescirend, in letzterem nur pfriemliche Bracteen. Kopfstand doldig oder ± aufgelöst, 6—14köpfig, gleichgipflig. Hülle 10–11 mm lang, fast halbkuglig, in den Stiel herabgezogen; Schuppen schwärzlichgrün und heller, zuweilen grasgrün, breit, langspitzig, spitz, äußere locker abstehend oder sparrig, ohne Indument, nur an den Rändern der äußeren Schuppen wie auf den Stengelblättern sehr kleine Börstchen vorhanden. Flocken an den Kopfstielen reichlich, am Stengel in verschiedener Anzahl, abwärts stark vermindert, auf den Blättern am Rande und unterseits ± mäßig zahlreich. Blüthen sattgelb, die Hülle weit überragend. Früchte 2,6—2,9 mm lang, kastanienbraun.

Vorkommen. — Svanetien: beim Dorfe Kala ca. 1700 m, 7. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 25). — Kuban-District: auf dem Sattel Tieberdinski perival zwischen den Flüssen Tieberda und Do-ut, 2. IX. 1890 (Herb. S. L. No. 27).

21. H. umbellatum L. * coronopifolium Bernh. — Blätter lineal bis schmallineal, jederseits mit einigen längeren zuweilen linealen Zähnen. Kopfstand doldig, darunter einige abgerückte Aestchen.

Vorkommen. — Svanetien: zwischen Kala und Ipar, 9. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 26); — Kuban-District: zwischen Utehkulan und Indisch, 14. IX. 1890 (Herb. S. L. No. 28).

22. H. umbellatum L. * hypotrichum n. var. — Vom typischen *umbellatum* durch folgende Merkmale abweichend: Blätter fast ganzrandig-lineal. Stengel im unteren Theil ± reichlich behaart.

Hülle ca. 9 mm lang, mit ziemlich schmalen sehr spitzen schwärzlichen Schuppen, die nur locker abstehen, nicht sparrig zurückgebogen sind. Die sehr zahlreichen Stengelblätter decresciren gegen den doldigen, abwärts rispigen Kopfstand hin rascher, werden dabei schmallineal und gehen allmählich in die Bracteen der Inflorescenz über.

Vorkommen. — Kuban-District: auf dem Sattel Tieberdinski perival zwischen den Flüssen Tieberda und Do-ut, 2. IX. 1890 (Herb. S. L. No. 27).

Sehr ähnliche Formen sind mir aus verschiedenen Gegenden Europas bekannt, so aus Dänemark, Nord- und Südtirol, Italien, doch haben diese meist breitere Blätter und hellere Hüllschuppen.

23. H. virgatum Peter in Engler-Prantl, natürl. Pflanzenfamil. p. 385. — Aphyllopod. Stengel dünn bis kräftig, hochwüchsig, fest und steif, aufrecht, reichblättrig. Blätter dichtstehend, nach aufwärts ziemlich rasch decrescirend, plötzlich in die Bracteen des Kopfstandes übergehend, alle dunkelgrün, derb, ± lanzettlich, am Rande nach unten umgebogen und entfernt-kleingesägt, durch sehr kurze Börstchen besonders auf Rand und Nerven rauh. Kopfstand doldig-vielköpfig, etwas übergipflig, jedoch können abwärts bis zur Stengelmitte noch blattachselständige kurze Aeste entwickelt werden. Hülle 8—9 mm lang, halbkuglig, nicht in den Stiel herabgezogen, sondern gestutzt; Schuppen schmal, langgespitzt, aber am Ende selbst stumpf, hellgrün, in der Mitte dunkler, äußere abstehend bis sparrig. Haare an Hülle und Kopfstand 0, am Stengel oben ebenso, gegen den Grund hin bis ziemlich reichlich, hell, weich, 2 mm, auf den oberen Blättern 0, auf den unteren besonders unterseits und am Grunde spärlich bis mäßig, weich, bis 2 mm lang; außerdem auf allen Blättern besonders am Rande, aber auch auf beiden Flächen ± zahlreiche sehr kurze Stachelborsten vorhanden. Drüsen fehlen. Flocken an der Hülle 0, an den Kopfstielen reichlich, am Stengel abwärts bald verschwindend. Blüthen gelb, Früchte schwarzbraun, ca. 2,7 mm lang; Pappus weißlich, nicht bräunlich wie bei *H. umbellatum.*

Vorkommen. — Georgien: zwischen Mtzkhed und Tiflis, 22. IX. 1890 (Herb. S. L. No. 3). — Kommt auch an vielen Orten in Mitteleuropa vor.

24. H. monticola Jord. — Eine kleine Form mit nur ca. 25 cm hohem Stengel, 2—3köpfiger rispiger Inflorescenz und 12—13 mm langen ansehnlichen Köpfchenhüllen; Schuppen derselben breit, schwärzlich, am Ende stumpf. Indument und Blätter wie beim

typischen *H. umbellatum.* Erinnert im Wuchs an das unten beschriebene *H. laetevirens.*

Vorkommen. — Abchasien: auf dem Passe Klukhor in dem Hochthal Kliutsch über 2000 m, auf Granit, 27. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 2).

Var. — mit nur 9—10 mm langen Köpfchenhüllen und noch geringerem Indument — in Ossetien.

25. H. laetevirens Somm. et Lev. in Bull. Soc. bot. Ital. 1893 p. 526; Acta horti Petropolit. XIII 1894 p. 196. — Aphyllopod, handhoch, mit einfachem dichtbeblättertem Stengel, gelbgrünen lanzettlichen ganzrandigen Blättern, endständiger rispiger Inflorescenz mit 1—3 ziemlich großen Köpfchen, schwärzlichen anliegenden breitlichen Hüllschuppen, an Stengel und Blättern reichlich hellweichhaarig.

Stengel ca. 20 cm hoch, aufrecht, etwas verbogen, dicklich, fest, gestreift. Blätter am Stengel zahlreich, genähert, ziemlich gleichmäßig vertheilt (jedoch die unteren Internodien die längsten), alle gelbgrün, schief aufrecht gestellt, aufwärts bis zum Kopfstande decrescirend, unterste zur Blüthezeit abgewelkt und verschwunden, mittlere lanzettlich, obere bis lineal, stumpf bis spitzlich, mit schmaler Basis sitzend, nicht besonders netzaderig. Kopfstand rispig, gleichgipflig; Akladium 8—10 mm lang; Kopfstiele unverzweigt, dicklich, Kopfzahl 1—3. Bracteen wenige, lineal. Hülle ca. 11 mm lang, eiförmig, dann niedergedrückt, am Grunde ein wenig in den etwas keuligen Kopfstiel herabgezogen; Schuppen breitlich (ca. 1,5 mm), langgespitzt, spitzlich, schwärzlichgrün mit helleren Rändern, die äußersten viel kürzer als die inneren und locker anliegend. Blüthen dunkelgelb, Zähnchen unbewimpert. Früchte (unreif) 2,7—3 mm lang, hellröthlich-braun; Pappus trübweiß. Haare überall weich, hell (auch mit hellem Fuß), stark gezähnt, auf der Hülle nur an deren Basis spärlich, bis 1 mm, an den Kopfstielen ebenso, am Stengel oben reichlich, abwärts noch zahlreicher, waagerecht abstehend, 2—3 mm, am Stengelgrunde jedoch 0, auf beiden Blattseiten reichlich, oberseits 0,5 mm, unterseits 2—3 mm lang, besonders dicht auf den Blatträndern; außerdem sind auf den Schuppenrändern, am Stengel und besonders auf den Blättern noch ziemlich zahlreiche ganz kurze Stachelbörstchen vorhanden. Drüsen 0. Flocken etwas unregelmäßig ästig, an der Hülle 0, an den Kopfstielen ziemlich reichlich, am Stengel abwärts langsam vermindert, auf Rand und Unterseite der Blätter ± zerstreut bis fast 0.

Vorkommen. — Abchasien: im Hochthal Kliutsch auf dem

Berge über dem Sattel Klukhor 2600—2800 m, Granit, 28. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 1).

Die Pflanze ist bezüglich ihrer Stellung im System nicht ganz leicht zu verstehen. Ohne Zweifel gehört sie in die Verwandtschaft der *Umbellata*, wie auch Somm. et Levier l. c. zutreffend bemerken, dies wegen der Beblätterungsweise, der Blattgestalt, und besonders wegen der kleinen Stachelborsten. Aber der niedrige Wuchs, die kleine Kopfzahl, die dichte Behaarung, die nicht sparrigen Hüllschuppen sind Eigenthümlichkeiten, welche einerseits an die *Tomentosa*, anderseits an *H. alpinum* erinnern, obwohl sich ein solcher Zusammenhang sonst nicht erweisen läßt. Auch ich möchte *H. laetevirens* als eine alpine Parallelart zu *H. umbellatum* ansehen.

L. Pseudostenotheca.

27. H. svaneticum Somm. et Lev. in Nuovo Giornale botan. italiano II 1895 p. 92 sub *H. svanetico var. acutifolio.* — Phyllopod mit wenigblättriger Rosette. Stengel aufsteigend, schlank, bis 40 cm hoch, vom Grunde oder mindestens von der Mitte ab verzweigt, mit entfernten schlanken Aesten, nur an der Spitze eine rispige Zusammenordnung von wenigen Köpfen bildend, die ein wenig überhängt. Stengelblätter 4—5, zerstreut. Köpfchen ansehnlich, mit schwärzlichen sehr ungleich langen lockeren, die Blüthen im Knospenzustande weit überragenden breitlichen Hüllschuppen. Blätter ± lanzettlich, bläulichgrün, entfernt gezähnt bis ganzrandig, ansehnlich. Behaarung oben gering, abwärts mäßig.

Rhizom kurz, dick, mehrstengelig. Grundblätter: äußere lanzettlich, in den Stiel verschmälert, entfernt klein-gesägt-gezähnt, spitz, innere lineallanzettlich bis lineal und bis ganzrandig, langgespitzt, sehr spitz, oft etwas wellig, alle bläulichgrün, etwas derb, die längsten bis 14 cm lang; Stengelblätter 5—7, die untersten noch länger als die Rosettenblätter, sonst wie diese, die folgenden mit verschmälerter Basis sitzend, nach aufwärts an Länge stark abnehmend, die obersten in die Bracteen des Kopfstandes übergehend. Stengel 26—40 cm hoch, am Grunde aufsteigend, fast gerade oder etwas verbogen, schlank, fest, glatt, an der Spitze etwas überhängend, bis zur Basis verzweigt, die mittleren Internodien sind die längsten; Aeste verlängert, sehr schlank, ebenfalls beblättert und wenige Köpfchen tragend. Kopfstand nicht abgegrenzt, langästig-rispig, Aeste entfernt, dünn; Akladium 3—6 mm lang, daher der oberste Kopf 2. Ordnung dem Endköpfchen auffallend genähert; Ordnungen 3, Kopfzahl im ganzen 10—12.

Hülle 12—15 mm lang, cylindrisch, am Grunde in den Stiel herabgezogen, später ± gerundet, die Blüthen in der Knospenlage um 3—4 mm überragend; Schuppen wenig zahlreich, sehr unregelmäßig dachziegelig, äußere rasch in die inneren längsten übergehend, äußerste kurz, locker oder etwas abstehend, alle breitlich (1,3—1,5 mm), fast schwarz, kaum berandet, langspitzig, am Ende stumpf. Bracteen schmallineal, schwärzlich. Haare der Hülle spärlich, schwarz, 1 mm, an den Caulomen oben sehr zerstreut, abwärts vermehrt, unten bis ziemlich reichlich, hell, weich, 3—4 mm, auf den Blättern oberseits gegen Rand und Spitze ± zerstreut, weich, unterseits zahlreicher, am Rande selbst ziemlich reichlich, 1—1,5 mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen ziemlich reichlich, dunkel, lang, an den Caulomen abwärts bald sehr vereinzelt und 0. Flocken der Hülle 0, an den Kopfstielen mäßig, am Stengel tief herab zerstreut, auf den oberen Blättern besonders am Rande, aber auch sonst unterseits spärlich bis zerstreut, oberseits 0.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Joch über dem Dorfe Kalà 5. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 30 part.).

H. svaneticum gehört in die nähere Verwandtschaft des *H. silesiacum Krause* und damit zu einer Gruppe meist südosteuropäischer und orientalischer Sippen, die sich besonders durch die Beschaffenheit ihrer Köpfchenhüllen sehr auszeichnen. Von bekannteren hierhergestellten Pflanzen seien nur *H. Grisebachii Kern.*, *sparsum Friv.*, *Baumgartenianum Schur*, *Kotschyanum Heuff.* genannt, neben welche eine kleine Anzahl von Boissier und von Freyn beschriebener Arten tritt. Diese Pflanzen sind einander auch im äußeren Ansehen zwar ziemlich ähnlich, doch werden sie nicht, wie so zahlreiche andere Hieracienspecies, durch Zwischenformen mit einander verbunden, auch waren mir bisher weder Uebergänge noch Bastarde mit anderen Arten bekannt. Es handelt sich hier also um gut begrenzte und gewiß sehr alte Species. Das vorliegende *H. svaneticum* macht nun in verschiedenen Beziehungen eine Ausnahme, denn die unten beschriebenen, mit ihm am gleichen Orte in nur einzelnen Exemplaren gefundenen und anderwärts nicht beobachteten *H. strictissimum*, *simplicicaule*, *corymbulosum* und *pseudosvaneticum* sind meines Erachtens als Bastarde desselben anzusehen, und zwar

H. pseudo-svaneticum als H. svaneticum > silvaticum,
H. strictissimum als H. svaneticum — prenanthoides,
H. simplicicaule als H. svaneticum < prenanthoides,
H. corymbulosum als H. svaneticum — tridentatum.

Damit wünsche ich aber durchaus nicht zu sagen, daß etwa gerade das typische *prenanthoides* oder *tridentatum* hier die Eltern gewesen sind; vielmehr ist anzunehmen, daß z. B. bei der Entstehung des *H. strictissimum* eher *H. lanceolatum Vill.*, bei derjenigen des *H. simplicicaule* eher das oben als zweifelhaft zu *H. strictum Fr.* gestellte Hieracium mitgewirkt hat, die ebenfalls auf dem Latpari vorkommen. Mit welcher *tridentatum*-ähnlichen Sippe *H. svaneticum* sich gekreuzt haben mag, wage ich nicht zu entscheiden, da in der hier zur Bearbeitung gegebenen Sammlung keine derartige Pflanzen enthalten sind. Dabei ist aber zu bemerken, daß immerhin auch eine Kreuzung des *H. svaneticum* mit *H. constrictum* oder *H. glareosum* ein Ergebniss wie *H. corymbulosum* haben könnte.

Mit den *Vulgata*, zu denen Sommier und Levier meinten ihr *H. svaneticum* stellen zu können, hat dieses gewiß nicht so viel Gemeinsames wie mit der *Pseudostenotheca.* Seine nächsten Verwandten sind, wie ganz unzweifelhaft aus der Configuration des Kopfstandes und der Involucra hervorgeht, *H. silesiacum* und *H. Kotschyanum.* Zutreffender ist daher die von den genannten Forschern gemachte Bemerkung, daß *H. svaneticum* durch einige Merkmale dem *H. macrolepis Boiss.* sich nähere, das ebenfalls wohl in diese Gruppe gehört.

28. H. Baumgartenianum Schur * subsimplex Somm. et Lev. l. c. p. 94. — Steht der Schur'schen siebenbürgischen Pflanze sowohl im Aufbau wie in den minder hervortretenden Merkmalen sehr nahe. Blätter in grundständiger Rosette 3—4, ansehnlich (die längsten c. 11 cm), hellgrün[1], dünn, lanzettlich-länglich, in den Stiel verschmälert (letzterer $^1/_3$—$^1/_1$ so lang als die Spreite), ± spitz, fast ganzrandig, nur entfernt-klein-gezähnelt; Stengelblätter 2—3, rasch an Größe abnehmend, lanzettlich, schmal-sitzend, oberstes roth verfärbt, lineal. Stengel 18—25 cm hoch, dünn, aufrecht, gerade, röthlich, unverzweigt, am Ende einige wenige genäherte Köpfchen tragend. Kopfstand rispig, gedrängt, aber zuweilen ein abgerückter Ast aus der Achsel des obersten Stengelblattes, 2—3-köpfig; Ordnungen 2; Akladium 5—10 mm lang; Kopfstiele sehr kurz. Hülle 10—12 mm lang, cylindrisch-oval mit gerundeter Basis; Schuppen wenig zahlreich, rasch an Länge zunehmend, daher sehr ungleich lang, breitlich, schwärzlich, kaum berandet, langgespitzt, am Ende spitzlich. Bracteen fast pfriemlich, dunkel. Blüthen gelb, ihre Zähnchen kahl[2]), Narben dunkel, Früchte braun,

1) Die Autoren sagen „glauco-virens".

2) Nach Somm. et Lev. „apice villosula", was ich nicht so sehe; die Blüthen finde ich an der Spitze nur mit fast mikroskopischen Papillen versehen.

4 mm lang, Pappus etwas bräunlich-weiß, hell. Haare an Hülle und Kopfstielen 0, am Stengel zerstreut, nur ganz unten ziemlich reichlich, dort weich, hell, bis 1 mm, hier etwas steifer, 2—3 mm lang, auf den Blättern oberseits zerstreut, unterseits zahlreicher, am Hauptnerv und Rande und besonders am Stiel reichlich, weich, 2—3(—4) mm lang. Drüsen klein, an der Hülle und ganz oben an den Caulomen spärlich, sonst 0. Flocken der Hülle 0, an den Caulomen spärlich, auf den Blättern oberseits 0, unterseits auf der Fläche und besonders am Mittelnerv ± zerstreut, überall sehr klein.

Vorkommen. — Abchasien: am Klukhor-Pass im Hochthal Kliutsch auf Granitfelsen c. 2200 m, 27. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 42).

Der von Sommier und Levier l. c. ausgesprochenen Ansicht, daß *H. subsimplex* zu den *Villosina* gehöre, kann ich nicht beistimmen. Denn die Configuration der Hülle und des Kopfstandes weist die Pflanze so entschieden zu den *Pseudostenotheca*, daß dieselbe mir dem siebenbürgischen *H. Baumgartenianum Schur* gegenüber nicht einmal als Unterart hervortritt. Auch habituell kann *H. subsimplex* mit den *Villosinen* nicht verglichen werden, eher noch hat es den Wuchs mancher Formen, die zu *H. dentatum Hoppe* gehören.

Zusammen mit *H. subsimplex* kommt das unten erwähnte *H. erythrocarpum* vor, das nur in 1 Stück vorliegt und mir ein Bastard von der Formel *subsimplex* + *silvaticum* zu sein scheint.

M. Prenanthoidea-Tridentata.

29. H. constrictum Arv-Touv. — vielleicht nicht völlig identisch mit der so benannten Pflanze, wie nachstehende Beschreibung zeigt.

Stengel aphyllopod, sehr hochwüchsig (c. 95 cm), derb, beblättert, mit ziemlich gleichen Internodien, von der Mitte aufwärts verzweigt, untere Aeste sehr kurz und steril, obere verlängert, beblättert und am Ende einige Köpfchen tragend; Kopfstand daher zusammengesetzt, eine große Rispe bildend [1]), so auch im oberen gleichgipfeligen Theil; Akladium 1,5—2 cm lang, Kopfstiele dünn, Strahlenordnungen 3(—4), Köpfchen zahlreich. Hülle 8—9 mm lang, cylindrisch mit gerundeter dann gestutzter Basis; Schuppen schmal, stumpflich, schwärzlich, schmal hellrandig; Bracteen pfriemlich, grau. Blüthen hellgelb, Zähnchen reichlich

---

1) Bei unserer Pflanze sind in der oberen Hälfte des Stengels immer je 2 Blätter, und damit auch die betr. Aeste, so genähert, daß sie einander fast gegenüberstehen.

bewimpert. Blätter zahlreich, hellgrün, weich, von unten nach oben allmählich descrescirend bis zu den obersten Verzweigungen hin, am Stengelgrunde zur Blüthezeit bereits abgewelkt und verschwunden, die untersten vorhandenen länglichlanzettlich, in den breiten Stiel verschmälert, spitzlich, am Rande grob gesägt mit wenigen Zähnen, mittlere mit verschmälerter, folgende mit breiter, endlich mit herzförmiger Basis sitzend, die mittleren in der unteren Hälfte ihrer Spreite ± deutlich geigenförmig geschweift, diese wie die obersten mit zahlreicheren aber kleineren Zähnen am Rande; auch die Aeste sind mit kleineren, herzförmig sitzenden lanzettlichen Blättchen besetzt. Haare an Hülle und Kopfstand, 0, jedoch an den Caulomen schon hoch oben ziemlich reichlich, hell, weich, 1—1,5 mm, etwa in der Stengelmitte verschwindend, auf den Blättern beiderseits besonders gegen den Rand hin zerstreut, weich, 1,5 mm, am Rande und unterseits am Mittelnerv ziemlich reichlich, 1 mm lang. Drüsen an Hüllen und Kopfstielen sehr reichlich, dunkel, unter den obersten Auszweigungen der letzteren sehr bald 0. Flocken der Hülle spärlich, an den Kopfstielen reichlich, an den Caulomen abwärts bald verschwindend.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Joch zwischen den Flüssen Hippus und Ingur über dem Dorfe Kalà 5. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 24).

Steht unverkennbar den *Prenanthoidea* nahe (vergl. Verzweigung, Blattform, Drüsenbekleidung der Inflorescenz, Wimperung der Blüthen, Köpfchenhülle), neigt aber durch Beblätterungsweise Wuchs und Bezahnung der Blätter auch deutlich zu den *Tridentata* hin.

N. Prenanthoidea-Sabauda.

30. **H. glandulosissimum n. sp.** — Stengel sehr kräftig, aufrecht, 90 cm hoch, verbogen, gestreift, fest, aphyllopod, reich mit ansehnlichen Blättern besetzt, in den oberen $^2/_5$ verzweigt; Aeste etwas verlängert, kleinbeblättert, mit endständigen rispigen Sträußchen und nebst den Auszweigungen der Stengelspitze eine sehr große reichköpfige· breitcylindrische Inflorescenz bildend. Blätter zahlreich, sattgrün, etwas derb, nach oben langsam decrescirend bis zu den obersten Zweigen, alle etwas wellig (obere verbogen), ganzrandig, nur mit zerstreuten sehr kleinen Zähnchen am Rande, Nervatur unterseits ziemlich stark hervortretend; die untersten Stengelblätter zur Blüthezeit abgewelkt, die ersten grünen c. 10 cm über der Stengelbasis, länglich, abwärts in die geöhrt-umfassende Basis breit herablaufend, spitzlich, mittlere

kürzer und breiter, ± elliptisch aus herzeiförmigem Grunde, geöhrt-umfassend, spitz, obere herzförmig, zugespitzt. Kopfstand sehr reichköpfig-rispig, besonders nach oben hin sparrig, Kopfstiele schlank, alle Aeste nur gegen die Spitze hin verzweigt, Strahlenordnungen 4(—5). Bracteen krautig, ± herzförmig und lang zugespitzt. Hülle 10 mm lang, zuerst cylindrisch, dann eiförmig mit gerundeter später gestutzter Basis. Schuppen breitlich, lanzettlich-lineal, stumpf, schwärzlich mit schmalen grünlichen Rändern. Blüthen hellgelb, Zähnchen ungewimpert, nur spärlich papillentragend, Narben grau. Früchte braun, 3,5 mm lang. Haare der Hülle sehr spärlich, von den Drüsen kaum unterscheidbar, an den oberen Kopfstielen 0, am Stengel bald zerstreut, bis zum Grunde langsam an Zahl zunehmend, weich, hell, 3—4 mm lang, auf den Blättern beiderseits gegen Spitze und Rand hin zerstreut oder spärlich, weich, 1 mm, am Rande selbst ziemlich reichlich, 1—2 mm lang. Drüsen an Hülle und Kopfstielen sehr reichlich, dunkel, am Stengel abwärts bald stark vermindert und verschwindend. Flocken der Hülle nur am Grunde mäßig, an den Kopfstielen graulichen Filz bildend, am Stengel oben bald sehr vermindert und noch im oberen $^1/_3$ verschwindend, auf den oberen Blättchen beiderseits ziemlich reichlich bis zerstreut, auf den unteren 0.

Vorkommen. — Abchasien: am Flusse Kliutsch c. 1500 m, 26. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 32).

Im Kopfstande und Indument mit den *Prenanthoidea* übereinstimmend, in Beblätterung und Blattform den *Sabauda* näher.

31. H. valesiacum Fr. — Nur 1 Exemplar, mit rispiger 4-köpfiger Inflorescenz. Mittlere Stengelblätter aus breitem sitzendem Grunde länglichlanzettlich, sehr spitz, scharf gesägt mit wenigen Zähnen. Hülle c. 10 mm lang, Schuppen breitlich, stumpflich, sehr armhaarig und spärlich drüsig. Kopfstiele graufilzig, ohne Haare und Drüsen. Blüthenzähnchen kahl.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Passe Latpari zwischen den Flüssen Hippus und Ingur, in der Waldregion, 3. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 35).

32. H. lycopifolium Froel. — Ganz wie die mitteleuropäische Pflanze. Der obere Theil, besonders der Kopfstand, durchaus an die *boreale*-ähnlichen *Accipitrina* sich anlehnend, aber in der Form, Anheftungsweise und Nervatur der mittleren Blätter auch an die *Prenanthoidea* erinnernd.

Vorkommen. — Svanetien: zwischen dem Dorfe Ipar und dem zum Mujal führenden Joche, 10. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 23);

— Abchasien: am Flusse Kliutsch c. 1200 m, 26. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 37).

O. Tridentata-Umbellata.

33. **H. glareosum Serres.** — Stengel bis 120 cm hoch, aphyllopod, reich beblättert, in der oberen 20 cm in ruthenartige büschelig zusammengeordnete Aeste verzweigt. Inflorescenz ziemlich reichköpfig, übergipflig. Hülle c. 10 mm lang, mit zuerst zwar in den Stiel herabgezogener, bald aber sehr gestutzter Basis; Schuppen breitlich, am Ende ± stumpf, dunkel, die äußeren kurzen ± locker abstehend. Blätter lanzettlich, verschmälert-sitzend, spitz, ± gesägt mit mehreren kleinen gleichen seltener gröberen und ungleichen Zähnen, lebhaft grün, aufwärts sehr langsam decrescirend bis in den Kopfstand hinein. Behaarung am oberen Theil der Pflanze 0, auch an den Blättern nur spärlich, im unteren Theil an Stengel und Blättern bis mäßig, hell, 2 mm lang, überall jedoch an Caulomen und Phyllomen kleine Stachelhärchen ± zahlreich vorhanden. Drüsen an der Hülle zerstreut, im Kopfstande vereinzelt, sonst 0. Flocken an der Hülle mäßig, an den Kofstielen sehr reichlich, am Stengel fast bis zum Grunde gehend, auch auf den oberen Blättern zerstreut.

Vorkommen. — Svanetien: am Flusse Nakra in Wäldern, 17. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 21).

Nach den Exemplaren in meinem Herbarium gehört die vorstehend beschriebene sehr stattliche Pflanze in die Nähe von *H. glareosum*, doch ist sie reicher behaart. Sie dürfte als ein *H. tridentatum-umbellatum* zu deuten sein. Vom ersteren hat sie u. a. die Inflorescenz, Blattgestalt, Flockenbekleidung, vom letzteren die lockeren äußeren Hüllschuppen, den Blattreichthum, den hohen Wuchs.

34. **H. longissimum n. sp.** — Sehr hochwüchsig, aphyllopod, reich beblättert, mit großem endständigem unbegrenztem vielköpfigem Strauss; Blätter lanzettlich, starkgesägt, sitzend; Kopfstand rispig, Köpfchen mittelgroß, mit schmalen dunkeln Hüllschuppen.

Stengel über 170 cm hoch, aufrecht, kräftig, fest, ziemlich gerade, feingestreift, nur ganz unten roth überlaufen, mit zahlreichen gleichmäßig vertheilten, aufwärts sehr allmählich kleiner werdenden Blättern, die in die Bracteen des Kopfstandes übergehen. Blätter an den unteren 50 cm des Stengels zur Blüthezeit abgewelkt, soweit erkennbar mit längerem stielartigem Theil, mittlere und obere Stengelblätter mit verschmälerter Basis sitzend,

lanzettlich, spitz, grobgesägt jederseits mit c. 6 vorwärts gerichteten Zähnen, derb, unterseits etwas vortretend-geadert, am Rande ein wenig nach unten umgebogen; die obersten sind wellig und verbogen, langspitzig-zugespitzt. Kopfstand groß, sehr locker rispig, mit zahlreichen zerstreuten Aesten, die sich in ihrer oberen Hälfte weiter verzweigen; alle Stützblättchen bracteenartig, pfriemlich, grau; Kopfstiele schlank, Ordnungen 3(—4). Hülle 10 mm lang, eiförmig, ein wenig in den Stiel herabgezogen, später etwas niedergedrückt, Schuppen ziemlich schmal, stumpflich, dunkel, sehr schmal heller berandet, äußere kurz und locker; einige Bracteen unter den Köpfen; Akladium 1,5—2,5 cm lang. Blüthen gelb, Zähnchen kahl; Narben dunkel. Früchte sattbraun, 3 mm lang, Pappus hellbräunlich. Haare an Hülle, Kopfstielen und dem oberen Drittel des Stengels 0, dann zerstreut, endlich mäßig zahlreich bis fast zum Grunde, weich, hell, 1—2 mm, auf den Blättern spärlich, auf den unteren besonders unterseits und am Rande bis mäßig zahlreich, weich, dünn, 1—2 mm lang, oberseits auch hier nur gering entwickelt. Drüsen an der Hülle sehr spärlich bis zerstreut, sehr klein, sonst überall 0. Flocken der Hülle zerstreut, an den Kopfstielen reichlich, am Stengel abwärts langsam vermindert, auf den Blättern unterseits und am Rande ± zerstreut, oberseits 0.

Vorkommen. — Svanetien: am Flusse Nakra, 18. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 22).

Steht dem *H. tridentatum* noch näher als das vorige, zeigt aber auch die Merkmale von *H. umbellatum* noch deutlich in den Hüllschuppen, in Beblätterung und Wuchs.

P. Pseudostenotheca-Vulgata.

35. H. pseudo-svaneticum n. sp. — Am phyllopoden Stengelgrunde sind nur wenige Blätter erhalten, die kleineren langgestielt, elliptisch, spitz, fast ganzrandig, aber mit entfernten winzigen Zähnchen am Rande, das größte 19 cm lang, lanzettlich, in den Grund verschmälert, spitz, ebenso gezähnt, alle weich, hellgrün; am Stengel 2 rasch decrescirende Blätter, höher oben nur noch ± pfriemliche Bracteen. Stengel c. 48 cm hoch, aufrecht, schlank, hohl, feingestreift, vom Grunde ab verästelt, seine beiden unteren Internodien gleichlang (c. 15 cm), länger als die oberen; Aeste sehr verlängert und sehr schlank, 2—3blättrig, an der Spitze einige Köpfchen tragend, die obersten Aeste näher beisammenstehend, sehr locker rispig verzweigt; Ordnungen 4, Strahlen 2. Ordnung an der ganzen Pflanze 6; Akladium (3—)5—8 mm lang. Hülle 8 mm

lang, oval mit gerundeter Basis; Schuppen wenig zahlreich, von außen nach innen rasch an Größe zunehmend, schmal, ziemlich spitz, schwarz, sehr schmal heller berandet. Bracteen wenige, pfriemlich, dunkel. Blüthen citrongelb, Narben graulich. Haare der Hülle spärlich, dunkel, 1 mm, an den Caulomen überall ziemlich reichlich, hell, weich, 2 mm, auf den Blättern beiderseits zerstreut bis ziemlich zahlreich (jüngere Rosettenblätter), 2 mm, sehr weich, am Rande ziemlich reichlich, 1 mm lang. Drüsen der Hülle reichlich, dunkel, an den Kopfstielen oben mäßig, sehr bald zerstreut und verschwindend. Flocken nur am Grunde der Hülle mäßig, an den Kopfstielen ebenso, am Stengel ziemlich weit herab zerstreut, auf dem Mittelnerv des Blattrückens spärlich, oberseits 0.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Pass zwischen den Flüssen Hippus und Ingur über dem Dorfe Kala, 5. VIII. 1890 in Gesellschaft des *H. svaneticum* (Herb. S. L. No. 30).

Steht dem *H. svaneticum* nahe, mit welchem es die Verzweigungsweise, die Beblätterung und die Anordnung des Kopfstandes theilt, jedoch sind die Blätter breiter, die unteren deutlich langgestielt, die Zahl der Stengelblätter ist geringer, die Verästelung des Kopfstandes ist keine ungewöhnliche, die Köpfe sind kleiner, die Schuppen der Hülle schmaler und spitzer: Merkmale, die insgesammt auf *H. silvaticum* und auf hybride Abstammung von der Formel *H. svaneticum* > *silvaticum* hinweisen. Früchte sind an dem einzigen eben blühenden Exemplar noch nicht entwickelt.

Es liegt noch ein Exemplar einer anderen Pflanze vor, welche ebenfalls die Eigenschaften der *Pseudostenotheca* und *Vulgata* in sich vereinigt, doch ist dasselbe offenbar ein wenig kräftiges, so daß es etwas zweifelhaft bleibt, ob Beblätterung und Verzweigung immer so sind wie unten beschrieben. Wegen der auffallend rothen Früchte nenne ich diese Pflanze

36. **H. erythrocarpum n. sp.** — Phyllopod, Rosette mehrblättrig. Stengel c. 26 cm hoch, schlank, etwas verbogen, 2blättrig, die beiden gleichlangen längsten Internodien in der Mitte, nur an der Spitze verzweigt, hier rispig-wenigköpfig. Blätter elliptisch oder länglich, nicht groß, gestielt, Spreite in den Stiel herablaufend, spitzlich, am Rande nur mit sehr kleinen Zähnchen oder mit einigen gröberen Sägezähnen; auch die Stengelblätter sind kurz gestielt, das obere ist viel kleiner als das untere. Kopfstand sehr locker, gleichgipflig, 4(—5)köpfig, Strahlen 2. Ordnung 2, Ordnungen 3(—4). Hülle c. 11 mm lang, kurz cylindrisch, dann etwas niedergedrückt; Schuppen nicht zahlreich, schmal, langgespitzt, sehr spitz, schwärzlich, kaum berandet. Bracteen pfriemlich, grau.

Blüthen hellgelb, Narben gleichfarbig; reife Früchte roth, c. 3 mm lang. Haare an Hülle, Kopfstielen und Stengel oben 0, am letzteren von der Mitte abwärts spärlich, hell, weich, 0,5—1 mm, auf den Blättern beiderseits zerstreut, auch am Rande nur mäßig zahlreich, weich, 1(—2) mm lang. Drüsen an der Hülle reichlich, dunkel, an den Kopfstielen nur ganz oben mäßig, abwärts bald sehr zerstreut und verschwindend. Flocken am Grunde der Hülle zerstreut, an den Kopfstielen reichlich, am Stengel langsam vermindert, an den Grundblättern 0.

Vorkommen. — Abchasien: im Hochthal Kliutsch beim Passe Klukhor, 28. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 38).

Steht dem *H. silvaticum* näher als das vorige und weist, da es mit *H. subsimplex* (siehe oben pag. 38) zusammen wächst, eher auf eine hybride Abstammung von diesem hin.

Q. Pseudostenotheca-Prenanthoidea.

37. H. strictissimum n. sp. — Aphyllopod, die unteren Blätter zur Blüthezeit verwelkt. Stengel ca. 68 cm hoch, aufrecht, steif, gerade, fest, gestreift, einfach, an der Spitze locker-rispig verzweigt, mit zahlreichen Blättern ziemlich gleichmäßig besetzt. Blätter langsam decrescirend, untere lanzettlich, lang in den Stiel herablaufend, spitzlich, mittlere mit ± herzförmiger Basis umfassend-sitzend, mit öfters etwas geigenförmig eingezogenen Rändern, langspitzig-spitz, obere aus herzförmigem Grunde lang zugespitzt, alle gelbgrün, steiflich, aufgerichtet, ± wellig, am Rande gesägtgezähnt mit wenigen Zähnen bis fast ganzrandig, unterseits deutlich netzaderig. Kopfstand undeutlich begrenzt, sehr locker, gleichgipflig, fast ebensträußig; Strahlen 2. Ordnung 6—7, entfernt, sehr schlank, schief abstehend, steif; Ordnungen 3(—4); Kopfzahl 12—15; Akladium 4—6(—10) mm lang, mit einigen schwärzlichen fädlichen Bracteen. Hülle 11 mm lang, eiförmig, am Grunde in den oben etwas verdickten Stiel herabgezogen, später mehr gerundet; Schuppen ziemlich zahlreich, etwas breitlich, stumpflich, fast schwarz, schmal heller berandet, die äußersten locker. Blüthen etwas hellgelb, Zähnchen ungewimpert, nur mit einigen winzigen Papillen besetzt, Narben dunkel. Früchte hellbraun, 4 mm lang. Haare der Hülle vereinzelt, dunkel, 1 mm, an den Kopfstielen und am Stengel 0, erst im unteren Viertel des letzteren mäßig zahlreich, weich, hell, 2 mm, auf den Blättern oberseits 0, unterseits am Hauptnerv und am Rande mäßig bis ziemlich reichlich, weich, 2 mm lang. Drüsen der Hülle mäßig, an den Kopfstielen spärlich, abwärts bald vereinzelt und nicht unter

den Kopfstand herabgehend. Flocken an der Hülle 0, an den Kopfstielen oben reichich, abwärts rasch vermindert und bald 0.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Paß zwischen den Flüssen Hippus und Ingur, c. 2100 m, 4. VIII. 1890 (Herb.S. L. No. 31).

Erinnert sehr an *H. lanceolatum Vill.*, dessen Wuchs es hat, jedoch steht es auch dem *H. svaneticum*, mit dem es gemeinsam vorkommt, namentlich durch die Köpfchenhüllen und das Indument nahe, so daß hier sicherlich eine Uebergangsform, wahrscheinlich ein Bastard beider genannter Arten vorliegt.

38. H. simplicicaule Somm. et Lev. in Nuovo Giorn. botan. ital. II 1895 p. 93 pro *? var. H. svanetici.* — Stengel c. 50 cm hoch, am Grunde etwas aufsteigend, schlank, gerade, hohl, fast glatt, beblättert, unverzweigt, mit endständiger wenigköpfiger Inflorescenz. Grundblätter zur Blütezeit fast sämmtlich abgewelkt; Stengelblätter 7, allmählich decrescirend, gleichmäßig vertheilt, unterste lang in den Stiel herablaufend, länglichlanzettlich, spitz, mittlere mit breiter, obere mit fast herzförmiger Basis sitzend, ebenso, alle ± entfernt-gesägt-gezähnt, Zähne klein, Kopfstand rispig, mit 5 ausgebildeten und einigen rudimentären Köpfchen, kurzästig, Aeste 3, dünn, Ordnungen 3, Akladium 3 mm lang. Hülle 11 mm lang, schlank cylindrisch, am Grunde herabgezogen; Schuppen die Blüthen im Knospenzustande um 2 mm überragend, wenig zahlreich, rasch an Grösse wachsend, die äußersten locker; die längsten sind schmal, am Ende selbst stumpflich, schwärzlich, sehr schmal heller berandet. Bracteen lineal, dunkel. Haare an Hülle und Kopfstielen zerstreut, schwarz, 1 mm, am Stengel oben ebenso, abwärts etwas zahlreicher, hell, weich, 3—4 mm, auf den Blättern oberseits zerstreut (untere) bis fast 0 (obere), unterseits etwas reichlicher, am Hauptnerv und Rande ziemlich zahlreich, sehr weich, 2—3 mm lang. Drüsen der Hülle und obersten Kopfstiele ziemlich reichlich, dunkel, abwärts bald verschwindend. Flocken fehlen überall.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari zwischen Hippus und Ingur in der Waldregion, 3. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 34).

Auch ich halte diese Pflanze mit Sommier und Levier für eine Hybride von der Formel *H. svancticum — prenanthoides.* Dagegen spricht freilich der völlige Mangel an Sternhaaren. Indessen läßt das einzige vorhandene Exemplar kaum weitere Schlüsse bezüglich der Stellung des *H. simplicicaule* zu.

R. Pseudostenotheca-Tridentata.

39. H. corymbulosum Somm. et Lev. mss. in herb. = *H. svaneticum var. corymbiferum Somm. et Lev.* in Nuovo Giorn. bot. ital.

II. 1895 p. 93. — Stengel am Grunde mit mehrblättriger Rosette von ansehnlichen langgestielten Blättern, c. 54 cm hoch, dick, hohl, aufrecht, fast gerade, gestreift, mehrblättrig (Internodien ziemlich gleichlang), im oberen Drittel verzweigt. Blätter gelbgrün, dünn; Grundblätter länglich, in den Stiel herablaufend, kurz zugespitzt, am Rande gesägt-gezähnt, jederseits mit 6—8 Zähnen, Stiel etwa = Spreite, längstes c. 16 cm; Stengelblätter c. 5, rasch decrescirend, den Grundblättern ähnlich, aber successive kürzer gestielt, oberste endlich schmal-sitzend, rasch in die pfriemlichen Bracteen der Inflorescenz übergehend. Kopfstand oben fast doldig, aber mit mehreren wenig verlängerten z. Th. weit abgerückten unteren Aesten, sehr locker, fast gleichgipflig; Akladium 10 mm lang, Strahlen 2. Ordnung in der Dolde c. 10, darunter noch 4, alle sehr schlank, schief aufrecht, erst gegen die Spitze hin verzweigt; Ordnungen 3—4, Kopfzahl etwa 35. Bracteen dunkel. Blüthen sattgelb. Hülle 10 mm lang, eiförmig, am Grunde in den Stiel vorgezogen; Schuppen ziemlich zahlreich, rasch an Länge zunehmend, vor dem Aufblühen die Blüthen um c. 2 mm überragend, etwas breitlich, langspitzig, am Ende selbst stumpflich, fast schwarz, sehr schmal heller berandet, die äußersten locker. Haare der Hülle spärlich, dunkel, von den Drüsenhaaren kaum unterscheidbar, an den Kopfstielen zerstreut, am Stengel überall ziemlich reichlich, hell, weich, 3—4 mm, auf den Blättern oberseits gegen den Rand hin, unterseits überall zerstreut, am Rande und Mittelnerv ziemlich reichlich, weich, 2 mm, am Blattstiel bis 4 mm lang. Drüsen dunkel, lang, an der Hülle reichlich, an den Kopfstielen ganz oben ziemlich reichlich, abwärts bald sehr spärlich und unter der Dolde nur noch vereinzelt, sonst 0. Flocken am Grunde der Hülle und an den Kopfstielen mäßig zahlreich, am Stengel weit herab langsam vermindert, auf den Stengelblättern unterseits am Hauptnerv zerstreut.

Vorkommen. — Svanetien: auf dem Latpari-Joch zwischen den Flüssen Hippus und Ingur über dem Dorfe Kalà, „zusammen mit *H. tridentatum*“, 5. VIII. 1890 (Herb. S. L. No. 29).

Steht deutlich intermediär zwischen *H. svaneticum* und *H. tridentatum*, wahrscheinlich Bastard derselben.

Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Februar 1898.

Die Anschauungen, welche von Coulomb, Ampère, Wilhelm Weber auf dem Gebiete der Elektricitätslehre entwickelt worden sind, wurden durch die von England ausgehende wissenschaftliche Entwickelung mehr und mehr in den Hintergrund gedrängt. In der That kann man darüber nicht im Zweifel sein, daß das ganze Gebiet der elektromagnetischen Erscheinungen durch die von Maxwell begründete, von Hertz vervollständigte Theorie des elektromagnetischen Feldes sehr viel einfacher und vollständiger dargestellt wird als durch die älteren Theorieen. Nur auf dem Gebiete der elektrolytischen Leitung, in der Theorie der Jonen, hat man es bequemer gefunden, mit den alten Anschauungen weiter zu operieren, obwohl einer Einführung der Maxwell'schen Ideen auch hier kein principielles Hinderniß im Wege steht. Es scheint aber, als ob die ältere Anschauung im Begriffe wäre, gerade von diesem Punkte aus sich wieder ein größeres Geltungsbereich zu erobern. Christiansen hat auf die Rolle der Jonen bei den Erscheinungen der Berührungs-Elektricität aufmerksam gemacht; Giese hat angenommen, daß die Elektricität auch im Inneren der Metalle an Jonen gebunden sei, und hat diese Anschauung auf die Elektricitätsleitung in Metallen und auf die Vorgänge in der Grenzschicht zweier Metalle angewandt. Auch H. A. Lorentz hat seiner Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern die Annahme von Jonen zu Grunde gelegt, welche in den Aether eingelagert sind; er sagt selbst, daß in seinen Annahmen in gewissem Sinne eine Rückkehr zu der älteren Elektricitätstheorie liege. Helmholtz hat

auf dieselbe Annahme seine Theorie der Farbenzerstreuung aufgebaut.

In diesem Zusammenhange gewinnen nun auch die Vorstellungen, welche Wilhelm Weber in verschiedenen Abhandlungen über die Leitung der Elektricität in Metallen entwickelt hat, erneutes Interesse. Er nimmt an, „daß Metalle Körper sind, deren negativ elektrisch geladenen ponderabeln Moleküle von positiv elektrischen Molekülen umkreist werden, die sich aber nicht in beharrlicher Drehung um dieselben befinden, sondern in einer Drehung, welche in Wurfbewegung übergeht, wodurch diese positiv elektrischen Moleküle nach allen Richtungen zerstreut werden. — In Folge verschiedener Richtungen der Wurfbewegungen, durch welche der Uebergang dieser positiv elektrischen Moleküle von einem ponderabelen Moleküle zu den ponderabelen Nachbarmolekülen vermittelt wird, findet eine Vertheilung derselben auf alle ponderabelen Nachbarmoleküle statt, wie auch umgekehrt von allen ponderabelen Nachbarmolekülen ausgeworfene positiv elektrische Moleküle zum ersten ponderabelen Molekül gelangen“.

„Diese Wurfbewegung positiv elektrischer Moleküle von jedem ponderabelen zu allen ponderabelen Nachbarmolekülen und umgekehrt von allen diesen letzteren zu jenen ersteren wird mit dem Namen der wechselseitigen Strahlung bezeichnet. Fourier hat nachgewiesen, daß aus solcher wechselseitiger Strahlung zwischen allen ponderabelen Molekülen eines Wärmeleiters die Gesetze der Wärmeleitung sich ergeben, wodurch die Vertheilungs- und Bewegungserscheinungen der Elektricität mit den Vertheilungs- und Bewegungserscheinungen der Wärme aufs innigste mit einander verknüpft werden“.

Nach den Anschauungen von Weber ist die metallische Leitung ihrem Wesen nach nicht allzu verschieden von der elektrolytischen; seine Anschauungen berühren sich in diesem Punkte mit Ansichten, die in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten ausgesprochen worden sind. Es liegt daher nahe, Betrachtungen, welche sich auf dem Gebiet der Elektrolyse als zutreffend erwiesen haben, auf die Leitung der Elektricität und der Wärme in Metallen zu übertragen. Ein Versuch hierzu ist in der folgenden Mittheilung gemacht; er ist in mehrfacher Beziehung unvollkommen und unbefriedigend geblieben, und ich kann nur wünschen, daß andere Forscher um eine bessere und weitere Führung des eingeschlagenen Weges sich bemühen möchten.

Die Grundlagen der Untersuchung mögen von vornherein

dahin erweitert werden, daß in dem Raume zwischen den ponderabelen Molekülen nicht blos positive, sondern auch negative elektrische Theilchen in Bewegung angenommen werden. Sofern im Inneren eines Leiters keine freie Elektricität sich befindet, muß in jedem Volumelement die Summe der positiven Ladungen ebenso groß sein, wie die Summe der negativen. Das bedingt aber nicht, daß die Zahl der positiven elektrischen Theilchen, welche in dem Zwischenraume zwischen den ponderabeln Molekülen frei sich bewegen, ebenso groß sei, wie die Zahl der negativen Theilchen. Selbst wenn die elektrische Ladung der einzelnen positiven und der einzelnen negativen elektrischen Theilchen ihrem absoluten Betrage nach dieselbe ist, kann eine gewisse Zahl z. B. von positiven elektrischen Theilchen gebunden sein an die ponderabelen Moleküle, so daß die Zahl der beweglichen positiven Theilchen kleiner ist, als die der beweglichen negativen Theilchen. Auf Grund dieser Annahme wollen wir nun zunächst die folgenden allgemeinen Bezeichnungen einführen.

t, Temperatur in Graden Celsius.

T, absolute Temperatur.

$l_p = l_p^0(1-\beta t)$, mittlere Weglänge der positiven elektrischen Theilchen.

$l_n = l_n^0(1-\beta t)$, mittlere Weglänge der negativen elektrischen Theilchen.

$u_p = c_p\sqrt{T}(1+\delta t)$, Geschwindigkeit der positiven elektrischen Theilchen.

$u_n = c_n\sqrt{T}(1+\delta t)$, Geschwindigkeit der negativen elektrischen Theilchen.

$\tau_p = l_p/u_p$, Zeit, in welcher ein positives elektrisches Theilchen seine mittlere Weglänge durchläuft.

$\tau_n = l_n/u_n$, Zeit, in der ein negatives elektrisches Theilchen seine mittlere Weglänge durchläuft.

$\varkappa\tau_p$, Zeit zwischen dem Beginn zweier geradliniger Wegstrecken eines positiven Theilchens.

$\varkappa\tau_n$, Zeit zwischen dem Beginn zweier geradliniger Wegstrecken eines negativen Theilchens.

$P = P_0(1+\alpha t)$, Zahl der beweglichen positiv elektrischen Theilchen in der Volumeinheit.

$N = N_0(1+\alpha t)$, Zahl der beweglichen negativ elektrischen Theilchen in der Volumeinheit.

ε, elektrische Ladung der positiven, und der negativen elektri-

schen Theilchen, ihrem absoluten Werth nach in elektrostatischem Maaße.

$\mathfrak{A}$, mechanisches Aequivalent der Wärme.

v, Lichtgeschwindigkeit.

1. Wärmeleitung.

Die Rechnungen, welche zu den Gesetzen der Wärmeleitung führen, sind denen analog, welche ich in meiner Molekulartheorie der Diffusion und der Elektrolyse [1]) angestellt habe. Wir setzen voraus, daß das Metall in die Form eines Cylinders gebracht sei, dessen Axe wir zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen, die Temperatur nehme in der Richtung der z-Axe zu, und sei lediglich abhängig von der z-Coordinate. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{W}$ die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch ein cm^2 hindurchgeht, dessen Fläche gegen die z-Axe senkrecht steht, so ergiebt sich das Gesetz der Wärmeleitung in der Form:

1) $$\mathfrak{W} = -k\frac{dT}{dz}.$$

Es ergiebt sich aber weiter, daß dieser Wärmestrom verbunden ist mit einem galvanischen Strom, dessen Stärke in elektromagnetischem Maaße und bezogen auf die Einheit des Querschnittes gegeben ist durch:

2) $$j = -\omega k\frac{dT}{dz}.$$

Der Coëfficient der Wärmeleitung k ist gegeben durch:

3) $$k = \frac{3}{4\mathfrak{A}k}\left\{\mu_p P_0 c_p^3 l_p^0 + \mu_n N_0 c_n^3 l_n^0\right\}\sqrt{T}$$
$$\times\left\{1 + (\alpha - \beta + 3\delta)t + \tfrac{2}{3}(\alpha + 3\delta)T\right\}.$$

Eliminieren wir aus der Gleichung 2 den Differentialquotienten dT/dz, so kommt sie auf die Form:

4) $$j = \omega\mathfrak{W};$$

die Stärke des galvanischen Stroms ist der des Wärmestromes proportional; den Faktor ω bezeichnen wir als Mitführungszahl für Elektricität; wir erhalten dann:

1) Zeitschrift für physikalische Chemie 1890. VI S. 564.

$$\omega = \frac{1}{6\varkappa} \cdot \frac{\varepsilon}{v} \cdot \frac{P_0 c_p l_p^0 - N_0 c_n l_n^0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}$$

5)
$$\times \{1 + (\alpha - \beta + \delta)t + 2(\alpha + \delta)T\}.$$

Die mit dem Wärmestrom verbundene galvanische Strömung beruht darauf, daß die positiven und die negativen elektrischen Theilchen von den wärmeren zu den kälteren Theilen des Metallcylinders mit verschiedener Geschwindigkeit diffundieren. An Stelle des komplicierten Vorganges, wie er in Wirklichkeit sich vollzieht, setzen wir eine gleichmäßige Verschiebung aller beweglichen positiv elektrischen Theilchen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}_p$, aller negativ elektrischen Theilchen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}_n$. Es ergiebt sich dann, daß diese Geschwindigkeiten dem Temperaturgefälle proportional sind;

$$\mathfrak{G}_p = -\mathfrak{g}_p dT/dz, \qquad \mathfrak{G}_n = -\mathfrak{g}_n dT/dz.$$

Die Faktoren $\mathfrak{g}_p$ und $\mathfrak{g}_n$ bezeichnen wir als specifische Verschiebungsgeschwindigkeiten der Elektricität durch Wärme. Es ergiebt sich:

$$\mathfrak{g}_p = \frac{1}{6\varkappa} c_p l_p^0 \frac{1}{\sqrt{T}} \{1 - (\beta - \delta)t + 2(\alpha + \delta)T\}$$

6)
$$\mathfrak{g}_n = \frac{1}{6\varkappa} c_n l_n^0 \frac{1}{\sqrt{T}} \{1 - (\beta - \delta)t + 2(\alpha + \delta)T\}.$$

Zwischen dem Produkte $k\omega$ und diesen specifischen Verschiebungsgeschwindigkeiten besteht die Beziehung:

7)
$$k\omega = \frac{\varepsilon}{v} \{P_0 \mathfrak{g}_p - N_0 \mathfrak{g}_n\} (1 + \alpha t).$$

2. Galvanische Strömung.

Ich habe die Rechnung in etwas anderer Weise ausgeführt als in dem analogen Falle der früher citierten Arbeit. Das Resultat stimmt in der allgemeinen analytischen Form mit dem früher erhaltenen überein; der Zahlenfaktor des analytischen Ausdruckes aber ist ein anderer. Da nun keine der Rechnungen als eine wirklich strenge zu betrachten ist, da bei jeder an Stelle der Verhältnisse, auf welche die Rechnung wirklich sich gründen sollte, einfachere gesetzt sind, so habe ich einen unbestimmten Zahlenfaktor x eingeführt und mir vorbehalten, denselben später

so zu bestimmen, daß die Ergebnisse der Rechnung mit denen der Beobachtung übereinstimmen.

Der Metallkörper habe wieder die Form eines Cylinders, in der Richtung der Axe wirke auf die Länge von 1 cm eine elektromotorische Kraft E, die in elektromagnetischem Maaße gemessen sein soll. Der Strom, ebenfalls in elektromagnetischem Maaße und bezogen auf die Einheit des Querschnittes sei i, dann ist:

8) $$i = \gamma E.$$

Der galvanische Strom ist verbunden mit einem Wärmestrom, der für die Einheit des Querschnittes gegeben ist durch:

9) $$\Omega = \eta\gamma E.$$

Die Leitungsfähigkeit in elektromagnetischem Maaße ist:

10) $$\gamma = \frac{x}{\varkappa}\,\frac{\varepsilon^2}{v^2}\left\{\frac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \frac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}\right\}\frac{1+(\alpha-\beta-\delta)t}{\sqrt{T}}.$$

Den galvanischen Strom können wir uns dadurch erzeugt denken, daß alle beweglichen positiv elektrischen Theilchen in der Richtung der Kraft E mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ verschoben werden, alle negativ elektrischen Theilchen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ entgegen der Richtung der elektromotorischen Kraft; die Geschwindigkeiten $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sind der elektromotorischen Kraft proportional;

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{u}E, \qquad \mathfrak{V} = -\mathfrak{v}E.$$

Die Faktoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ bezeichnen wir als die specifischen Wanderungsgeschwindigkeiten der beiden Elektricitäten im Strom. Man findet:

11) $$\mathfrak{u} = \frac{x}{\varkappa}\cdot\frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{l_p^0}{\mu_p c_p}\cdot\frac{1-(\beta+\delta)t}{\sqrt{T}}, \quad \mathfrak{v} = \frac{x}{\varkappa}\cdot\frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{l_n^0}{\mu_n c_n}\cdot\frac{1-(\beta+\delta)t}{\sqrt{T}}.$$

Zwischen den specifischen Wanderungsgeschwindigkeiten und der Leitfähigkeit besteht die Beziehung:

12) $$\gamma = \frac{\varepsilon}{v}\left\{P_0\mathfrak{u} + N_0\mathfrak{v}\right\}(1+\alpha t).$$

Der galvanische Strom i ist verbunden mit einem Wärmestrom, welcher der Stärke des galvanischen Stroms proportional ist. Setzen wir:

$$\Omega = \eta i,$$

so wird der Faktor η, die **Mitführungszahl für Wärme** durch den Strom:

$$13)\qquad \eta = \frac{x}{2\varkappa\mathfrak{A}}\,\frac{\varepsilon}{v}\,\frac{P_0 l_p^0 c_p - N_0 l_n^0 c_n}{\gamma}\sqrt{T}\{1+(\alpha-\beta+\delta)t\}.$$

3. Beziehungen zwischen den Constanten der Wärmeleitung und den Constanten der elektrischen Leitung.

Das Verhältniß zwischen den Leitfähigkeiten für Wärme und für Elektricität ist gegeben durch:

$$14)\qquad \frac{k}{\gamma} = \frac{3}{4\mathfrak{A}x}\cdot\frac{v^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\mu_p P_0 c_p^3 l_p^0 + \mu_n N_0 c_n^3 l_n^0}{\frac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \frac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}}\cdot T\{1+4\delta t + \tfrac{2}{3}(\alpha+3\delta)T\}.$$

Zwischen den specifischen Verschiebungsgeschwindigkeiten durch Wärme, $\mathfrak{g}_p$ und $\mathfrak{g}_n$, und den specifischen Wanderungsgeschwindigkeiten im Strome, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, bestehen die Beziehungen:

$$\frac{\mathfrak{g}_p}{\mathfrak{g}_n} = \frac{\mu_p c_p^2 \mathfrak{u}}{\mu_n c_n^2 \mathfrak{v}};$$

$$14')\qquad \mathfrak{g}_p = \frac{1}{6x}\cdot\frac{v}{\varepsilon}\,\mu_p c_p^2\{1+2(\alpha+\delta)T\}\cdot\mathfrak{u}$$

$$\mathfrak{g}_n = \frac{1}{6x}\cdot\frac{v}{\varepsilon}\,\mu_n c_n^2\{1+2(\alpha+\delta)T\}\cdot\mathfrak{v}.$$

Zwischen dem Coëfficienten der Fortführung von Elektricität durch Wärme, dem Coëfficienten der Fortführung von Wärme durch den Strom, den Leitungsvermögen für Wärme und für Elektricität besteht die Beziehung:

$$15)\qquad \omega\frac{k}{\gamma} = \frac{\mathfrak{A}}{3xT}\{1+2(\alpha+\delta)T\}\cdot\eta.$$

Aus den Erscheinungen der Thermoelektricität und der Peltierschen Wirkung folgt, daß zwischen den genannten Größen die einfachere Beziehung bestehen muß:

$$16)\qquad \omega\frac{k}{\gamma} = \frac{\mathfrak{A}}{T}\eta.$$

Darnach müssen die unbestimmt gelassene Zahl x und die Coëfficienten α und δ der Bedingung genügen:

16′)
$$x = \tfrac{1}{3}\left\{1 + 2(\alpha + \delta)T\right\}.$$

Bezeichnen wir den Werth, welchen $\omega \frac{k}{\gamma}$ für $t = 0$ besitzt, durch $\left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0$, so ist:

17)
$$\left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0 = \frac{v}{2\varepsilon} \frac{P_0 l_p^0 c_p - N_0 l_n^0 c_n}{\dfrac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \dfrac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}}$$

und:

18)
$$\omega \frac{k}{\gamma} = \left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0 (1 + 2\delta t).$$

4. Die Mitführungstheorie der Thermoelektricität.

Es sei ein Metalldraht von dem Querschnitte Eins gegeben, dessen Enden auf verschiedenen Temperaturen sich befinden, so daß er seiner Länge nach von einem Wärmestrom durchflossen wird. Wir schneiden aus dem Draht durch zwei Querschnitte ein Stück von der Länge dz heraus; die Temperaturzunahme vom Anfang bis zu dem Ende des Stückes sei dt; dann wird das Stück von einem galvanischen Strome durchflossen, der gegeben ist durch:

$$j = -k\omega \frac{dt}{dz}.$$

Dem entspricht eine auf das Element dz wirkende elektromotorische Kraft:

$$dE = -\omega \frac{k}{\gamma} dt.$$

Wir nehmen einen Ring, der aus zwei Metallen A und B zusammengelöthet ist. Die eine der beiden Löthstellen werde auf der konstanten höheren Temperatur t, die andere auf der konstanten tieferen Temperatur t_0 gehalten. Die Richtung z auf der Axe des Drahtes werde so bestimmt, daß sie an der heißen Löthstelle von dem Metalle B zu dem Metalle A geht. Für die thermoelektrische Kraft der Metalle A und B ergiebt sich dann der Ausdruck:

$$(AB)_{t_0}^{t} = \left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 - \left[\omega_B \frac{k_B}{\gamma_B}\right]_0\right\}(t-t_0)$$

19)

$$+\left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A - \left[\omega_B \frac{k_B}{\gamma_B}\right]_0 \delta_B\right\}(t^2-t_0^2).$$

Für die thermoelektrische Kraft des Metalles A gegen Blei ergiebt sich:

$$(APb)_{t_0}^{t} = \left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 - \left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0\right\}(t-t_0)$$

20)

$$+\left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A - \left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right] \delta_{Pb}\right\}(t^2-t_0^2).$$

Bezeichnen wir die thermoelektrischen Constanten des Metalles A durch a_A und b_A, so ist:

21) $$(APb)_{t_0}^{t} = a_A(t-t_0) + \frac{b_A}{2}(t^2-t_0^2),$$

und somit:

$$a_A = \left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 - \left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0$$

22)

$$b_A = 2\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A - 2\left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 \delta_{Pb}.$$

Hier ist:

$$\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 = \frac{v}{2\varepsilon}\left[\frac{P_0 l_p^0 c_p - N_0 l_n^0 c_n}{\frac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \frac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}}\right]_A,$$

$$\left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 = \frac{v}{2\varepsilon}\left[\frac{P_0 l_p^0 c_p - N_0 l_n^0 c_n}{\frac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \frac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}}\right]_{Pb}.$$

5. Die Peltiersche Wirkung.

Durch die Löthstelle zweier Metalldrähte A und B vom Querschnitte Eins gehe ein Strom von der Stärke i in der Richtung von B zu A. Es findet dann in der Löthstelle eine Wärmeabsorption statt, welche gegeben ist durch:

$$W = (\eta_A - \eta_B)\, i,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen 16 und 18, durch:

23)
$$W = \frac{T}{\mathfrak{A}}\left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 - \left[\omega_B \frac{k_B}{\gamma_B}\right]_0\right\} i$$
$$+ \frac{T}{\mathfrak{A}}\left\{2\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A t - 2\left[\omega_B \frac{k_B}{\gamma_B}\right]_0 \delta_B t\right\} i.$$

23′)
$$W = \frac{T}{\mathfrak{A}}\{a_A - a_B + (b_A - b_B)t\}\, i.$$

23″)
$$W = \frac{T}{\mathfrak{A}} \frac{d(AB)_{t_0}^{t}}{dt} i.$$

6. Der Thomsoneffect.

In einem geschlossenen Ringe, der aus einem Metalle hergestellt ist, werden zwei gegenüberliegende Stellen auf verschiedenen Temperaturen gehalten. Ein galvanischer Strom wird hier durch die Wärmeströmung nicht erregt werden. In jedem Elemente dz des Ringes muß somit eine elektromotorische Gegenkraft von der Stärke

$$dE = \omega \frac{k}{\gamma} dt$$

vorhanden sein. Nun werde in dem Ringe ein galvanischer Strom i erregt, etwa durch die von einem bewegten Magnetpol ausgehende Induktion. Wenn dieser Strom durch das Element dz hindurchgeht, so leistet er eine Arbeit vom Betrage:

$$dA = \omega \frac{k}{\gamma} i\, dt.$$

Nehmen wir an, daß diese Arbeit geleistet werde auf Grund der in dem Elemente dz enthaltenen Wärme, so findet in dz eine Wärmeabsorption statt:

$$dW = -\frac{1}{\mathfrak{A}} \omega \frac{k}{\gamma} i\, dt.$$

Andererseits wird dem Elemente dz durch den mit dem galvanischen Strom verbundenen Wärmestrom eine Wärmemenge zugeführt, welche gegeben ist durch:

$$d\Omega = (\eta' - \eta)\, i;$$

hier bezeichnet η' den Werth, welchen dieser Coëfficient in der

auf der höheren Temperatur befindlichen Endfläche von dz besitzt. Für den gesammten Zuwachs, welchen die Wärme des Elements dz in einer Sekunde erleidet, ergiebt sich:

24) $$d\mathfrak{W} = dW + d\Omega = \frac{T}{\mathfrak{A}} 2 \left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0 \delta\, i\, dt.$$

Bei **Blei** ist der Thomsoneffekt Null, somit:

25) $$\left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right] \delta_{Pb} = 0.$$

Die zweite der Gleichungen 22 nimmt somit die Form an:

26) $$b_A = 2\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right] \delta_A.$$

Der Thomsoneffekt für das Metall A ist dargestellt durch:

27) $$d\mathfrak{W} = \frac{T}{\mathfrak{A}} b_A\, i\, dt,$$

die **specifische Wärme der Elektricität** ist gegeben durch:

27′) $$\sigma = \frac{T}{\mathfrak{A}} b.$$

Eine Zusammenstellung der beobachteten und der nach Gleichung 27′ berechneten Werthe von σ ist in der folgenden Tabelle gegeben. Die benutzten Zahlen sind den in meinem „Lehrbuch der Experimentalphysik", II. Band, S. 320 und S. 325 gegebenen Tabellen entnommen.

	$\sigma \times 10^6$ beob.	$\sigma \times 10^6$ berechn.
Cd	10,2	32,8
Zn	3,6	18,3
Ag	1,8	11,4
Cu	0,6	7,2
Sn	−0,04	4,2
Al	−0,04	3,0
Pt	−6,0	−5,7.

7. Der thermoelektrische Kreis und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Wir betrachten einen thermoelektrischen Kreis, der aus den Metallen A und B gebildet sei; an der heißen Löthstelle fließt

der Strom von B zu A. Die hier erzeugte Wärmemenge ist:

$$W = -\frac{T}{\mathfrak{A}}\{a_A - a_B + (b_A - b_B)t\}i.$$

Die an der kalten Löthstelle entwickelte Wärmemenge ist:

$$W_0 = \frac{T_0}{\mathfrak{A}}\{a_A - a_B + (b_A - b_B)t_0\}i.$$

Die in irgend einem Elemente des Metalles A entwickelte Thomsonwärme ist:

$$d\mathfrak{W} = \frac{T}{\mathfrak{A}} b_A i\, dt,$$

Die in einem Element von B entwickelte:

$$d\mathfrak{W} = \frac{T}{\mathfrak{A}} b_B i\, dt.$$

Für die ganze Bewegung der Wärme gilt die Gleichung:

$$\frac{W}{T} + \frac{W_0}{T_0} + \int \frac{d\mathfrak{W}}{T} = 0.$$

8. Vorgänge an der Grenze zweier Metalle.

Die Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte zeigen, daß die Erscheinungen der Thermoelektricität vollständig erklärt werden können auf Grund der Annahme, daß jeder Wärmestrom einen galvanischen Strom, jeder galvanische Strom einen Wärmestrom mit sich führe; die Annahme von kontaktelektromotorischen Kräften an der Grenze zweier Metalle ist überflüssig. Man wird sich indessen fragen, ob die Existenz solcher Kräfte nicht als eine nothwendige Folge unserer Theorie erscheint.

Es ist mir nicht gelungen, diese Frage zu entscheiden; und es scheint fraglich, ob sie auf Grund der bisher benutzten Annahmen überhaupt gelöst werden kann, ob es zu diesem Zwecke nicht nothwendig ist, bestimmte Vorstellungen über die Wechselbeziehung zwischen den ponderabelen Molekülen und den elektrischen Theilchen hinzuzunehmen. Man übersieht im Allgemeinen, daß ein Gleichgewichtszustand in der Grenzfläche der beiden Metalle möglich ist, ohne daß daselbst elektrische Kräfte auftreten, ohne daß zwischen den beiden Metallen eine Spannungsdifferenz besteht. Es läßt sich aber nicht sagen, ob die hiezu nöthigen

Bedingungen in der Uebergangsschicht der beiden Metalle erfüllt werden können. Elektrische Kräfte allein sind jedenfalls nicht ausreichend, um das Gleichgewicht in der Grenzfläche zu erhalten. Ich habe einmal versucht, noch eine Temperaturdifferenz zwischen den beiden Metallen in die Rechnung einzuführen, andererseits habe ich die Annahme hinzugenommen, daß auf die elektrischen Theilchen in der Uebergangsschicht eine Kraft wirke, und zwar auf beiderlei Theilchen in demselben Sinne, deren Wirkungen in derselben Weise berechnet werden können, wie die elektrischer Kräfte. Aus der ersten Annahme ergiebt sich für die elektrische Kraft in der Uebergangsschicht der beiden Metalle der Ausdruck:

28) $$Z = \frac{\mu_p c_p^2 \mu_n c_n^2 T}{3 x \varepsilon (\mu_p c_p^2 + \mu_n c_n^2)} \frac{d}{dz} \log \frac{P}{N}.$$

Die zweite Annahme führt zu der Gleichung:

28′) $$Z = \frac{T}{6 x \varepsilon} \left\{ \mu_p c_p^2 \frac{d \log P}{dz} - \mu_n c_n^2 \frac{d \log N}{dz} \right\}.$$

Für die elektrostatische Potentialdifferenz $V_A - V_B$, sowie für die in elektromagnetischem Maaße gemessene elektromotorische Kraft (AB) an der Grenze der beiden Metalle A und B ergeben sich die entsprechenden Formeln:

$$(AB) = v(V_A - V_B)$$

29) $$(AB) = -\frac{v}{3 x \varepsilon} \frac{\mu_p c_p^2 \mu_n c_n^2 T}{\mu_p c_p^2 + \mu_n c_n^2} \left\{ \log \frac{P^A}{N^A} - \log \frac{P^B}{N^B} \right\}.$$

und:

29′) $$(AB) = -\frac{vT}{3 x \varepsilon} \left\{ \mu_p c_p^2 \log \frac{P^A}{P^B} - \mu_n c_n^2 \log \frac{N^A}{N^B} \right\}.$$

Nach beiden Ausdrücken ist die elektromotorische Kraft der absoluten Temperatur der Grenzfläche proportional, nach beiden kann sie durch eine Differenz zweier Terme dargestellt werden, deren einer nur abhängt von den Eigenschaften des Metalles A, der andere nur von denen des Metalles B. Im übrigen ist aber das Verhalten der beiden Terme trotz ihrer scheinbaren Aehnlichkeit ein sehr verschiedenes. Die Konstanten des Wismuth können aus den an diesem Metalle angestellten Beobachtungen berechnet werden. Setzen wir an Stelle des Metalles A das Wismuth, so können wir die numerischen Werthe der ihm entsprechenden Terme in den Gleichungen 29 und 29′ bestimmen. Es ergiebt sich, daß sie entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Daraus

folgt, daß durch unsere Betrachtungen nicht einmal über den Sinn der elektromotorischen Kraft an der Grenzfläche zweier Metalle etwas entschieden wird; man wird daher weiter schließen, daß unsere Theorie für die Existenz kontaktelektromotorischer Kräfte keinen bestimmten Anhalt giebt.

Das Resultat der ganzen Untersuchung ist also schließlich Nichts, als die Möglichkeit, daß an der Grenze zweier Metalle A und B eine elektromotorische Kraft wirkt, welche der absoluten Temperatur proportional ist, und durch eine Gleichung von der Form:

30) $$(AB) = v(V_A - V_B) = (\Xi - H)T$$

dargestellt werden kann. Hier bezeichnet Ξ eine Größe, welche nur abhängt von den Eigenschaften des Metalles A, H eine solche, die nur abhängt von den Eigenschaften des Metalles B.

Durch die Berührungsfläche der beiden Metalle A und B möge mit Hülfe von einer äußeren elektromotorischen Kraft ein Strom i von dem Metalle B zu A getrieben werden. Es wird dann gegen die Potentialdifferenz eine Arbeit von dem Betrage $(AB) \times i$ in der Zeiteinheit geleistet. Dem entspricht eine Wärmeabsorption in der Berührungsfläche, deren Betrag in der Zeiteinheit gegeben ist durch:

31) $$\frac{i(AB)}{\mathfrak{A}} = \frac{T}{\mathfrak{A}}(\Xi - H)i.$$

9. Die allgemeineren Formeln der Thermoelektricität.

In einem aus den beiden Metallen A und B gebildeten Kreis habe die heiße Löthstelle eine Temperatur von t Graden Celsius, die kalte Löthstelle eine Temperatur von t_0 Grad. Aus Gleichung 30 ergiebt sich dann eine in dem Kreise wirkende elektromotorische Kraft, welche gegeben ist durch:

32) $$(AB)_t - (AB)_{t_0} = (\Xi - H)(t - t_0).$$

Nehmen wir an Stelle des Metalles B das Blei, so ergiebt sich:

33) $$(APb)_t - (APb)_{t_0} = (\Xi - \Pi)(t - t_0),$$

wenn wir mit Π die dem Blei eigenthümliche Constante bezeichnen. Diese Kraft tritt nun hinzu zu den aus der Mitführung folgenden, durch Gleichung 20 gegebenen Kräften. Wir erhalten

somit für die ganze in dem thermoelektrischen Kreis wirkende elektromotorische Kraft:

34)
$$(APb)_{t_0}^{t} = \left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 + \Xi - \left[\omega_{Pb}\frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 - \Pi\right\}(t-t_0)$$
$$+\left\{\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A - \left[\omega_{Pb}\frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 \delta_{Pb}\right\}(t^2-t_0^2).$$

Für die thermoelektrischen Constanten ergeben sich dann die Werthe:

35)
$$a_A = \left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 + \Xi - \left[\omega_{Pb}\frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 - \Pi$$
$$b_A = 2\left[\omega_A \frac{k_A}{\gamma_A}\right]_0 \delta_A - 2\left[\omega_{Pb}\frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]\delta_{Pb}.$$

Zu der Wärmeabsorption an der Grenzfläche zweier Metalle, welche durch die Mitführung der Wärme von Seiten eines durch die Grenzfläche gehenden Stromes erzeugt wird, gesellt sich noch die durch Gleichung 31 gegebene Wärmeabsorption hinzu. Das Peltiersche Gesetz wird dadurch nicht verändert. Die auf die Thomsonwärme bezüglichen Entwickelungen bleiben unverändert.

10. Die galvanomagnetischen Wirkungen.

Wir betrachten im Folgenden eine dünne Metallplatte von rechteckigem Querschnitt, welche in der Richtung ihrer Längskanten von einem galvanischen Strom durchflossen wird. Die Platte stehe vertikal, die Strömungslinien gehen horizontal von links nach rechts. Die mit den Strömungslinien parallele Axe der Platte machen wir zu der z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die Platte befinde sich in einem Magnetfeld, dessen Kraftlinien senkrecht durch die Platte, und daher auch senkrecht durch die Strömungslinien der Elektricität hindurchgehen. Es findet dann bekanntlich die Hall'sche Wirkung statt, d. h. zwischen den horizontalen Seitenflächen der Platte tritt eine elektrische Spannungsdifferenz auf. Wir bezeichnen diese in elektromagnetischem Maaße gemessene Potentialdifferenz durch E, die Stromdichte in elektromagnetischem Maaße durch i, die Breite der Platte durch b, die Intensität des Magnetfeldes durch $\mathfrak{H}$, dann ist den Beobachtungen zu Folge:

5
$$E = \mathrm{P}\,\mathfrak{H}\,b\,i.$$

P ist ein von der Natur des durchströmten Metalles abhängender Coëfficient, der Rotationscoëfficient.

Die Richtung der Magnetkraftlinien gehe von vorn nach hinten; von dem Mittelpunkt der Platte aus ziehen wir parallel mit den Magnetkraftlinien die Y-Axe unseres Coordinatensystems; die X-Axe gehe vertikal nach oben, so daß durch eine Drehung um sie im Sinne des Uhrzeigers die y-Axe in die z-Axe übergeht.

Die Wanderungsgeschwindigkeiten der positiven und der negativen Elektricität bei der Stromdichte i sind gegeben durch

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{u}}{\gamma} i, \qquad \mathfrak{V} = -\frac{\mathfrak{v}}{\gamma} i.$$

Im Magnetfeld wird dann auf ein positives elektrisches Theilchen von der Menge 1 eine Kraft in der Richtung der X-Axe ausgeübt, welche in elektrostatischem Maaße gegeben ist durch:

$$X_p = \mathfrak{H} \frac{\mathfrak{U}}{v} = \frac{1}{v} \frac{\mathfrak{u}}{\gamma} \mathfrak{H} i.$$

Ebenso wirkt auf die Einheit der negativ elektrischen Theilchen die Kraft:

$$X_n = -\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{V}}{v} = \frac{1}{v} \frac{\mathfrak{v}}{\gamma} \mathfrak{H} i.$$

Im stationären Zustand müssen die Strömungslinien der Elektricität im Magnetfelde ebenso gut, wie außerhalb desselben, mit der z-Axe parallel sein. Die Kräfte, welche im Magnetfeld auf die positiven und die negativen elektrischen Theilchen ausgeübt werden, beziehungsweise die ihnen entsprechenden Verschiebungsgeschwindigkeiten müssen somit durch anderweitige Ursachen kompensiert werden. Diese bestehen einmal in einer statischen Vertheilung von Elektricität auf den horizontalen Seitenflächen der Platte, sodann in einer Temperaturdifferenz zwischen diesen beiden Flächen. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{F}$ die durch jene Vertheilung in der Richtung der X-Axe erzeugte elektrostatische Kraft, durch dT/dx das jener Temperaturdifferenz entsprechende Temperaturgefälle, so ergeben sich die Gleichungen:

36)
$$v\mathfrak{u}(X_p + \mathfrak{F}) - \mathfrak{g}_p \frac{dT}{dx} = 0$$
$$v\mathfrak{v}(X_n - \mathfrak{F}) - \mathfrak{g}_n \frac{dT}{dx} = 0.$$

Für die Potentialdifferenz zwischen dem oberen und dem unteren Rande der Platte in elektromagnetischem Maaße ergiebt sich hieraus der Werth:

37) $$E = \frac{\mathfrak{u}^2 \mathfrak{g}_n - \mathfrak{v}^2 \mathfrak{g}_p}{\mathfrak{u} \mathfrak{g}_n + \mathfrak{v} \mathfrak{g}_p} \cdot \frac{\mathfrak{H} b i}{\gamma}.$$

Der Rotationscoëfficient des Metalles ist:

38) $$\mathrm{P} = \frac{1}{\gamma} \frac{\mathfrak{u}^2 \mathfrak{g}_n - \mathfrak{v}^2 \mathfrak{g}_p}{\mathfrak{u} \mathfrak{g}_n + \mathfrak{v} \mathfrak{g}_p}.$$

Der Temperaturüberschuß des oberen Plattenrandes über den unteren ist:

39) $$T - T' = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})}{\mathfrak{u} \mathfrak{g}_n + \mathfrak{v} \mathfrak{g}_p} \frac{\mathfrak{H} b i}{\gamma}.$$

11. Die thermomagnetischen Wirkungen.

Die Versuchsanordnung ist im Ganzen die nemliche, wie wir sie im vorhergehenden Abschnitt betrachtet haben. Das Coordinatensystem werde ebenso gewählt wie dort. Nur trete an Stelle des galvanischen Stromes ein Wärmestrom. Damit die Strömung der Wärme ebenso erfolge wie die der Elektricität muß die zu dem negativen Aste der z-Axe senkrechte Endfläche der Platte auf einer konstanten hohen, die zu dem positiven Aste senkrechte Endfläche auf einer konstanten tiefen Temperatur gehalten werden. Bezeichnen wir die negative Richtung der z-Axe durch z', so ist:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{dT}{dz'},$$

und $\frac{dT}{dz'}$ hat dann einen positiven Werth. Die Verschiebungsgeschwindigkeiten der beiden Elektricitäten in der Richtung der z-Axe sind:

$$\mathfrak{g}_p \frac{dT}{dz'} \text{ und } \mathfrak{g}_n \frac{dT}{dz'}.$$

Die im Magnetfeld auf die Einheit der positiven und der negativen elektrischen Theilchen ausgeübten Kräfte sind:

$$X_p = \frac{1}{v} \mathfrak{g}_p \mathfrak{H} \frac{dT}{dz'}, \qquad X_n = -\frac{1}{v} \mathfrak{g}_n \mathfrak{H} \frac{dT}{dz'}.$$

Die hiedurch erzeugten Verschiebungen werden wieder kompen-

siert durch eine elektrostatische Kraft $\mathfrak{F}$ in der Richtung der X-Axe und durch eine Temperaturdifferenz zwischen den horizontalen Seitenflächen der Platte. Man erhält also wieder die Gleichungen 36:

$$v\,\mathfrak{u}(X_p+\mathfrak{F})-\mathfrak{g}_p\frac{dT}{dx}=0$$

$$v\,\mathfrak{v}\,(X_n-\mathfrak{F})-\mathfrak{g}_n\frac{dT}{dx}=0.$$

Die Potentialdifferenz zwischen dem oberen und dem unteren Rande der Platte wird in elektromagnetischem Maaße:

40) $$E=\frac{\mathfrak{g}_p\,\mathfrak{g}_n(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})}{\mathfrak{u}\,\mathfrak{g}_n+\mathfrak{v}\,\mathfrak{g}_p}\mathfrak{H}b\frac{dT}{dz'}.$$

Der Coëfficient des thermomagnetischen Effektes hat den Werth:

41) $$Q=\frac{\mathfrak{g}_p\,\mathfrak{g}_n(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})}{\mathfrak{u}\,\mathfrak{g}_n+\mathfrak{v}\,\mathfrak{g}_p}.$$

Die Temperaturdifferenz zwischen dem oberen und dem unteren Rande der Platte wird:

42) $$T-T'=\frac{\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,(\mathfrak{g}_p-\mathfrak{g}_n)}{\mathfrak{u}\,\mathfrak{g}_n+\mathfrak{v}\,\mathfrak{g}_p}\mathfrak{H}b\frac{dT}{dz'}.$$

12. Vereinfachung und Prüfung der für die galvanomagnetischen und die thermomagnetischen Wirkungen aufgestellten Formeln.

Mit Rücksicht auf die Bedingung 16′ gehen die Gleichungen 14′ über in:

$$\frac{\mathfrak{g}_p}{\mathfrak{u}}=\frac{v}{2\varepsilon}\mu_p c_p^2,\qquad \frac{\mathfrak{g}_n}{\mathfrak{v}}=\frac{v}{2\varepsilon}\mu_n c_n^2.$$

Auf Grund dieser Beziehungen lassen sich die Formeln für die galvanomagnetischen Wirkungen so schreiben:

38′) $$\mathrm{P}=\frac{1}{\gamma}\,\frac{\mathfrak{u}\,\mu_n c_n^2-\mathfrak{v}\,\mu_p c_p^2}{\mu_p c_p^2+\mu_n c_n^2}.$$

39′) $$(T-T')_{gm}=\frac{2\varepsilon}{v}\,\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\gamma(\mu_p c_p^2+\mu_n c_n^2)}\cdot\mathfrak{H}b\,i.$$

Ebenso die Formeln für die thermomagnetischen Wirkungen:

41′) $$Q = \frac{\mathfrak{g}_p \mu_n c_n^2 + \mathfrak{g}_n \mu_p c_p^2}{\mu_p c_p^2 + \mu_n c_n^2},$$

und

42′) $$(T - T')_{thm} = \frac{2\varepsilon}{v} \frac{\mathfrak{g}_p - \mathfrak{g}_n}{\mu_p c_p^2 + \mu_n c_n^2} \mathfrak{H} b \frac{dT}{dz'}.$$

Wir wenden diese Formeln auf die bei Wismuth beobachteten Erscheinungen an. Eine thermomagnetische Temperaturdifferenz scheint hier nicht vorhanden zu sein. Daraus würde folgen:

43) $$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_n, \qquad \frac{v}{2\varepsilon} \mu_p c_p^2 \mathfrak{u} = \frac{v}{2\varepsilon} \mu_n c_n^2 \mathfrak{v}.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

44) $$\frac{v}{2\varepsilon} \mu_p c_p^2 = x, \qquad \frac{v}{2\varepsilon} \mu_n c_n^2 = y$$
$$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{u} x, \qquad \mathfrak{g}_n = \mathfrak{v} y.$$

Wir erhalten dann die Gleichungen:

45) $$\mathrm{P} = \frac{1}{\gamma} \frac{\mathfrak{u} y - \mathfrak{v} x}{x + y}, \qquad Q = \frac{xy}{x+y}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v})$$
$$\frac{(T - T')_{gm}}{\mathfrak{H} b i} = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\gamma(x+y)}, \qquad \mathfrak{u} x = \mathfrak{v} y.$$

oder

46) $$\mathrm{P} = \frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\gamma}, \qquad \frac{\gamma (T - T')_{gm}}{\mathfrak{H} b i} = \frac{\mathfrak{u}}{y} = \frac{\mathfrak{v}}{x},$$
$$Q = \mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_n = \mathfrak{u} x = \mathfrak{v} y.$$

Nun ist für Wismuth

$$\mathrm{P} = -9{,}3.$$

Aus den Beobachtungen von v. Ettingshausen ergab sich für eine Platte von der Breite 2,5 cm, der Dicke 0,068 cm, in einem Feld von der Stärke 6310 und für einen Gesammtstrom von 0,457 $\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}$:

$$T - T' = 1{,}3^{\circ}.$$

Nach den Beobachtungen von Nernst ist für Wismuth:

$$Q = 0{,}132.$$

Setzen wir die specifische Leitfähigkeit des Wismuth gleich $7{,}7 \times 10^{-6}$, so ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{v} - \mathfrak{u} = 7{,}16 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\mathfrak{u}}{y} = \frac{\mathfrak{v}}{x} = 2{,}98 \times 10^{-10},$$

$$\mathfrak{u} x = \mathfrak{v} y = 0{,}132.$$

Ihre Auflösung giebt:

$$\mathfrak{u} = 0{,}05 \times 10^{-5}, \qquad \mathfrak{v} = 7{,}21 \times 10^{-5},$$

47) $$x = 2{,}6 \times 10^{5}, \qquad y = 0{,}018 \times 10^{5},$$

$$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_n = 0{,}132,$$

$$\frac{\mu_p c_p^2}{\varepsilon} = 1{,}7 \times 10^{-5}, \qquad \frac{\mu_n c_n^2}{\varepsilon} = 0{,}012 \times 10^{-5}.$$

Die Beweglichkeit $\mathfrak{v}$ der negativen elektrischen Theilchen ist hiernach über 100mal größer als die der positiven, und die Masse μ_n der negativen Theilchen wahrscheinlich kleiner als die der positiven, μ_p.

Die Masse eines Wasserstoffatomes ist:

$$h = 7{,}8 \times 10^{-25}\,\text{g}.$$

Die elektrische Ladung eines einzelnen Jons

$$\eta = 2{,}18 \times 10^{-10}$$

elektrostatischen Einheiten. Somit ist bei Wasserstoff:

$$\frac{h}{\eta} = 3{,}58 \times 10^{-15}.$$

Setzen wir:

$$\frac{\mu_p}{\varepsilon} = \frac{1}{p}\,\frac{h}{\eta}, \qquad \frac{\mu_n}{\varepsilon} = \frac{1}{n}\,\frac{h}{\eta},$$

so wird:

$$c_p^2 = p \times 0{,}47 \times 10^{10}, \qquad c_n^2 = n \times 0{,}34 \times 10^{8}.$$

Wir wenden uns nun zu den Gleichungen, durch welche die Leitfähigkeiten für Wärme und für Elektricität dargestellt werden. Lorenz hat die Verhältnisse dieser Leitfähigkeiten bei 0° und bei 100° für eine Reihe von Metallen bestimmt. Nun ergiebt sich aus Gleichung 3:

$$\frac{k_0}{k_{100}} = \sqrt{\frac{273}{373}} \cdot \frac{1+182(\alpha+3\delta)}{1+349(\alpha+3\delta)-100\beta},$$

aus Gleichung 10:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_{100}} = \sqrt{\frac{373}{273}} \cdot \frac{1}{1+100(\alpha-\delta-\beta)}.$$

Eine weitere Beziehung zwischen den Temperaturcoëfficienten gewinnen wir aus Gleichung 16′, indem wir

48) $$x = \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad \alpha+\delta = 0$$

setzen. Die vorhergehenden Gleichungen können dann in die folgenden übergeführt werden:

49) $$2\delta+\beta = \frac{\gamma_0/\gamma_{100}-1{,}169}{100\,\gamma_0/\gamma_{100}},$$

$$2\delta\left\{449\frac{k_0}{k_{100}}-156\right\} = 0{,}8555-\frac{k_0}{k_{100}}+100\frac{k_0}{k_{100}}(2\delta+\beta).$$

Nun ist für Wismuth nach den Beobachtungen von Lorenz:

$$\frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}071, \qquad \frac{\gamma_0}{\gamma_{100}} = 1{,}475,$$

Somit ergiebt sich:

50) $$\alpha = -0{,}0000103, \qquad \beta = 0{,}00205$$
$$\delta = 0{,}0000103.$$

Mit Rücksicht auf das Vorhergehende kann die Gleichung 3 auf die Form gebracht werden:

51) $$k = \frac{9}{2\mathfrak{A}}\left\{\frac{\mu_p c_p}{\varepsilon}\mathfrak{g}_p\,\varepsilon P_0+\frac{\mu_n c_n^2}{\varepsilon}\mathfrak{g}_n\,\varepsilon N_0\right\}T(1+\delta t+\tfrac{4}{3}\delta T).$$

Nach Gleichung 46 ist $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_n = Q$; ferner ist δ so klein, daß wir die mit δ multiplicierten Glieder vernachlässigen können. Wir erhalten somit:

51′) $$k = \frac{9Q}{2\mathfrak{A}}\left\{\frac{\mu_p c_p^2}{\varepsilon}\varepsilon P_0+\frac{\mu_n c_n^2}{\varepsilon}\varepsilon N_0\right\}T.$$

Andererseits ist nach Gleichung 12:

52) $$\gamma = \frac{1}{v}\left\{\mathfrak{u}\,\varepsilon P_0+\mathfrak{v}\,\varepsilon N_0\right\}.$$

Setzen wir:

$$k = 0{,}014 \,\text{g cal/sec},$$

$$\gamma = 0{,}085 \times 10^{-4},$$

so wird mit Benutzung der Werthe der Gleichungen 47:

53) $$\varepsilon P_0 = 0{,}17 \times 10^{10}, \qquad \varepsilon N_0 = 3{,}5 \times 10^{10}.$$

Die Zahl der frei beweglichen negativen elektrischen Theilchen würde hiernach etwa 20 mal größer sein, als die der frei beweglichen positiven Theilchen.

Wir können endlich die gefundenen Zahlen noch benutzen, um die thermoelektrischen Constanten des Wismuth zu berechnen. Die zweite thermoelektrische Constante ist gegeben durch:

$$b = 2\delta \left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0.$$

Nun ist

$$\omega \frac{k}{\gamma} = \frac{\mathfrak{A}}{T} \eta,$$

oder wenn man für η seinen Werth setzt:

54) $$\omega \frac{k}{\gamma} = \frac{v}{2\varepsilon} \frac{P_0 l_p^0 c_p - N_0 l_n^0 c_n}{\frac{P_0 l_p^0}{\mu_p c_p} + \frac{N_0 l_n^0}{\mu_n c_n}}.$$

Nun folgt aber aus der Gleichheit von $\mathfrak{g}_p$ und $\mathfrak{g}_n$, daß auch $l_p^0 c_p = l_n^0 c_n$ sein muß; man kann hiernach die Produkte $l_p^0 c_p$ und $l_n^0 c_n$ aus der Gleichung 54 fortschaffen; benutzt man noch die abkürzenden Bezeichnungen der Gleichungen 44, so ergiebt sich:

$$b = 2\delta \frac{\varepsilon P_0 - \varepsilon N_0}{\frac{\varepsilon P_0}{x} + \frac{\varepsilon N_0}{y}}.$$

Setzen wir hier die gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich für die zweite thermoelektrische Constante der sehr kleine Werth:

$$b = -0{,}035.$$

Die erste thermoelektrische Constante ist nach Gleichung 35 gegeben durch:

$$a = \left[\omega \frac{k}{\gamma}\right]_0 + \Xi - \left[\omega_{Pb} \frac{k_{Pb}}{\gamma_{Pb}}\right]_0 - \Pi.$$

Aus der Thatsache, daß in Blei kein Thomsoneffekt vorhan-

den ist, darf man mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit schließen, daß $\omega_{Pb} = 0$ ist; die Gleichung reduciert sich dann auf:

$$a = \left[\omega \frac{k}{\gamma}\right] + \Xi - \Pi.$$

Berechnen wir den ersten Term des rechts stehenden Ausdruckes mit Hülfe unserer numerischen Daten, so ergiebt sich:

$$a = -1700 + \Xi - \Pi.$$

Die Zahl -1700 stimmt dem Zeichen und der Größenordnung nach mit der thermoelektrischen Constanten, wie sie aus den Beobachtungen sich ergiebt; eine wirkliche Prüfung unserer Theorie aber läßt sich durch die Berechnung der ersten thermoelektrischen Constanten so lange nicht gewinnen, als über den etwaigen Einfluß kontaktelektromotorischer Kräfte keine Sicherheit gewonnen ist.

Ueber eine neue geometrische Methode im Gebiet der Differentialgeometrie.

Von

A. Schoenflies.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. März von F. Klein.

Im folgenden teile ich eine geometrische Methode mit, die meines Wissens neu ist und sich für die Differentialgeometrie der Raumcurven, Flächen und Congruenzen als sehr brauchbar erwiesen hat. Mittelst dieser Methode ist man im Stande, eine Reihe von wesentlichen Formeln, die sich meist nur auf Grund umfangreicher Rechnungen ergeben, fast unmittelbar hinzuschreiben. Ueberdies hat man den Vorteil, daß in die Formeln von vorn herein nur geometrisch definirte Größen eintreten. Uebrigens ist die Methode durchaus exact, sie stützt sich nicht auf geometrische Behandlung infinitesimaler Raumfiguren, operirt vielmehr nur mit den Sätzen über Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten. Im Interesse der Darstellung werde ich jedoch im folgenden nicht mit den Geschwindigkeiten, sondern mit den Momentanbewegungen operiren.

Durch Herrn G. Darboux ist in die Differentialgeometrie die systematische Benutzung von orthogonalen Triedern eingeführt worden, die sich längs einer Curve oder Fläche nach gewissen Gesetzen bewegen, insbesondere des Trieders, welches aus der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale einer Curve besteht. An solche Trieder, oder vielmehr an diejenigen Hilfstrieder, die man parallel zu ihnen durch einen festen Punkt O des Raumes legen kann, knüpfen die folgenden Erörterungen an. Man weiß bekanntlich, daß die Momentandrehung eines solchen Hilfstrieders Δ der Momentandrehung $d\sigma$ um die Binormale und der Momentandrehung $d\omega$ um die Tangente aequivalent ist; und

zwar sei

$$d\sigma = \frac{ds}{\varrho} \text{ und } d\omega = \frac{ds}{r}$$

wo ϱ, resp. r den Radius der ersten und zweiten Krümmung bedeuten. Bei dieser Festsetzung sind die positiven Richtungen der Triederkanten so gewählt, daß für rechts gewundene Curven[1]) r negativ ist.

2. Betrachtet man zwei Curven c und c', die in einem gesetzmäßigem Punktzusammenhang stehen, so wird auch die Bewegung ihrer Hilfstrieder Δ und Δ' einer gesetzmäßigen Beziehung unterworfen sein. Ist l irgend ein durch O gehender Strahl, so können wir ihn ebenso zu Δ, wie zu Δ' rechnen. Dementsprechend können wir seine absolute Bewegung auf zwei Weisen bestimmen. Einerseits können wir l als einen festen Strahl von Δ' betrachten, alsdann ist er ein wechselnder Strahl von Δ, und seine absolute Bewegung ist die Resultante aus seiner Eigenbewegung in Δ und der Führungsbewegung von Δ. Betrachten wir andrerseits l als festen Strahl von Δ, so hat er eine wechselnde Lage in Δ' und seine absolute Bewegung ist die Resultante aus der Führungsbewegung von Δ' und der Eigenbewegung in Δ'. Selbstverständlich ist die absolute Bewegung davon unabhängig, welche dieser Auffassungen wir zu Grunde legen; die auf beide Arten ausgedrückten Bewegungen müssen daher einander gleich sein. Dies ist der einfache Gedanke, der den folgenden Entwicklungen zum Ausgangspunkt dient.

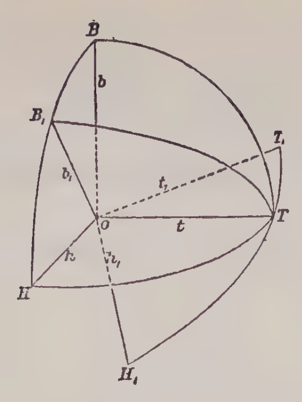
Ich beschränke mich heute im wesentlichen darauf, diejenigen Formeln mitzuteilen, die sich auf die am häufigsten auftretenden derartigen Triederführungen beziehen.

3. Längs einer Curve c der Fläche Φ construiren wir die der Fläche umschriebene Developpable c_1. Ihre Erzeugenden sind die zu den Tangenten t von c conjugirten Tangenten t_1. Die Gratlinie dieser Developpabeln hat t_1 zur Tangente und die Tangentialebene von Φ als Schmiegungsebene, ihre Binormale b_1 ist daher der Flächennormale n parallel und damit zu t senkrecht. Die Hilfstrieder Δ und Δ_1 haben demnach, während ein Punkt P die Curve c und der entsprechende Punkt P_1 die Curve c_1 durchläuft, stets die Beziehung, daß $t \perp b_1$ ist[2]). Die Kanten der Hilfs-

---

1) d. h. von links oben nach rechts unten, wie die gewöhnliche Schraube.

2) Wir bezeichnen auch die Kanten der Hilfstrieder durch t, h, b, resp. t_1, h_1, b_1.



trieder mögen die Einheitskugel in den Punkten T, H, B, T_1, H_1, B_1 durchdringen. Wir fassen die Bewegung des auf dem größten Kreis BH liegenden Punktes B_1 ins Auge und zerlegen sie nach den Richtungen TB_1 und HB. Als Punkt von Δ_1 ist B_1 ein fester Punkt, für seine Momentanbewegung ist die Drehung um b_1 ohne Einfluß, es kommt also nur die Drehung um t_1 in Betracht, deren Componenten nach den genannten Richtungen resp.

$$d\omega_1 \cos(th_1) \text{ und } d\omega_1 \sin(th_1)$$

sind[1]). Als Punkt von Δ dagegen ist B_1 ein wechselnder Punkt, der jedoch, da $b_1 \perp t$ bleibt, sich stets in der Ebene (hb) verschiebt, und zwar ist seine momentane Eigenbewegung das Differential des Winkels (hb_1). Außer dieser Bewegung erfährt B_1 noch die Drehung $d\omega$ um t, sowie die Drehung $d\sigma$ um b, sodaß die Componenten nach den oben genannten Richtungen den Wert

$$d\sigma(\cos hb_1) \text{ resp. } d\omega + d(hb_1)$$

haben. Die Gleichwertigkeit dieser Componenten mit den vorstehenden liefert die Formeln

$$1)\qquad \begin{aligned} d\sigma \cos(hb_1) &= d\omega_1 \cos(th_1) \\ d\omega + d(hb_1) &= d\omega_1 \sin(th_1). \end{aligned}$$

Außer ihnen existirt noch eine dritte, von ihnen unabhängige Relation, die sich z. B. ergiebt, wenn man auf die gleiche Art die Bewegung des Punktes T behandelt. Sie lautet

1) Die positiven Drehungsrichtungen gehen in Uebereinstimmung mit der Festsetzung auf S. 72 von t zu h, von h zu b, von b zu t, ebenso von t_1 zu h_1, von h_1 zu b_1, von b_1 zu t_1.

1a) $$d\sigma \sin(hb_1) = d\sigma_1 + d(t_1 t)$$ [1].

Diese Gleichungen lassen sich, wenn wir den Winkel $(hb_1) = (hn) = \varphi$ setzen, in die Form setzen

$$\begin{aligned} \frac{ds\cos\varphi}{\varrho} &= d\omega_1 \cos(th_1) = d\omega_1 \sin(t_1 t) \\ \frac{ds}{r} + d\varphi &= d\omega_1 \sin(th_1) = d\omega_1 \cos(t_1 t) \\ \frac{ds\sin\varphi}{\varrho} &= d\sigma_1 + d(t_1 t). \end{aligned} \tag{2}$$

4. Die vorstehenden Gleichungen stellen die Grundlage für eine große Zahl flächentheoretischer Relationen dar. Da nämlich $d\omega_1$ der Winkel zweier consecutiver Binormalen, also auch zweier consecutiver Flächennormalen ist und t_1 die zu t conjugirte Tangente, so bleibt für alle Curven, die in P die gleiche Tangente t haben, die rechte Seite der ersten beiden Gleichungen 2) constant. Es ist daher auch die linke constant, und ihr Wert insbesondere gleich dem bezüglichen Wert für die durch P gehende geodätische Linie. Aus der ersten Gleichung folgt so das Meusnier'sche Theorem, aus der zweiten Gleichung die Formel

$$\frac{1}{r} + \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r_g}$$

in der r_g den Radius der geodätischen Torsion bedeutet. Endlich folgt aus der dritten Gleichung die von Liouville gegebene Definition des Radius ϱ_g der geodätischen Krümmung. Ist noch ϱ_n der Krümmungsradius des Normalschnitts, so folgt, daß sich die gefundenen Gleichungen auch in folgende Form setzen lassen:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\varrho_n} &= \frac{ds_1}{r_1} \sin(t_1 t) \\ \frac{ds}{r_g} &= \frac{ds_1}{r_1} \cos(t_1 t) \\ \frac{ds}{\varrho_g} &= \frac{ds_1}{\varrho_1} + d(t_1 t) \end{aligned} \tag{3}$$ [2].

1) Die zweite sich für T ergebende Gleichung ist mit der ersten der vorstehenden identisch.

2) Gleichungssysteme der oben gefundenen Art sind besonders von französischen Autoren mehrfach aufgestellt worden. (Vgl. auch Darboux, Théorie des Surfaces, II, Livre V). Die Relationen 2) sind denen sehr ähnlich, die von Bonnet gefunden wurden. Die Bonnet'schen ergeben sich nach der gleichen Methode für diejenige Triederführung, bei der $t \perp t_1$ ist.

Endlich folgt noch die Gleichung

4) $$\operatorname{tang}(t_1 t) = \frac{r_g}{\varrho_n},$$

und da die conjugirten Tangenten sich wechselseitig entsprechen, so ist auch

$$\operatorname{tang}(t t_1) = \frac{(r'_g)}{(\varrho'_n)},$$

wo r'_g und ϱ'_n sich auf die Curven beziehen, die t_1 zur Tangente in P haben; hieraus folgt schließlich noch

5) $$\frac{r_g}{\varrho_n} + \frac{r'_g}{\varrho'_n} = 0,$$

eine sehr bemerkenswerte Relation, aus der man die bekannten Sätze über die Aenderung des Wertes und des Vorzeichens der geodätischen Torsion für die einzelnen Curventangenten leicht ableiten kann.

Ist c im besondern eine Krümmungslinie, so nehmen die Gleichungen 3) die einfache Form an

6) $$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\varrho_n}{r_1} = \frac{\varrho_g}{\varrho_1}; \quad \frac{1}{r_g} = 0,$$

von denen wir später Gebrauch zu machen haben. Uebrigens gelten diese Relationen auch für c als Evolvente und c_1 als irgend eine ihrer Evoluten, und zwar in dem Sinne, daß die Fläche Φ, auf der die Evolvente liegt, die Tangentenfläche der Evolute ist. Die Gleichungen ergeben unmittelbar die Sätze, die verschiedene Evoluten derselben Curve betreffen.

5. Die vorstehenden Relationen reichen insbesondere auch aus, um die Formeln der sphärischen Abbildung abzuleiten; man sieht dies leicht, wenn man beachtet, daß in den Formeln 2) $d\omega_1$ geradezu das Bogenelement ds_k der Bildcurve von c darstellt[1]). In der That erhält man auf diese Weise unter alleiniger Benutzung der elementaren Eulerschen Gleichungen sowie der Relation 4) den bekannten Ausdruck für ds_k^2 und kann nun aus diesem den Wert der Fundamentalgrößen E_k, F_k, G_k direct entnehmen. Die ausführliche Darstellung werde ich an anderer Stelle geben.

Neuer Relationen bedarf man für Curven, die auf derselben

---

1) Man kann übrigens zu den Formeln, die die sphärische Bildcurve c_k betreffen, auch durch geeignete Triederführungen direkt gelangen.

geradlinigen Fläche liegen, oder für Curven, die durch parallele Flächennormalen bestimmt werden oder noch allgemeinere Beziehungen haben. In allen diesen Fällen gelangt man so zum Ziel, daß man ein drittes Hilfstrieder einschaltet, dessen Lage zu jedem der beiden andern Trieder der oben (S. 73) behandelten analog ist. Um z. B. die geradlinigen Flächen zu behandeln, hat man eine Triederführung zwischen dem Trieder $\varDelta$ der Directrixcurve und einem Trieder $\varDelta_1$ zu betrachten, das sich so bewegt, daß es den Bildkegel K_1 der Erzeugenden umhüllt; man schaltet als drittes Trieder am besten dasjenige ein, das der sphärischen Abbildung der Directrix durch parallele Normalen entspricht. Die Combination der zwei so bestimmten Gleichungssysteme führt dann sofort zu den Relationen

$$\text{7)}\qquad \begin{aligned} d\sigma_1 \cos\varphi &= \frac{ds}{\varrho_n}\cos\vartheta - \frac{ds}{r_g}\sin\vartheta \\ d\omega_1 + d\varphi &= \frac{ds}{\varrho_n}\sin\vartheta + \frac{ds}{r_g}\cos\vartheta \\ d\sigma_1 \sin\varphi &= \frac{ds}{\varrho_g} + d\vartheta, \end{aligned}$$

in denen ϑ den Winkel der Erzeugenden mit der Directrix bedeutet, c_1 die sphärische Bildcurve der Erzeugenden ist, und $\varphi = (h_1 n)$ gesetzt ist. Diese Gleichungen lassen ebenfalls eine Reihe von Folgerungen zu, sie geben z. B. unmittelbar diejenigen Relationen, deren man bedarf, um die von Beltrami für die Verbiegung abgeleiteten Resultate zu erweisen und dies zudem in einer sehr einfachen Form [1]); es folgt nämlich

$$\text{8)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{ds}\sin\varphi &= \frac{1}{\varrho_g} + \frac{d\vartheta}{ds} \\ \frac{d\sigma_1^2}{ds^2} &= \left(\frac{\cos\vartheta}{\varrho_n} - \frac{\sin\vartheta}{r_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_g} + \frac{d\vartheta}{ds}\right)^2, \end{aligned}$$

und dies sind die hier in Frage kommenden Hauptrelationen [2]), wie man durch deren Ausrechnung und Reduction leicht bestätigen kann.

Auf ähnliche Art, wie zu den Gl. 7), gelangt man zu den Formeln für zwei Curven c' und c'', die einander bei beliebiger

---

1) Annali di mat. Bd. 7, S. 105.

2) Vgl. darüber auch Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 226.

Abbildung durch parallele Normalen entsprechen; man hat als Zwischencurve ihre gemeinsame sphärische Bildcurve zu benutzen. Es ergeben sich so die Gleichungen:

9)
$$\frac{ds'}{\varrho'_n} = \frac{ds''}{\varrho''_n}\cos\vartheta - \frac{ds''}{r''_g}\sin\vartheta$$
$$\frac{ds'}{r'_g} = \frac{ds''}{\varrho''_n}\sin\vartheta + \frac{ds''}{r''_g}\cos\vartheta$$
$$\frac{ds'}{\varrho'_g} - \frac{ds''}{\varrho''_g} = d\vartheta,$$

wo $\vartheta = (t' t'')$ gesetzt ist. Die Auflösung der beiden ersten Gleichungen giebt die analogen Relationen für $\frac{ds''}{\varrho''_n}$ nur $\frac{ds''}{r''_g}$.

6. Um eine Anwendung der vorstehenden Resultate zu geben, so sollen die Formeln abgeleitet werden, die der Behandlung der Evolutenflächen zu Grunde liegen, und die ein specieller Fall der Codazzischen Gleichungen sind, für den besondern Fall, daß die Krümmungslinien als Parametercurven genommen werden[1]). Ist k eine Krümmungslinie, so gelten die Formeln 6) für jede ihrer Evoluten, insbesondere also für die Gratlinie der Developpabeln, die die Fläche längs k berührt. Seien jetzt k' und k'' die beiden durch einen Punkt P gehenden Krümmungslinien, t' und t'' ihre Tangenten, und c_1 resp. c_2 wieder die Gratlinien ihrer Developpabeln, so ist $t_1 \parallel t''$, $h_1 \parallel t'$ und $b_1 \parallel n$. Bezeichnen wir die Winkel der Richtungen t_1, h_1, b_1 mit den Axen durch

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1, \quad \varphi_1\psi_1\chi_1, \quad \lambda_1\mu_1\nu_1,$$

so lauten die Frenet'schen Gleichungen[2]) für die Developpable c_1

10)
$$\frac{d\cos\alpha_1}{ds_1} = \frac{\cos\varphi_1}{\varrho_1}$$
$$\frac{d\cos\varphi_1}{ds_1} = -\frac{\cos\varphi_1}{r_1}$$
$$\frac{d\cos\varphi_1}{ds_1} = -\frac{\cos\alpha_1}{\varrho_1} + \frac{\cos\lambda_1}{r_1}$$

und diese Gleichungen gehen gemäß Gl. 6 unmittelbar in die fol-

1) Vgl. z. B. Bianchi, a. a. O., S. 94, sowie Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, § 44.

2) Die Vorzeichen sind der oben getroffenen Festsetzung (S. 72) entsprechend.

genden über:

$$
11)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\cos\alpha_1}{ds'} &= \frac{\cos\varphi_1}{\varrho'_g}\\
\frac{d\cos\lambda_1}{ds'} &= -\frac{\cos\varphi_1}{\varrho_1}\\
\frac{d\cos\varphi_1}{ds'} &= -\frac{\cos\alpha_1}{\varrho'_g}+\frac{\cos\lambda_1}{\varrho_1}
\end{aligned}
$$

Ein analoges Gleichungssystem besteht für die Krümmungslinie k''. Wählen wir jetzt die Krümmungslinien k', k'' als die Parameterlinien u, v, so daß $ds' = ds_u$, $ds'' = ds_v$, $\varrho'_g = \varrho_u$, $\varrho''_g = \varrho_v$ zu setzen ist, und bezeichnen die Richtungscosinus von n, k', k'' resp. durch[1])

$$XYZ,\quad X_uY_uZ_u,\quad X_vY_vZ_v,$$

so erhalten wir

$$
12)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dX_v}{ds_u} = \frac{X_u}{\varrho_u}, \quad \frac{dX}{ds_u} = -\frac{X_u}{\varrho_1}, \quad \frac{dX_u}{ds_u} = -\frac{X_v}{\varrho_u}+\frac{X}{\varrho_1},\\
&\frac{dX_u}{ds_v} = \frac{X_v}{\varrho_v}, \quad \frac{dX}{ds_v} = +\frac{X_v}{\varrho_2}, \quad \frac{dX_v}{ds_v} = -\frac{X_u}{\varrho_v}-\frac{X}{\varrho_2}.
\end{aligned}
$$

Ersetzen wir noch ds_u durch $\sqrt{G}\,dv$, ds_v durch $\sqrt{E}\,du$ und stellen die Integrabilitätsbedingung für X, X_u, X_v als Functionen von u und v auf, so folgt sofort

$$
13)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_1}\right) = -\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{\varrho_2\varrho_u} = \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_2}\right) = -\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{\varrho_1\varrho_v} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v}\right)-\frac{\sqrt{EG}}{\varrho_1\varrho_2} = 0.
\end{aligned}
$$

Dies sind in der That, wenn man noch $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_u, \varrho_v$ durch ihre Werte ersetzt, die oben erwähnten Codazzischen Gleichungen für die Krümmungslinien als Parameterlinien. Meines Erachtens findet die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen in den Relationen 12) ihren einfachsten Ausdruck. Diese Relationen haben überdies den Vorzug, daß sie vom Coordinatensystem unabhängig sind.

---

1) Man überzeugt sich leicht, daß die positiven Richtungen von Tangente, Hauptnormale und Binormale den in Gl. 12) enthaltenen Vorzeichen entsprechend gesetzt werden können.

Uebrigens ist es bemerkenswert, daß man das Gleichungssystem 12) noch auf eine zweite Art ableiten kann, indem man nämlich die Formeln 11) auf die Krümmungslinien und die ihnen entsprechenden Curven der Evolutenfläche anwendet. Man hat dabei die Krümmungslinie als Curve der von ihren Normalen gebildeten abwickelbaren Fläche zu betrachten, und demgemäß einerseits ϱ_1, ϱ_2 mit ϱ_u resp. ϱ_v, andrerseits jede Tangente mit der bezüglichen Binormale zu vertauschen. Die Gl. 11) und 12) ändern sich dadurch nicht. Analog kann man auch für irgend welche Curven der Fläche ein doppeltes Verfahren zu Grunde legen, indem man entweder die umschriebene Developpable oder die zugehörige Normalenfläche benutzt.

Die mir sonst bekannten Ableitungen der Gleichungen 13) gehen sämmtlich von der Aufstellung des allgemeineren Gleichungssystems aus, und leiten sie aus ihm durch die bezüglichen Specialisirungen ab. Demgegenüber scheint es mir von Interesse zu sein, daß diese Gleichungen eine so einfache Begründung gestatten, und dies um so mehr, als man da, wo man die Gleichungen besonders benutzt, nämlich für die bezüglichen Existenzbeweise und die Theorie der Evolutenflächen, sich immer auf den oben behandelten Specialfall beschränkt. Der invariante geometrische Character der Gleichungen 12) legt es sogar nahe, umgekehrt von ihnen aus diejenigen Formeln abzuleiten, die sich auf beliebige Parametercurven beziehen. Hierauf denke ich an anderer Stelle ausführlicher zurückzukommen.

Ueber einen Fall der Bewegung eines allgemeinen Kreisels[1]) dessen Unterstützungspunkt sich in der horizontalen Ebene frei bewegen kann.

Von

G. Kolossoff in St. Petersburg.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die horizontale Ebene werden wir als die xy-Ebene eines im Raume festen Koordinatensystems xyz denken und die z-Axe in verticaler Richtung positiv nach oben rechnen, ferner seien x_a, y_a, z_a die Koordinaten des Schwerpunktes des Kreisels, M seine Masse, A, B, C seine Hauptträgheitsmomente in Bezug auf den Schwerpunkt G, L die Länge der Strecke GO, wo O den Unterstützungspunkt bedeutet, p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um seine Hauptträgheitsaxen in G, α, β, γ die Richtungscosinus des Vectors GO und λ, μ, ν diejenigen der z-Axe gegen die letztgenannten Hauptträgheitsaxen. Die Differentialgleichungen des Problems lauten dann[2]):

$$(1)\quad \begin{cases} Mx_a'' = 0, \quad My_a'' = 0, \\ Cr' + (B-A)pq = ML(z_a''+g)(\alpha\mu - \beta\lambda), \quad \nu' = q\lambda - p\mu, \\ Bq' + (A-C)rp = ML(z_a''+g)(\gamma\lambda - \alpha\nu), \quad \mu' = p\nu - r\lambda, \\ Ap' + (C-B)qr = ML(z_a''+g)(\beta\nu - \gamma\mu), \quad \lambda' = r\mu - q\nu. \end{cases}$$

Selbstverständlich muß diesen Differentialgleichungen die Bedingung:

$$(2)\qquad z_a + L(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0$$

1) Unter einem „allgemeinen Kreisel" verstehen wir einen der Schwere unterworfenen beliebigen starren Körper mit einem Unterstützungspunkte (F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels; S. 7).

2) Poisson, Traité de Mecanique. 2ème ed. 1833 t. II pg. 139.

hinzugefügt werden. Den Integralgleichungen der geradlinigen Bewegung der Projection des Schwerpunktes auf die xy-Ebene und den 3 allgemeinen Integralen:

$$(3)\quad Ap\lambda + Bq\mu + Cr\nu = \text{const.},\ \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{M}{2} z_G'^2$$
$$= -Mgz_G + \text{const.},\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{const.} = 1$$

können wir in dem schon von Poisson durchgeführten Falle: $A = B$ $\alpha = \beta = 0$ das Integral $r = \text{const.}$ hinzufügen. Ein anderes particuläres Integral der Differentialgleichungen (1), nämlich:

$$(4)\quad A\alpha p + C\gamma r = 0$$

erhalten wir für den Fall [1]):

$$A > B > C,\ \beta = 0,$$
$$(5)\quad A(B-C)\alpha^2 = C(A-B)\gamma^2$$

was der von Herrn W. Heß [2]) entdeckten und neuerdings von Herrn P. Nekrassoff durchgeführten [3]) particulären Lösung des Problems der Bewegung eines allgemeinen Kreisels mit festem Unterstützungspunkte ganz analog ist.

Nehmen wir nach Nekrassoff für die fest mit dem Körper in G verbundenen Axen statt der Hauptträgheitsaxen folgende Axen an: 1) Als $\overline{\underline{Y}}$-Axe diene diejenige des mittleren Trägheitsmoments. 2) Die negative Richtung der $\overline{\underline{Z}}$-Axe enthalte den Unterstützungspunkt O. 3) Die $\overline{\underline{X}}$-Axe sei senkrecht auf $\overline{\underline{Z}}\,\overline{\underline{Y}}$. Indem wir durch P, Q, R die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um diese Axen $\overline{\underline{X}}, \overline{\underline{Y}}, \overline{\underline{Z}}$ und durch c, c', c'' die Richtungscosinus der z-Axe gegen die neuen Axen bezeichnen, haben wir folgende Transformationsformeln für den Uebergang von dem einen zu dem anderen Axenkreuz:

$$c = -\gamma\lambda + \alpha\nu,\ c' = \mu,\ c'' = -(\alpha\lambda + \gamma\nu),$$
$$P = -\gamma p + \alpha r,\ Q = q,\ R = -(\alpha p + \gamma r).$$

Dann können die Integralgleichungen (3) mit Zuhülfenahme der Gleichungen (4) und (5) auf folgende Form gebracht werden:

1) Es ist leicht einzusehen, daß wegen dieser Bedingungen der Unterstützungspunkt O auf einer der beiden zu den Kreisschnitten des Gyrationsellipsoids in G senkrechten geraden Linien liegen muß.

2) Math. Ann. 37, 1890.

3) Math. Ann. 47, 1896.

$$(6)\quad \begin{cases} Pc + Qc' = l_1, \\ P^2 + Q^2 = l_2 - 2c'' \dfrac{MgL}{B} - \dfrac{M}{B} z_G'^2, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases}$$

wo l_1 und l_2 die Integrationsconstanten bezeichnen, während das particuläre Integral (4) die Form annimmt:

$$(7)\qquad R - aP = 0, \quad \text{wo}$$

$$a = \frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC}$$

bedeutet.

Aus den Gleichungen (6) und der Gleichung $\frac{dc''}{dt} = qc - pc'$ erhalten wir:

$$(8)\qquad \left(\frac{dc''}{dt}\right)^2 = (1 - c''^2)\left(l_2 - 2c''\frac{MgL}{B} - \frac{M}{B} z_G'^2\right) - l_1^2.$$

Es ist aber wegen der Bedingung (2): $z_G = Lc''$, und die Gleichung (8) verwandelt sich in

$$(9)\qquad \frac{dc''}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - c''^2)\left(l_2 - \frac{2MgL}{B} c''\right) - l_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{ML^2}{B}(1 - c''^2)}} = R;$$

Man erhält so t als ein ultraelliptisches Integral in c''. Führt man in die erste der Gleichungen (6) die Werte von P, Q, c', c'' ausgedrückt durch die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ ein, so erhält man:

$$(10)\qquad \psi' \sin^2\vartheta = l_1.$$

Wir schließen hieraus folgende Interpretation der Bewegung des Schwerpunktes des Kreisels: Er bewegt sich wie der Schwerpunct G eines schweren unendlich dünnen Stabes, dessen Masse $= M$ ist und welcher sich mit einem Ende O auf die Ebene stützt und sich auf ihr frei bewegen kann, und dessen Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt $= B$ ist. Auch läßt sich dieser Fall sofort wie der Heß'sche weiter behandeln und führt in ganz gleicher Weise auf eine lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung. Führen wir in die Gleichung (6) die Werte von P und Q in den Euler'schen Winkeln ein, so erhalten wir mit Hülfe der Gleichung (10):

(11) $$\sin^2\vartheta(\varphi' - a\cos\varphi . \vartheta') + (\cos\vartheta - a\sin\varphi\sin\vartheta)\, l_1 = 0.$$

Indem wir ferner in diese Gleichung eine neue Veränderliche $\tau = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ einführen, erhalten wir mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\sin\vartheta . \frac{d\tau}{dt} = a\frac{l_1 - iR}{2}\tau^2 - il_1\tau\operatorname{cotg}\vartheta - a\frac{l_1 + iR}{2}.$$

Führen wir nun eine andere Veränderliche ein, welche durch die Gleichung $\tau = \dfrac{2\sin\vartheta}{a(l_1 - iR)}\dfrac{d}{dt}(lgw)$ definirt ist, so erhalten wir eine lineare Differentialgleichung in w. Die speciellen Fälle des Heß'schen Problem's ($l_1 = 0$, der Fall von Herrn Joukowsky) sind auch specielle Fälle dieses Problems; im Falle $l_1 = 0$ integrirt sich die Gleichung (11) in ganz gleicher Weise wie dort.

St. Petersburg im Januar 1898.

Bemerkungen zum Hess'schen Falle der Kreiselbewegung.

Von

A. Sommerfeld in Clausthal.

(Vorgelegt von F. Klein).

Der vorstehenden Note des Herrn Kolossoff erlaube ich mir einige Bemerkungen über die geometrische Interpretation des Heß'schen Falles der Kreiselbewegung hinzuzufügen. Eine solche Interpretation ist bereits von Herrn Joukowsky[1]) gegeben worden; ich glaube aber, indem ich die Joukowsky'schen Ueberlegungen in etwas anderer Form und Anordnung anstelle, zur weiteren Klärung des Sachverhaltes beizutragen. Namentlich beabsichtige ich, von einer allgemeinen und naheliegenden Fragestellung aus in naturgemäßer Weise auf den Heß'schen Bewegungsfall hinzuleiten. In der Methode und Bezeichnung schließe ich mich an die jüngst erschienene [2]) „Theorie des Kreisels" an.

1) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III 1892/93 pag. 62 ff.

2) Leipzig bei B. G. Teubner, Heft I 1897.

Es handle sich zunächst um einen allgemeinen Kreisel mit festem Unterstützungspunkte O. G sei der Schwerpunkt; die Linie OG heiße „Schwerpunktsaxe".

Wir wollen fragen, unter welchen Umständen es eintreten kann, daß bei der Bewegung der Impuls[1]) dauernd in einer durch O gehenden, im Körper festen Ebene enthalten sei. Analytisch gewandt, bedeutet dieses, ob und wann ein in den Impulscoordinaten L, M, N bez. in den Geschwindigkeitscoordinaten p, q, r lineares homogenes Integral der Euler'schen Gleichungen mit constanten Coefficienten möglich ist.

Die Lage des Impulsvectors zu irgend einer Zeit ergiebt sich, wenn wir den jeweils vorhandenen Impuls mit dem unendlich kleinen Drehstoß der Schwere zusammensetzen. Die Axe des letzteren steht auf der durch die Schwerpunktsaxe gelegten Verticalebene senkrecht. Der Endpunkt des Impulses schreitet also stets senkrecht gegen die Schwerpunktsaxe fort.

Soll nun der Impuls dauernd in einer festen Ebene des Körpers liegen, so kann dieses keine andere Ebene sein, als die durch O gelegte Normalebene der Schwerpunktsaxe. Ihre Gleichung lautet, unter α, β, γ die Richtungscosinusse der Schwerpunktsaxe gegen die Hauptaxen im Punkte O verstanden:

$$(1) \qquad \alpha L + \beta M + \gamma N = 0$$

oder, wegen $L = Ap,\ M = Bq,\ N = Cr$:

$$(1') \qquad \alpha A p + \beta B q + \gamma C r = 0.$$

Dies ist bereits der Form nach das von Herrn W. Heß gefundene particuläre Integral der Bewegungsgleichungen des allgemeinen Kreisels.

Es ändert sich aber nicht nur die Lage der Impulsaxe infolge der Schwere, sondern auch die Lage des Körpers und insbesondere die der Schwerpunktsaxe infolge der durch den Impuls inducirten instantanen Rotation. Soll nun der Winkel zwischen Impuls- und Schwerpunktsaxe dauernd ein Rechter sein, so muß nicht nur der Impuls-Endpunkt infolge der Schwerewirkung senkrecht zur Schwerpunktsaxe, sondern auch der Schwerpunkt infolge der instantanen Rotation senkrecht zur Impulsaxe fortschreiten. Letzteres findet

---

1) Vgl. Theorie der Kreisels Cap. II, § 3.

nur dann statt, wenn die Rotationsaxe beständig in der durch Impuls- und Schwerpunktsaxe bestimmten Ebene enthalten ist.

Wir erkennen so, daß für das Zustandekommen des Heß'schen Falles der Kreiselbewegung eine besondere Bedingung erforderlich ist, welche sich auf die Massenverteilung des Körpers bezieht. Diese Bedingung soll erst geometrisch, dann analytisch entwickelt werden.

In geometrischer Hinsicht haben wir an die Constructionen zu erinnern, durch welche man die Drehungsaxe aus der Impulsaxe oder umgekehrt finden kann. Man operirt dabei entweder an dem Trägheitsellipsoid

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

oder, was in unserem Falle vorzuziehen, an dem sog. reciproken Trägheitsellipsoide

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

Die Regel zur Auffindung der Drehungsaxe bei gegebener Lage der Impulsaxe besagt dann bekanntlich Folgendes: Man markire auf dem reciproken Ellipsoide die Durchstoßungspunkte der Impulsaxe und construire in einem dieser Punkte die Tangentialebene; dann liefert das vom Mittelpunkt auf diese Tangentialebene gefällte Lot die Richtung der Drehungsaxe.

Wir denken uns nun in dem reciproken Trägheitsellipsoide die Schwerpunktsaxe OG gezogen, ihre Normalebene N durch O gelegt, und denjenigen Kegelschnitt construirt, in welchem N das Ellipsoid schneidet. Wir wollen zeigen, daß dieser Kegelschnitt in unserem Falle ein Kreis sein muß.

Sei J irgend ein Punkt des Kegelschnittes und t die Tangente in J. Dann giebt OJ eine der Lagen der Impulsaxe an. Durch t werde ferner die Tangentialebene an das Ellipsoid gelegt und von O auf diese Ebene das Lot OD gefällt, welches die zugehörige Richtung der Drehungsaxe bestimmt. Nach der oben gefundenen Bedingung müssen die Geraden OG, OJ und OD beständig in einer Ebene liegen. Es steht aber unsere Tangente t sowohl auf OD wie auf OG senkrecht, da sie die Schnittlinie der auf OD und OG bez. in D und O errichteten Normalebenen darstellt. Mithin steht t auch auf OJ senkrecht. Unser Kegelschnitt hat also die Eigenschaft, daß seine Tangente in jedem Punkte

auf dem vom Mittelpunkt auslaufenden Radiusvector senkrecht steht. Unser Kegelschnitt ist also in der That ein Kreis.

Wir können daher sagen: Für das Zustandekommen des Heß'schen Bewegungsfalles ist erforderlich, daß die Normalebene der Schwerpunktsaxe das reciproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneidet oder daß der Schwerpunkt auf dem in O errichteten Lote zu einer der Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides liegt.

Dies ist die fragliche Bedinguug in derjenigen geometrischen Form, welche ihr von Hn. Joukowsky (vgl. das obige Citat) gegeben ist.

Die analytische Formulirung derselben Bedingung ist nun sofort hingeschrieben. Da die beiden durch O gehenden Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides unter der Voraussetzung $A > B > C$ durch die Gleichung gegeben werden

$$\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)x^2 = \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)z^2$$

und da die Richtung α, β, γ der Schwerpunktsaxe auf einer dieser Ebenen senkrecht stehen soll, so folgt die Proportion

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = \frac{1}{A}-\frac{1}{B} : 0 : \frac{1}{B}-\frac{1}{C}$$

d. h.

$$\beta = 0, \ \alpha^2\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right) = \gamma^2\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right).$$

Dies sind die von Herrn Heß angegebenen analytischen Bedingungen für die Möglichkeit seines Bewegungsfalles.

Man sieht ohne Weiteres ein, daß sich unsere ganze Ueberlegung mit geringen Modificationen auf einen in der horizontalen Ebene spielenden Kreisel übertragen läßt, wodurch die vorstehende Note des Herrn Kolossoff von dem hier eingenommenen Standpunkte aus ihre Bestätigung findet.

Hypothesen für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen[1]).

Von

Emil Wiechert.

Vorgelegt von Ed. Riecke in der Sitzung am 19. März 1898.

1. Vorwort. Die vorliegende Arbeit bildet bis zu einem gewissen Grade die Einleitung für eine zweite, in der experimentelle Untersuchungen über die Kathodenstrahlen besprochen werden, und hat die Aufgabe, die theoretischen Vorstellungen darzulegen, die mich bei meinen Experimenten leiteten. Da diese Vorstellungen auch durch Experimente anderer Forscher eine weitgehende Unterstützung finden, und viele Einzelheiten bei der modernen Diskussion in Rede stehen, so schien es nützlich, eine allgemeine Uebersicht zu geben, die über die unmittelbaren Bedürfnisse der Experimente hinausgeht.

In dem, was man heute noch nicht allgemein anerkennt, oder doch wenigstens in der Regel unausgesprochen läßt, befinde ich

---

1) Von meinen früheren Arbeiten über den gleichen Gegenstand sind ausführlicher gehalten die Abhandlungen: „Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung", Abh. d. phys.-ökonom. Ges. z. Königsberg i. Pr. Jahrg. 1896, p. 1, Sitzungs-Ber. 1896, p. [29]; — „Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik", Wied. Ann. 1896, Bd. 59, p. 283.

Populärere Darstellungen bringen die Vorträge: „Ueber die Bedeutung des Weltäthers", 1. März 1894 und: „Ueber das Wesen der Elektricität", 7. Jan. 1897, beide gedruckt in den Sitzungs-Ber. d. phys.-ökonom. Ges. z. Königsberg i. Pr., der zweite auch in der Naturwiss. Rundschau, 8., 15., 22. Mai 1897; sowie das Referat: „Maxwell's Theorie der Elektrodynamik erweitert durch Berücksichtigung der molekularen Konstitution der Materie", Naturwiss. Rundschau, 21. Nov. 1896.

mich vor allem mit H. A. Lorentz[1]) in vielfacher Uebereinstimmung.

Was die Begründung der weiterhin ohne Beweis angeführten Sätze anbetrifft, so mag auf meine Abhandlung: „Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik“ verwiesen werden.

I. Die fundamentalen Hypothesen.

2. Elektromagnetisches Feld außerhalb der sinnlich wahrnehmbaren Materie. Die Zustandsänderungen des Feldes, denen wir nach Maxwell die Vermittlung der elektrischen und magnetischen Fernwirkungen zuschreiben, gestalten sich besonders einfach, wenn das betrachtete Gebiet nicht merklich sinnlich wahrnehmbare Materie enthält. Es äußern sich dann zwei elektrodynamische Felderregungen, eine „elektrische“ und eine „magnetische“. Die elektrische Erregung hat allem Anscheine nach die Symmetrie einer Verschiebung, d. h. sie besitzt an jeder Stelle des Feldes eine ausgezeichnete Axe, wird bei einer Spiegelung in einer Ebene senkrecht zur Axe umgekehrt und bleibt bei einer Spiegelung in einer Ebene durch die Axe ungeändert. Wie schon von Maxwell hervorgehoben wurde, verhält sich die magnetische Erregung wesentlich anders, indem sie allem Anscheine nach nicht die Symmetrie einer Verschiebung, sondern die einer Drehung hat. Hiermit soll ausgesagt werden, daß zwar auch wie bei der elektrischen Erregung eine ausgezeichnete Axe vorhanden ist, daß aber die Umkehrung bei einer Spiegelung in einer Ebene durch die Axe eintritt und nicht bei einer Spiegelung in einer Ebene senkrecht zur Axe.

3. Elektromagnetische Axiare. Unter solchen Umständen ist es am zweckmäßigsten, bei der mathematischen Analyse der Erscheinungen die elektrische Erregung durch einen „Vektor“ und die magnetische Erregung durch einen „Rotor“ darzustellen. Dabei betrachten wir (in Anlehnung an Hamilton und Clifford) Vektor und Rotor als mathematische Größen, denen beiden „Intensität“ und „Axe“ beigelegt wird, und von denen der Vektor überdies eine der beiden Gleitrichtungen längs der Axe, der Rotor eine der beiden Drehrichtungen um die Axe als ein weiteres Bestimmungsstück erhält. — Gemeinsam für Vektor und Rotor

---

1) La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leiden, E. J. Brill, 1892, auch: Arch. néerl. d. sc. 1892, t. 25. — Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, 1895, Leiden, E. J. Brill.

werde ich den bei einer früheren Gelegenheit vorgeschlagenen Namen „Axiar“ gebrauchen.

Nach dem Vorgang von Maxwell stellt man in der Regel auch die magnetische Erregung durch einen Vektor dar. Dies ist angänglich, weil unter Beziehung auf eine Rechts- oder Linksschraube zu einem Rotor stets eindeutig ein Vektor zugeordnet werden kann, und ist auch bequem, wenn es sich nur um die Beschreibung der magnetischen Erscheinungen handelt; anders wird die Sache, wenn allgemeinere elektrodynamische Erscheinungen beschrieben werden sollen, weil dann die Hinzunahme des fremdartigen Begriffs der Schraube entstellend und komplicirend wirkt. So soll denn im Folgenden der sachgemäßere Begriff des magnetischen Rotors beibehalten werden, und zwar in solcher Definition, daß der Rotor mit dem gebräuchlichen Vektor eine Linksschraube ergiebt. (Die magnetischen Linien des Erdmagnetismus erhalten dann im Allgemeinen einen Drehsinn entgegengesetzt dem der Erdrotation).

Mit R soll der elektrische Vektor in der gebräuchlichen Verfügung über die Axenrichtung und mit H der magnetische Rotor bezeichnet werden.

4. Elektromagnetische Feldenergie. Die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie setzen wir mit Maxwell

$$= \frac{1}{8\pi}(R^2 + H^2).$$

Es ist damit für die elektromagnetischen Erregungen ein bestimmtes Maaßsystem vorgeschrieben, und zwar das sogenannte „statische“.

Mit Poynting nehmen wir an, daß die Energieströmung mit der Intensität

$$\frac{V}{4\pi} R H \sin(R, H)$$

senkrecht zu R und H erfolgt und zwar in derjenigen Richtung, die durch eine Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H aus der zu H senkrechten Komponente von R hervorgeht. — V bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

5. Räumliche und zeitliche Variationen der Erregungen. Werden in Anlehnung an Hertz die Komponenten von R und H parallel den Axen eines rechtwinklichen Koordinatensystems mit X, Y, Z und L, M, N bezeichnet, so gelten für die räumliche Vertheilung und die zeitlichen Aenderungen der Erregungen die Beziehungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0; \qquad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

$$\frac{dX}{dt}=-V\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right); \qquad \frac{dL}{dt}=V\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right);$$

$$\frac{dY}{dt}=-V\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right); \qquad \frac{dM}{dt}=V\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{dZ}{dt}=-V\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right); \qquad \frac{dN}{dt}=V\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Weiterhin ist es für uns bequemer, nicht diese Differentialformeln, sondern die folgenden Integralformeln zu benutzen, die mit ihnen gleichwerthig sind und die Bezugnahme auf ein Koordinatensystem vermeiden:

$$\text{Flächenint}^{\circ} R = 0; \qquad \text{Flächenint}^{\circ} H = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, R = -V\,\text{Randint}\, H;$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, H = \quad V\,\text{Randint}\, R.$$

Als „Flächenintegral" eines Axiars gilt hier in der gebräuchlichen Weise das Integral $\int d\sigma\, K_n$, wenn $d\sigma$ das Flächenelement, K_n die Normalkomponente des Axiars bedeutet. Der Kreis als oberer Index soll anzeigen, daß es sich um geschlossene Flächen handelt.

Als „Randintegral" gilt das Linienintegral $\int d\lambda\, K_\lambda$ längs der Randkurve, wobei $d\lambda$ das Linienelement, K_λ die Tangentialkomponente des Axiars bedeutet.

6. Elektromagnetisches Feld innerhalb der sinnlich wahrnehmbaren Materie. Die elektromagnetischen Erscheinungen innerhalb der sinnlich wahrnehmbaren Materie können so aufgefaßt werden, als ob das soeben beschriebene Feld sich durch die Materie mit unveränderten Eigenschaften und ohne an den wahrnehmbaren Bewegungen theilzunehmen lückenlos fortsetzt. Der ganze Unterschied zwischen innen und außen besteht dann darin, daß sich innen eine Wechselwirkung zwischen Feld und Materie superponirt.

7. Einwirkung der Materie auf das Feld; Prinzip der Superposition. Von dieser Wechselwirkung soll zunächst die Einwirkung der Materie auf das Feld betrachtet werden, die sich in einer elektromagnetischen Erregung äußert.

Für die Felderregung außerhalb der Materie gelten nach

Artikel 5 Gesetze solcher Art, daß stets wiederum eine mögliche Erregung in ihrer räumlichen Vertheilung und ihren zeitlichen Aenderungen hervorgeht, wenn beliebig viele mögliche Erregungen fortlaufend in entsprechenden Zeitmomenten superponirt werden. Von der Einwirkung der Materie auf das Feld nehmen wir nun an, daß sie diesen Satz nicht aufhebt. Eine elektrodynamische Erregung innerhalb eines beliebigen Gebietes kann dann einfach aufgefaßt werden als Superposition der Erregungen, die durch die Umgebung und durch die einzelnen im Gebiete vorhandenen Körper verursacht werden.

Bei der weiteren Ausführung dieses Gedankens gelangt man zu der folgenden eigenthümlichen Vorstellung von dem Verlaufe der wirklichen Vorgänge: Man denke sich von dem beobachteten System nacheinander stets nur einen einzelnen der Körper vorhanden und das Feld nur von diesem beeinflußt, nehme an, daß er alle Bewegungen und Zustandsänderungen gerade so durchlaufe wie im wirklichen Falle und superponire die sämtlichen so bestimmten Erregungen des Feldes unter Hinzufügung der von außen eindringenden Erregung: dann entsteht die Felderregung im wirklichen Falle.

8. Fortpflanzung der elektrodynamischen Erregung innerhalb der Materie. Fast scheint es hiernach, als ob nach unseren Hypothesen entgegen der Erfahrung die Einwirkung eines jeden materiellen Körpers auf das elektromagnetische Feld ganz unabhängig sein müsse von den übrigen Körpern; daß insbesondere die Fortpflanzung der elektromagnetischen Erregung, die von einem Körper ausgeht, von den übrigen Körpern nicht beeinflußt werden könne. Dieser Schein ist entstanden, weil wir vorläufig nur die eine Seite der Vorgänge ins Auge faßten: die Einwirkung der Körper auf das Feld. Er verschwindet, wenn auch der Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf die Bewegungen und Zustandsänderungen der Körper beachtet wird. Unsere Vorstellung, daß ein jeder Körper des Systemes gezwungen werden könne, auch bei Abwesenheit der übrigen und bei entsprechend anderem Verlaufe der elektrodynamischen Felderregungen die gleichen Bewegungen und Zustandsänderungen zu durchlaufen wie im wirklichen Falle, ist eine Fiktion, die nur insofern Sinn und Bedeutung hat, als sie die Hypothesen von der Wechselwirkung zwischen Feld und Materie illustrirt. Nur weil für unsere Auffassung die Wechselwirkung zerlegt wird in die Einwirkung der Materie auf das Feld vermöge ihrer Eigenart, ihrer Bewegungen und ihrer Zustandsänderungen — und in die Ein-

wirkung des Feldes auf die Bewegungen und die Zustandsänderungen der Materie, erscheint der Einfluß der Materie auf die Fortpflanzung der elektromagnetischen Erregung als etwas nicht unbedingt Gegebenes, sondern als indirekte Folge von Bewegungen und Zustandsänderungen, die durch hinzugedachte Kräfte modificirt, ja aufgehoben werden können.

Würde es sich nur um Bewegungen der Körper im Ganzen oder in Theilen handeln, so fände das Verständniß unserer Zweitheilung wohl keine Schwierigkeiten. Diese stellen sich erst ein, wenn allgemeinere Zustandsänderungen ins Auge gefaßt werden. Unter solchen Umständen ist es wichtig, daß wir im Folgenden den gesammten Einfluß der Materie auf die Fortpflanzung der elektromagnetischen Erregung werden durch Bewegungen erklären können, falls zu den sichtbaren Bewegungen auch molekulare hinzugenommen werden. Denn gleichgültig, ob so den Thatsachen völlig entsprochen wird oder nicht, ist damit jedenfalls bis auf Weiteres die Berechtigung unserer Auffassung sicher gestellt.

9. Erregung in der Umgebung eines Körpers; elektrische und magnetische Ladung. Die Hypothese der Superposition ermöglicht es, die elektromagnetische Wirkung der einzelnen materiellen Körper für sich zu betrachten. Denken wir uns nun also einen Körper, dessen Umgebung bis auf weite Entfernungen hin nicht merklich weitere Materie enthält.

Wir knüpfen an das Flächenintegral $\int d\sigma\, R_n$ des elektrischen Vektors, das nach Artikel 5 auf jeder geschlossenen Fläche um den Körper, die diesen nirgends berührt, einen von der Zeit unabhängigen Werth hat. Wäre der Körper nicht vorhanden, so müßte dieser Werth nach Artikel 5 verschwinden. Die einfachsten Erfahrungen der Elektrostatik lehren andererseits, daß bei Anwesenheit des Körpers von 0 verschiedene Werthe vorkommen können: Hier zeigt sich dann ein Einfluß der Materie auf das Feld.

Der Werth des Flächenintegrales bei nach außen gerichteter Normale n sei $= 4\pi e$. Die Zahl e ist nach dem soeben Gesagten konstant, solange der Körper nicht durch die Fläche hindurchtritt; sie hat ferner wegen der von der räumlichen Vertheilung des Vektors erfüllten Bedingung auf allen Flächen, die den Körper umschließen, den gleichen Werth, und erscheint daher allein durch die Beschaffenheit des Körpers selbst bestimmt. Man bezeichnet sie als die „elektrische Ladung“ des Körpers.

Eine entsprechende „magnetische Ladung“ giebt es erfahrungsgemäß nicht, d. h. das Flächenintegral

$$\int d\sigma\, H \cos(n, H) = \int d\sigma\, H_n$$

ist auf jeder geschlossenen Fläche = 0.

10. Stationäre Erregung in der Umgebung eines ruhenden oder in beschränktem Gebiet sich bewegenden Körpers. Denken wir uns den Körper zunächst in Ruhe. Eine mathematische Untersuchung auf Grund der Gesetze des Artikels 5 lehrt, daß dann in großen Entfernungen der stationäre Theil der elektrodynamischen Erregung, d. h. derjenige Theil, den man durch Mittelbildung über die Zeit erhält, vollständig durch e bestimmt wird. Dem Coulomb'schen Gesetze entsprechend und mit ihm zusammenhängend ergiebt sich für die elektrische Erregung die von dem Körper fort oder auf ihn hinweisende Richtung, jenachdem e positiv oder negativ ist, und die Intensität e/r^2, wenn man sich auf die vom Körper fortweisende Richtung bezieht und mit r die Entfernung bezeichnet. — Die entsprechende mittlere magnetische Erregung verschwindet.

Die vorstehenden Sätze gelten auch dann, wenn der Körper sich innerhalb eines begrenzten Gebietes hin- und herbewegt; bei der Mittelbildung in Bezug auf die Zeit sind dann so große Zeitintervalle zu nehmen, daß in ihnen die mittlere fortschreitende Bewegung parallel irgend einer Richtung = 0 gelten darf.

In größerer Nähe des Körpers oder des Bewegungsgebietes ist die Felderregung im Allgemeinen komplicirter und umfaßt in der Regel auch eine magnetische Erregung. Charakteristisch ist dabei, daß das Feld von dem Körper oder dem Bewegungsgebiet aus gesehen in den verschiedenen Richtungen ungleichmäßig erregt erscheint. Die komplicirteren Formen der Felderregung sind daher an eine bestimmte Orientirung des Körpers oder an eine gewisse Ordnung in seiner Bewegung gebunden.

11. Stationäre Erregung bei gleichmäßig geradliniger Bewegung. Auch für den Fall der gleichmäßigen geradlinigen Bewegung wird in hinreichend großen Entfernungen von dem Körper der stationäre Theil der elektromagnetischen Erregung vollständig durch die elektrische Ladung bestimmt. — Zu der elektrischen Erregung tritt hier auch eine magnetische. — Ist wiederum r der Abstand von dem Körper; bedeutet ferner ϱ den Abstand von der Bahnlinie, v die Geschwindigkeit, so ergiebt sich:

$$R = \frac{e}{r^2} \frac{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}; \qquad H = \frac{e}{r^2}\,\frac{\varrho}{r}\,\frac{v}{V}\,\frac{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

R ist wiederum bei positivem Vorzeichen von e von dem Körper fort-, andernfalls auf ihn hingerichtet. Die Axe des magnetischen Rotors H steht überall senkrecht auf der Ebene durch die Bahnlinie; die Drehrichtung ist solcher Art, daß Wirbelringe um die Bahnlinie angedeutet werden, in denen die Bewegung bei positiver Elektrisirung außen, bei negativer innen voreilt[1]).

12. Elektromagnetische Energie der Bewegung. Die elektromagnetische Energie des Feldes ist bei der Bewegung des elektrisirten Körpers größer als im Falle der Ruhe, und zwar ergeben unsere Formeln bei kleinen v/V für den Mehrbetrag außerhalb einer Kugel mit dem Radius a näherungsweise den Werth

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{wobei} \quad m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \frac{1}{V^2}.$$

Es ist also E ebenso wie die sogenannte „kinetische Energie" proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

13. Einwirkung des Feldes auf die Materie. Die elektrische Ladung eines Körpers hat eine Einwirkung des elektromagnetischen Feldes auf ihn zur Folge. Wir machen in dieser Hinsicht die folgende Annahme:

Ein Körper mit der Ladung e erfährt in einem elektromagnetischen Felde, das abgesehn von der sich superponirenden Einwirkung des Körpers als homogen gelten kann, eine mechanische Kraft, die als Resultante einer von seiner Bewegung unabhängigen und deren einer von seiner Bewegung abhängigen Kraft erscheint. Die von der Bewegung unabhängige Einzelkraft wird durch die elektrische Felderregung bestimmt, besitzt die Intensität eR und ist ebenso oder entgegengesetzt wie R gerichtet, jenachdem e positiv oder negativ ist. Die von der Bewegung abhängige Einzelkraft wird durch die magnetische Erregung bestimmt, besitzt die Intensität

$$e \frac{v}{V} H \sin(v, H),$$

steht senkrecht auf H und v und ist so gerichtet, daß sie den Körper im Sinne von H oder entgegengesetzt herumzuführen strebt, jenachdem e positiv oder negativ ist.

II. Verwerthung der Molekulartheorie.

14. Einfachste Grundlage für die Theorie. Während wir bisher die materiellen Körper stets als Ganzes auffaßten,

1) Das Bild der Wirbelringe dient hier allein zur Illustrirung und soll durchaus keinen Hinweis auf entsprechende physikalische Vorgänge andeuten.

wird es nunmehr nöthig, sie durch Berücksichtigung der molekularen Konstitution in Elemente zu zerlegen.

Um zunächst die denkbar einfachste Form der Theorie aufzusuchen, wollen wir vorläufig allein die durch e gemessene Ladung der Atome und Moleküle berücksichtigen, also annehmen, daß eine weitere elektrische Differentiirung nicht zur Geltung komme, und daß eine besondere magnetische Erregung überhaupt nicht stattfinde. Erst im Schlußartikel dieses Abschnittes wird die Möglichkeit komplicirterer Verhältnisse erwogen werden.

15. Veränderung der Feldgleichungen durch die molekularen Ladungen. Freie Elektricität. Nach der in Artikel 9 gegebenen Definition der elektrischen Ladung und nach dem in Artikel 7 aufgestellten Prinzip der Superposition ist für jede geschlossene Fläche bezogen auf die nach außen gerichtete Normale zu setzen:

$$\text{Flächenint}^{\circ}(R) = 4\pi e,$$

wobei e die Gesammtmenge der eingeschlossenen Elektricität, d. h. die algebraische Summe der eingeschlossenen Ladungen bedeutet. Man bezeichnet e als „freie Elektricität“.

Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, R = -V\, \text{Randint}\, H,$$

die nach Artikel 5 für eine vollständig berandete Fläche zutrifft, solange die Fläche frei von sinnlich wahrnehmbarer Materie bleibt, wird im Allgemeinen aufgehoben, wenn elektrisirte Materie hindurchströmt. Man kann die Wirkung eines einzelnen elektrisirten Theilchens feststellen, wenn neben der gegebenen Fläche andere mit gleicher Randkurve zur Hülfe genommen werden, die nicht gleichzeitig das Theilchen durchschneiden. Durch Summation der Einzelwirkungen erhält man dann an Stelle der ungültig gewordenen Gleichung die folgende:

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, R + 4\pi i = -V\, \text{Randint}\, H.$$

i bedeutet hier den „elektrischen Strom“ durch die Fläche, d. h. die auf die Zeiteinheit bezogene Gesammtmenge der hindurchgeführten Elektricität. Unter R und H sind in der gewohnten Weise Mittelwerthe zu verstehen, welche die molekularen Variationen nicht berücksichtigen.

Die beiden noch zugehörigen Gleichungen des Artikel 5 bleiben

ungeändert, weil wir eine der elektrischen entsprechende magnetische Ladung nicht annehmen.

i zerfällt gewöhnlich in Theile verschiedenen Ursprungs. Es sind zu unterscheiden: Konvektionsströme, gewöhnliche galvanische Ströme, Ströme wegen der dielektrischen Polarisation und Ströme wegen der Magnetisirung. Die letzteren beiden Arten müssen wir etwas näher untersuchen.

16. Dielektrische Polarisation. Wahre Elektricität. Die dielektrische Polarisation ist nach unserer Theorie durch Verschiebungen der elektrischen Atome und Moleküle zu erklären. Ist Π der Vektor der specifischen Polarisation, Π_ν seine Komponente in der zum Flächenelement $d\sigma$ senkrechten Richtung ν, so giebt $\Pi_\nu d\sigma$ die wegen der Polarisation durch $d\sigma$ hindurchgetretene Elektricitätsmenge an. Hieraus folgt für den dielektrischen Strom:

$$i = \frac{d}{dt} \text{Flächenint } \Pi.$$

Für die freie Elektricität innerhalb einer geschlossenen Fläche ergiebt sich

$$e = e_w - \text{Flächenint}^\circ \Pi,$$

wenn e_w die Elektricität bedeutet, die ohne die Polarisation vorhanden sein würde. Man nennt e_w die „wahre Elektricität“.

17. Magnetisirung. Als Ursache der Magnetisirung haben wir eine gewisse Ordnung in den molekularen Bewegungen anzunehmen, die elektrischen Strömen gleichkommt.

Durch den Rotor M möge die specifische Magnetisirung (magnetische Polarisation) dargestellt werden. Es steht dann M mit den erzeugenden molekularen Bewegungen der elektrischen Theilchen in folgendem Zusammenhang: An der Stelle im magnetisirten Medium, zu der M gehört, werde eine Gerade gezogen, eine der beiden Umkreisungsrichtungen ausgewählt und die zugehörige Komponente von M mit M_ν bezeichnet, dann giebt $-VM_\nu d\lambda$ den um das Längenelement $d\lambda$ wegen der magnetisirenden Bewegungen kreisenden Strom an. Durch eine beliebige Fläche fließt hiernach infolge der Magnetisirung der Strom:

$$i = -V \text{ Randint } M.$$

18. Zusammenstellung der Feldgleichungen. Wenn aus i die Antheile wegen der dielektrischen Polarisation und der Magnetisirung ausgeschieden und gemäß den beiden letzten Artikeln gesondert dargestellt werden, so entstehen die folgenden

der Erfahrung entsprechenden Feldgleichungen für R und H:

$$\text{Flächenint}^\circ R = 4\pi e; \quad \text{Flächenint}\, H = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, R + 4\pi \frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, \Pi + 4\pi i$$
$$= -V\,\text{Randint}\, H + 4\pi V\,\text{Randint}\, M;$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, H = V\,\text{Randint}\, R.$$

in denen i nur noch den galvanischen Strom und den Konvektionsstrom umfaßt. Es gilt dabei für die freie Elektricität e die Gleichung:

$$e = e_w - \text{Flächenint}^\circ \Pi,$$

wobei

$$e_w = e_0 - \int_{t_0} \text{Flächenint}^\circ i$$

die jeweilige wahre Elektricität und e_0 die wahre Elektricität zur Zeit t_0 bedeutet.

19. Magnetische Induktion. Magnetische Kraft. Freier Magnetismus. Im Innern einer unendlich kleinen Höhlung in einem magnetischen Medium ist nach den Gesetzen des vorigen Artikels die Felderregung außer von H und M in der Umgebung auch von der Gestalt der Höhlung abhängig. Im Falle eines gegen seinen Querschnitt unendlich langen Cylinders $\parallel M$ ist die Erregung die Resultante von H und $-4\pi M$. Den so bestimmten Rotor wollen wir mit H bezeichnen.

Führt man H an Stelle von H ein, so nehmen die Feldgleichungen des vorigen Artikels die Gestalt an:

$$\text{Flächenint}^\circ R = 4\pi e; \quad \text{Flächenint}^\circ H = 4\pi m.$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, R + 4\pi \frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, \Pi + 4\pi i = -V\,\text{Randint}\, H;$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, H + 4\pi \frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\, M = V\,\text{Randint}\, R.$$

$$e = e_w - \text{Flächenint}^\circ \Pi; \quad m = -\text{Flächenint}^\circ M.$$

H spielt hier eine analoge Rolle wie die elektrische Kraft R und wird darum „magnetische Kraft" genannt. Ebenso ist m analog zu der freien Elektricität e und heißt darum „freier Magnetismus".

20. Coulomb'sches Gesetz. In den Artikeln 15—19 wurde Lage und Bewegung der elektrischen Theilchen als etwas

Gegebenes angenommen und die zugehörige Felderregung aufgesucht; zur Vervollständigung der Theorie muß nun auch der in Artikel 13 festgestellte Einfluß des Feldes auf die Materie berücksichtigt werden.

Daß die mechanische Kraft eR zum Coulomb'schen Gesetz der Elektrostatik führt ist nach Artikel 10 vorauszusehen. Aus den Formeln des Artikels 18 folgt, daß das Gesetz auch in stationären Stromsystemen noch gültig ist.

21. Nichtleiter und Leiter. In Nichtleitern hat die Kraft eR im Allgemeinen eine Polarisation zur Folge, in Leitern überdies einen galvanischen Strom.

Setzt man in einfachster Annahme Π linear abhängig von R, so ergiebt Artikel 18 für ruhende nicht magnetisirbare Medien die Gesetze der dispersions- und absorptionslosen Optik (sammt ihren Grenzbedingungen), die sich für isotrope Medien so schreiben lassen:

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\,(DR) = -V\,\text{Randint}\,H,$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{Flächenint}\,H = V\,\text{Randint}\,R.$$

Es ist hierbei $\Pi = pR$ und $D = 1 + 4\pi p$ gesetzt. D heißt „Dielektricitätskonstante". Die Lichtgeschwindigkeit ist $= V/\sqrt{D}$.

Um für Leiter speciell zum Ohm'schen Gesetz zu gelangen, ist es nöthig die elektrische Strömung linear abhängig von der treibenden Kraft R anzunehmen.

22. Ponderomotorische Kräfte in Systemen von Strömen und Magneten. Die an einem elektrisirten Theilchen wegen der magnetischen Felderregung angreifende Kraft

$$e\frac{v}{V}H\sin(v, H)$$

ergiebt für ein lineares Stromelement $id\lambda$ oder ein räumliches Stromelement $\Gamma d\omega$ — wobei Γ die Stromdichte bedeutet — eine mechanische Kraft von der Intensität

$$\frac{i}{V}d\lambda\,H\sin(i, H) \quad \text{oder} \quad \frac{\Gamma}{V}d\omega\,H\sin(\Gamma, H),$$

die senkrecht steht auf H sowie auf $d\lambda$ oder Γ und so gerichtet ist, daß sie durch eine Drehung um 90° im Sinne von H aus der zu H normalen Komponente von i oder Γ hervorgeht. Da dieser Satz unsere Erfahrungen über die ponderomotorischen Kräfte in Stromsystemen zusammenfaßt, sind diese sowie die Kräfte zwischen

Magneten untereinander und zwischen Magneten und Stromsystemen erklärt.

23. Dia- und Para-Magnetismus. Elektrisirte Theilchen, die bei den Wärmebewegungen hin- und hergehen und dabei nicht an eine bestimmte Linie gebunden sind, sondern in einer Fläche oder allseitig im Raume schwingen können, werden durch die Kraft $e\frac{v}{V}H\sin(v, H)$ in ihren Bewegungen so beeinflußt, daß eine Diamagnetisirung entsteht. — Zur Erklärung des Paramagnetismus verlangt unsere Theorie die Annahme vorgebildeter Stromsysteme, die sich unter dem Einfluß der magnetischen Erregung des Feldes drehen. Hiermit stimmt die Erfahrungsthatsache gut zusammen, daß alle der Hysteresis und des selbstständigen Magnetismus fähigen Körper paramagnetisch sind.

Bei den stark magnetisirbaren paramagnetischen Körpern scheint nach dem Verhalten des Eisens zu urtheilen die magnetische Kraft H für die Magnetisirung entscheidend zu sein. Nach der in Artikel 19 dargelegten Bedeutung von H ist deßhalb zu schließen, daß die gedrehten molekularen Stromsysteme in Linien $\| M$ geordnet sind.

24. Elektromagnetische Induktion. Für ruhende Körper erhalten wir über die in einer geschlossenen Kurve inducirte elektromotorische Kraft E durch Artikel 18 unmittelbar den bekannten Erfahrungssatz:

$$E^\circ \equiv \text{Linienint}^\circ R = \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\text{Flächenint}\, H.$$

Auch für bewegte Medien entspricht die Theorie genau der Erfahrung. Die mechanischen Kräfte $e\frac{v}{V}H\sin(v, H)$ haben nämlich zur Folge, daß eine scheinbare elektrische Kraft R' auftritt, die gerade so wirkt wie R. Es ist dieses die infolge der Bewegung „inducirte elektrische Kraft“. An einer Stelle innerhalb eines Körpers, an der die Geschwindigkeit v' herrscht, hat sie die Intensität $\frac{v'}{V}H\sin(v', H)$; ihre Richtung entsteht durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Sinne von H aus der zu H normalen Komponente von v', ist also normal zu v' und H.

Die Berücksichtigung dieser inducirten elektrischen Kraft führt unter anderem auch zur Theorie der Optik für bewegte Medien.

25. Metallische Leitung. Die Artikel 15—24 zeigen,

daß unsere Theorie bei aller ihrer Einfachheit die elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen in sehr weitem Umfang umfaßt. Doch ist wohl zu beachten, daß vorläufig noch zwei tief eingreifende Lücken geblieben sind. Erstens läßt sich die metallische Leitung zunächst nicht in unser System einordnen, denn da die chemischen Atome an ihren Plätzen bleiben, scheinen hier die elektrisch geladenen materiellen Theilchen zu fehlen, deren Wanderungen wir die Fortführung des elektrischen Stromes zuschreiben können. Zweitens sagt die Theorie nicht, was die Aenderung der molekularen Ladung bedeutet, die erfahrungsmäßig bei der Elektrolyse an den Ein- und Austrittstellen des Stromes stattfindet.

Die einzige konsequente Art, die metallische Leitung in die Theorie aufzunehmen, besteht darin, diese Leitung trotz der fehlenden unmittelbaren Einsicht dennoch als eine molekular-konvektive anzusehen. Damit dieses möglich werde, ist es nöthig, neben den Atomen der Chemie noch andere materielle Atome anzunehmen und diesen in den Metallen die Rolle der Ionen zu übertragen.

26. Verbindung von Materie und Elektricität. Sind wir erst einmal so weit gegangen, so bietet sich der Standpunkt ganz von selbst dar, den wir gegenüber den Aenderungen der molekularen Ladungen einnehmen müssen. In Artikel 9 wurde erkannt, daß die Ladung eines materiellen Theilchens sich jedenfalls nicht ändert, solange eine Berührung mit anderer Materie nicht stattfindet: offenbar muß dieser Satz nunmehr zu der Hypothese verallgemeinert werden, daß die Ladung eines materiellen Theilchens sich bei den für uns in Betracht kommenden Naturvorgängen überhaupt nicht ändert.

Die Aenderung der Ladung eines Körpers oder Moleküles bedeutet hiernach stets eine Aenderung seines materiellen Bestandes, und die Ladung eines jeden der für unsere Theorie elementaren Theilchens erscheint in der Eigenart seiner Verkettung mit dem elektromagnetischen Felde ein für alle Mal fest begründet.

27. Specielle elektrische Atome. Die chemische Zertheilung der Materie in Atome ist nach den Ausführungen der beiden letzten Artikel als unvollständig anzusehen.

Betrachten wir einige Folgerungen. Die in chemischer Hinsicht einatomigen Moleküle des Quecksilberdampfes sind nach unserer Theorie weiter theilbar, da sie durch Verdampfung aus dem metallisch leitenden festen oder flüssigen Quecksilber hervorgehen und darum die speciellen zur metallischen Leitfähigkeit gehörigen

elektrischen Atome enthalten müssen. — Anders wie im Knallgas sind im Wasser die Wasserstoffatome sämmtlich positiv, die Sauerstoffatome sämmtlich negativ. Zur Erklärung des Unterschiedes müssen wir annehmen, daß die Verbindung mit den speciellen elektrischen Atomen in den beiden Fällen eine andere ist.

Diese und ähnliche Ueberlegungen zusammen mit der Erinnerung an die Verknüpfung der elektrischen molekularen Ladungen mit den chemischen Valenzen lassen erkennen, daß die speciellen elektrischen Atome sich in ausgezeichneter Weise an dem Bau der materiellen Körper und ihrer Moleküle betheiligen, und daß ihre Beziehungen zu den Stammatomen der chemischen Elemente für deren chemischen Charakter, insbesondere auch für deren Werthigkeit von größter Wichtigkeit sind.

28. Kathodenstrahlen. In meinen Arbeiten bis Ende 1896 mußte ich den Inhalt der drei letzten Artikel trotz seiner einschneidenden Bedeutung für die Theorie als rein hypothetisch darstellen; in der Abhandlung „Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik" hielt ich es darum sogar für zweckmäßig, die hierher gehörigen Spekulationen einmal bei Seite zu lassen. Seitdem ist die Stellung der Theorie glücklicher Weise bei weitem günstiger geworden, denn es sind unabhängige Anzeichen für die Existenz der speciellen elektrischen Atome aufgefunden worden.

Zunächst kommen die Kathodenstrahlen in Betracht. Es möge mir erlaubt sein, hier mit einem Hinweis auf eigene Arbeiten zu beginnen. Bei Experimenten im Anschluß an die Röntgen'sche Entdeckung fand ich Anzeichen dafür, daß die Kathodenstrahlen aus Theilchen geringerer Masse bestehen, als wir sie in den chemischen Atomen kennen. Bis zum Ende 1896 gelangte ich so weit, in dem Doppelvortrag „Ueber das Wesen der Elektricität" und „Experimentelles über die Kathodenstrahlen" am 7. Januar 1897 behaupten zu können, die Masse der Theilchen in den Kathodenstrahlen sei 2000—4000 mal kleiner als die der Wasserstoffatome, sodaß wir nicht die gewöhnlichen chemischen Atome vor uns haben. — Wenige Monate später hat J. J. Thomson[1]) Folgerungen ganz ähnlicher Art ausgesprochen.

Die Emissionhypothese der Kathodenstrahlen, die den Schlüssen von Thomson und mir zu Grunde lag, war damals noch vielfach bestritten. Seitdem sind durch die Bemühungen vieler Experimentatoren alle Zweifel gründlichst beseitigt worden, sodaß wir sie als sicher gestellt annehmen können. Einen Beitrag in dieser

---

1) Phil. Mag. (5), XLIV, p. 293, 1897.

Hinsicht liefern die Experimente, deren Beschreibung die vorliegende Arbeit vorangeschickt wird.

Die neueren Beobachtungen haben ergeben, daß die Masse der Theilchen in den Kathodenstrahlen in der Nähe der früher von mir angegebenen oberen Grenze liegt, und zwar, daß sie etwas größer ist als 1/2000 der Masse eines Wasserstoffatomes.

Durch alle diese experimentellen Untersuchungen haben meine Schlüsse vom 7. Januar 1897 eine große Zuverlässigkeit gewonnen. Wir dürfen nun der damals aufgestellten Hypothese voll vertrauen, daß in den Kathodenstrahlen eben die negativ elektrischen Theilchen von der Kathode fortgeschleudert werden, die in den Metallen bei der galvanischen Leitung wandern und die bei den Aenderungen der molekularen Ladungen ausgetauscht werden.

29. Zeemann's Phänomen. Vielleicht noch größere Wichtigkeit für die Theorie als die Kathodenstrahlen scheint das von Zeemann entdeckte Phänomen gewinnen zu wollen. Nach der Lorentz'schen Erklärung des Phänomens ist bekanntlich zu schließen, daß die Schwingungen der D-Linien des Natriums von negativ elektrischen Theilchen herrühren, deren Masse etwa 1000 mal kleiner ist als die der Wasserstoffatome. Bei der Unsicherheit des numerischen Werthes liegt darum die von J. J. Thomson ausgesprochene Vermuthung gewiß sehr nahe, daß wir hier eben dieselben Theilchen im Verband mit anderer Materie beobachten, die sich den Kathodenstrahlen selbständig bewegen.

30. Zertheilung der Materie. Es ist bemerkenswerth, daß bisher nur Anzeichen für besondere negativ elektrische Atome neben den chemischen Atomen aufgefunden worden sind. Soviel ich sehe, scheint es sogar möglich, die Annahme entsprechender positiv elektrischer Atome ganz zu entbehren und dennoch allen Erfahrungen gerecht zu werden. Man muß dann den Stammatomen sämmtlicher, einer positiven molekularen Ladung fähigen chemischen Elemente, also den Stammatomen aller Metalle, positive Ladung zuschreiben (und muß z. B. bei dem Hall'schen Phänomen auch die Bewegungen derjenigen dieser Atome beachten, die allein vor- und mit negativen Atomen vereinigt zurückgehen.

Andererseits steht nichts im Wege, besondere positiv elektrische Atome vorauszusetzen, wie das z. B. in der soeben erschienenen Arbeit von E. Riecke „Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme“ [1]) im Anschluß an W. Weber geschieht. Für die Molekulartheorie hat diese Annahme in sofern einen ganz

1) Diese Nachrichten, Math.-phys. Kl. 1898, p. 1.

besonderen Reiz, als sie es möglich macht, in den chemischen Atomen nichts anderes als Aggregate der einfacheren elektrischen Atome zu sehen. Ich habe auf diese, bis an die äußerste Grenze gehende Hypothese schon 1894 in der ersten der citirten Arbeiten hingewiesen, und ich möchte sie auch heute mit J. J. Thomson der Aufmerksamkeit empfehlen, weil sie das einfachste Bild von der Konstitution der Materie bildet. Immerhin aber stehe ich ihr jetzt einigermaßen skeptisch gegenüber.

31. Einige Bedenken. Mein Mißtrauen hängt mit Zweifeln zusammen, ob denn wirklich das elektromagnetische Verhalten der Materie allein auf dem Vorhandensein der durch e gemessenen molekularen elektrischen Ladungen beruhe, wie wir bisher angenommen haben. Diese Hypothese genügt ja freilich zur Erklärung der bekannten Erscheinungen, und muß daher bei der Darlegung der Theorie der Elektrodynamik vorangestellt werden. Aber andererseits scheint es sehr wohl möglich, daß die „elektrische Ladung" für die Verkettung der Materie mit dem elektromagnetischen Felde nur einen ausgezeichneten Fall darstellt, neben dem auch andere Beziehungen stattfinden.

Bei der dielektrischen Polarisation z. B. kommt diese komplicirtere Verkettung vielleicht zur Geltung, sodaß die Aenderung der Polarisation nicht nur Verschiebungen elektrisch geladener Theilchen bedeutet, sondern auch Deformationen der Atome von komplicirterer Art. — Ebenso ist die Magnetisirung vielleicht nicht nur die Folge gewisser Bewegungen elektrischer Theilchen, sondern in vielen Fällen auch die Folge einer direkten magnetischen Wechselwirkung zwischen Feld und Materie, die nicht an bestimmte Bewegungen der Materie gebunden ist.

Werden derartige Komplikationen ins Auge gefaßt, so muß auch mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß die speciellen negativ elektrischen Atome nur eine ausgezeichnete Art der Materie darstellen, deren Bau und deren Verkettung mit dem elektromagnetischen Felde besonders einfach ist, und neben der es noch eine ganze Reihe komplicirterer Arten giebt.

Daß die speciellen negativ elektrischen Atome sich an dem Bau der sogenannten Atome der chemischen Elemente betheiligen, wird ja durch die Zeemann'sche Entdeckung einigermaßen wahrscheinlich gemacht, daß aber die Auflösung neben diesen negativ elektrischen Atomen nur noch eine ähnliche Art positiver Atome ergebe, ist vorläufig eine Hypothese, der gegenüber Vorsicht geboten scheint.

III. Einige Bemerkungen über die Begriffe „Materie", „Aether" und „Elektricität".

32. Molekulare Konstitution der sinnlich wahrnehmbaren Materie. Durch vielfältige Erfahrung wissen wir, daß die sinnlich wahrnehmbare Materie aus einzelnen sehr kleinen Körperchen, den materiellen Atomen, besteht, die bei allen bekannten Naturvorgängen ihre Individualität bewahren. Es kann nicht zweifelhaft sein, daß das unterschiedsreiche Verhalten der sinnlich wahrnehmbaren Materie bei den elektromagnetischen und speciell bei den optischen Erscheinungen ganz auf der Eigenart dieser Atome beruht, und daß ihnen die Abweichungen von den so überaus einfachen Gesetzen für das elektromagnetische Feld außerhalb der Materie zuzuschreiben sind. Man erinnere sich nur an das charakteristische Verhalten des Absorptionsspektrums eines sich chemisch nicht verändernden Gases bei immer weitergehender Verdünnung: Wie die Absorptionslinien schwächer und immer schwächer werden, ihre Stellung und Beschaffenheit aber beibehalten und so anzeigen, daß zwar die Anzahl der störenden materiellen Theilchen kleiner und kleiner wird, ihre Beschaffenheit sich aber nicht ändert.

33. Physikalische Bedeutung der sinnlich wahrnehmbaren Materie. Diese und alle die verwandten Erscheinungen geben uns sicherlich das Recht, zwischen Räumen mit sinnlich wahrnehmbarer Materie und solchen ohne diese zu unterscheiden. Eine ganz andere Frage aber ist es, ob auch die Substanz in diesen Räumen verschieden ist. Hier mahnt uns das bekannte Bild der Thomson'schen Wirbelatome zur Vorsicht und Zurückhaltung. Sehr wohl könnte in Wirklichkeit gerade so wie in diesem Bilde die Materie nicht eine Ansammlung besonderer Substanzen, sondern eine Ansammlung besonderer Dinge bedeuten. — Durch vielerlei Anzeichen werden wir in dieser Vermuthung bestärkt. Vor allem weisen die elektromagnetischen Eigenschaften der Materie, die doch für ihre Konstitution so weitreichende Bedeutung haben, deutlich darauf hin, daß die Materie nichts Selbständiges ist, was sich aus seiner Umgebung herauslösen ließe. Selbst die Trägheit, die doch recht eigentlich der Materie selbst anzugehören scheint, ist vielleicht nur eine Begleiterscheinung elektromagnetischen oder verwandten Ursprungs. Wir haben ja in Artikel 12 erfahren, daß bei einem elektrisch geladenen Körper ein Theil der Bewegungsenergie in der elektromagnetischen Erregung des Feldes enthalten ist; da wir nun an-

nehmen, daß in den scheinbar unelektrischen Körpern positiv und negativ elektrische Theilchen nebeneinanderliegen, so müssen wir auch schließen, daß jedenfalls ein Theil der „Trägheit“ auf Rechnung der elektromagnetischen Verkettung mit dem Felde kommt, und es scheint durchaus möglich, die gesammte Trägheit auf diese oder eine ähnliche Weise zu erklären.

34. Elektromagnetisches Feld. Um das optische Verhalten strömender Flüssigkeiten und überhaupt das elektromagnetische Verhalten der bewegten Materie zu erklären, müssen wir unbedingt ein elektromagnetisches Feld annehmen, das die sinnlich wahrnehmbaren Bewegungen der Materie nicht mitmacht.

Ob diesem ruhenden Felde auch ein besonderer ruhender Stoff entspricht, wissen wir nicht. Nothwendig ist es durchaus nicht: Auch die Flamme einer Lampe erscheint uns als ein ruhender Körper und dennoch ist uns recht wohl bekannt, wie sehr der sinnliche Eindruck hier in die Irre führt. So mag auch das elektromagnetische Feld nur deßhalb in Ruhe verharren, weil es an den Bewegungen des Stoffes, der die Welt erfüllt, und dessen Zustand es in einer gewissen Hinsicht darstellt, nicht merklich theilnimmt.

35. Definition von Materie, Elektricität und Aether. Nach diesen Auseinandersetzungen scheint es möglich, die Bedeutung der Worte „Materie“, „Elektricität“ und „Aether“ mit einiger Schärfe festzustellen.

Es ist zweckmäßig und natürlich, die Gesammtheit der Moleküle, an die sich unsere sinnliche Wahrnehmung zunächst knüpft, als „Materie“ zu bezeichnen. — Die Ausdrücke „Stoff“ und „Substanz“ können dann allgemeinerer Verwendung vorbehalten bleiben.

Nicht zweifelhaft können wir ferner über das Wort „Elektricität“ sein: Um die Darstellung zu vereinfachen, fingiren wir als Träger der elektromagnetischen Eigenschaft der Materie, die durch unsere Größe e gemessen wird, einen besonderen Stoff, dessen Menge wir mit e proportional setzen, und nennen ihn „Elektricität“.

Weniger einfach steht es um das Wort „Aether“, weil damit von jeher die verschiedensten hypothetischen Dinge bezeichnet worden sind.

Vom Standpunkte unserer Theorie aus könnte man zunächst daran denken, einfach den die Welt erfüllenden Stoff ohne Unterscheidung „Aether“ zu nennen. Dann wäre die sinnlich wahrnehmbare Materie nur eine besondere Form des Aethers oder eine Erscheinung im Aether, wie z. B. nach der Thomson'schen Hypothese ein System von Wirbeln im Aether. Es scheint aber doch

für die Darstellung, vorläufig wenigstens, nützlicher zu sein, das Wort Aether specieller zu fassen und mit ihm einen vielleicht wirklich vorhandenen, vielleicht nur imaginären ruhenden Stoff zu bezeichnen, der dem ruhenden elektromagnetischen Felde entspricht und dessen Träger darstellt. In dieser Bedeutung habe ich es in meinen letzten Arbeiten verwendet.

Die vorgeschlagenen Definitionen von Materie und Aether empfehlen sich besonders deswegen, weil sie sich jeder Hypothese über das tiefere physikalische Wesen dieser Dinge enthalten und in ihnen nichts anderes sehen als Naturerscheinungen, deren weitere Erforschung uns obliegt. So wird der thatsächliche Stand unserer Wissenschaft jedenfalls einigermaßen richtig wiedergegeben.

Beobachtungen über Festigkeit bei homogener Deformation, angestellt von L. Januszkiewicz.

Mitgetheilt von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 30. April 1898.)

In einer früheren Arbeit habe ich eine Methode angegeben und angewendet, um die Festigkeit in einem allgemeineren Falle homogener Deformation, als ehedem erreichbar, der Messung zu unterwerfen [1]). Während die älteren hierher gehörigen Beobachtungen cylindrische Präparate durch alleinigen Druck oder Zug auf die Grundflächen der Cylinder zerbrachen, waren bei meinen Messungen jene Präparate neben einem Zug auf die Grundflächen noch einem gleichförmigen Druck auf die Mantelfläche ausgesetzt. Diese Untersuchungen waren in der Absicht unternommen, festzustellen, ob für das Zerbrechen eines bestimmten Körpers bei homogener Deformation die Erreichung einer Grenzspannung oder aber einer Grenzdilatation maßgebend wäre, — und wenn keines dieser beiden, von verschiedenen Autoren vertretenen Kriterien mit der Erfahrung im Einklang sein sollte, einen Hinweis darüber zu erhalten, in welcher Richtung die wirkliche Bedingung für das Zerbrechen zu suchen wäre. Mehr als ein solcher Hinweis war nämlich deshalb in keinem Falle zu erwarten, weil die angestellten Beobachtungen nicht den denkbar allgemeinsten Fall einer homogenen Deformation betrafen, insofern bei ihnen jederzeit zwei der Hauptdrucke, resp. der Hauptdilatationen unter einander gleich, überdies auch stets positiv waren. Indessen scheinen Messungen über die Festigkeit bei dem allgemeinsten Fall dreier verschiedener Hauptdrucke, resp. Hauptdilatationen außerordentlich schwierig zu

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, Nr. 13, p. 521.

sein, und darum war die Beschränkung auf den nächst einfacheren und relativ leicht zu realisirenden Fall geboten.

Die Beobachtungen waren in der Weise angestellt, daß geeignet gestaltete, unter einander möglichst identische Präparate aus Steinsalz durch einseitigen Zug einmal im Luftraum, also unter Atmosphärendruck (gleich 10 g pro Quadratmillimeter), und sodann in einem mit Kohlensäuregas beschickten Recipienten unter einem allseitigen Druck von etwa 52 Atmosphären (gleich 520 g pro Quadratmillimeter) durch die meßbare Spannung einer Spiralfeder zerrissen wurden. Das erhaltene Resultat läßt sich kurz dahin aussprechen, daß innerhalb der Beobachtungsfehler bei gleichen Querschnitten der Präparate im Luftraum, wie im Recipienten die gleiche Federspannung (im Mittel 570 g pro Quadratmillimeter) erforderlich war, um das Zerreißen zu bewirken.

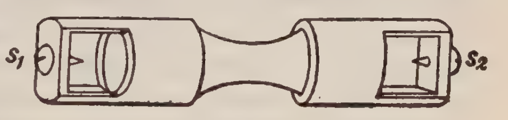
Hiermit waren denn die oben erwähnten beiden Kriterien zugleich als gänzlich unrichtig erwiesen. Denn die longitudinale Spannung ist bei dem Zerreißen in Luft gleich 570 – 10 = 560 g, bei dem im Recipienten gleich 570 – 520 = 50 g pro Quadratmillimeter, und eine einfache Rechnung unter Benutzung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes zeigt, daß auch die Längsdilatationen in den beiden Fällen sehr verschieden sind.

Dagegen schien das erhaltene Resultat ein anderes Kriterium nahe zu legen. Denn da die Federspannung den Ueberschuß des Längszuges über den Querzug (der hier negativ war, nämlich drückend wirkte) darstellt, so war jedenfalls in den untersuchten beiden Fällen die Differenz zwischen dem Zug normal und dem parallel der Zerreißungsfläche (d. h. dem Querschnitt des Cylinders) von gleicher Größe.

Ob dieses Gesetz sich allgemeiner bewährt, muß die Erfahrung lehren. Insbesondere war es nöthig, andere Substanzen als Steinsalz den analogen Beobachtungen zu unterziehen und dabei womöglich den Fall zu realisieren, daß die Präparate bereits bei einer Federspannung zerreißen, die kleiner ist, als die Wirkung des im Recipienten herrschenden Druckes gegen seine Druckflächen; hier würde dann ein cylindrischer Körper durch allseitigen Druck, und zwar einen größeren auf die Mantelfläche, einen kleineren auf die Grundflächen nach einem Querschnitt zerbrochen werden. Diese Messungen hat auf meine Anregung Herr L. Januszkiewicz für einige Körper durchgeführt; der Institutsmechaniker Köhler hat bei den Vorarbeiten für die Beobachtungen erfolgreiche Hülfe geleistet.

Eine für die Herstellung der Zerreißungspräparate geeignete Substanz muß in ziemlich großer Menge und homogener Beschaffenheit zu erlangen sein und amorphe oder feinkörnige Structur besitzen, sie muß sich leicht bearbeiten lassen und darf endlich nur eine geringe Zerreißungsfestigkeit haben, wenn mit den zur Verfügung stehenden Piëzometerdrucken von rund 50 Atmosphären entscheidende Resultate zu erhalten sein sollen.

Die Substanzen, für die wir uns schließlich entschieden, waren verschiedene Gemische aus reiner Stearin- und Palmitinsäure, bei denen sich ein Zusatz von Paraffin der Erzeugung eines feinkörnigen Productes nützlich erwies. Sie wurden bei niedriger Temperatur längere Zeit geschmolzen gehalten, um eine möglichst innige und homogene Mischung zu erhalten, und darauf zur Beseitigung aller Verunreinigungen filtrirt. Die Schmelze wurde dann in eine Form in Gestalt eines flachen länglichen Blech-Kästchens gegossen, und ihr gleichmäßiges langsames Erstarren von unten nach oben dadurch bewirkt, daß die Form auf eine kühle Unterlage gestellt und mit einem heißen Metallblech zugedeckt sich selbst überlassen wurde. Durch diesen kleinen Kunstgriff gewannen wir ein recht homogenes, blasen- und störungsfreies Material, von dem gehofft werden durfte, daß es sich bei den Zerreißungsversuchen regelmäßig verhalten würde.



Der Guß — ein Streifen von beiläufig 20 cm Länge, 4 cm Breite und 1 cm Dicke — wurde dann durch Schnitte normal zu seiner Längsrichtung in Prismen von ca. 1 qcm Querschnitt zerlegt und diese mit Messer und Feile roh zu Kreiscylindern umgestaltet. Diese Cylinder wurden mit ihren Enden in Messingfassungen von der nebenstehend dargestellten Gestalt befestigt und nach Beseitigung der Schrauben s_1, s_2 derart auf die Drehbank gebracht, daß die Spitzen des Futters und der Vorlage in die Mutterbohrungen der Schrauben s_1, s_2 griffen. Bei einiger Vorsicht ließ sich dann das Präparat auf jene nach der Mitte zu allmählich verjüngte Form abdrehen, die ich früher als für Festigkeitsbeobachtungen besonders geeignet bezeichnet habe. Wurden nunmehr die Schrauben s_1, s_2 wieder in die Fassungen gesetzt, so fiel die Verbindungslinie ihrer Spitzen in großer Annäherung mit der Axe des Rotationskörpers zusammen, und wenn das Präparat mit der einen Spitze auf einer horizontalen Unterlage aufgehangen wurde, während auf die andere mittelst eines geeigneten Hakens die Zugkraft ausgeübt wurde,

so wirkte letztere sehr nahe axial auf das Präparat und vertheilte sich daher fast gleichförmig über seinen kleinsten Querschnitt.

Offenbar ist durch dieses Verfahren die für die Verwerthung der Messungen vorauszusetzende Homogenität der Deformation im dünnsten Theile der beobachteten Präparate so vollständig erzielt, daß Abweichungen zwischen den erhaltenen Festigkeitszahlen in ganz überwiegendem Maaße auf Unregelmäßigkeiten des Materiales — Luftbläschen, Sprünge in Folge beim Erstarren entstehender innerer Spannungen u. s. f. — zurückzuführen sind.

Der Apparat, welcher zur Messung der Zerreißungsfestigkeit der Präparate unter Atmosphärendruck und im Compressionsapparat diente, ist in meiner oben citirten Arbeit so genau beschrieben worden, daß es genügt hier auf jene Darstellung zu verweisen.

Es erübrigt somit nur noch die Zusammenstellung und Berechnung der von Herrn L. Januszkiewicz erhaltenen Beobachtungsresultate. Das Gemisch, aus dem er seine Präparate herstellte, enthielt beiläufig 61,5 % Stearinsäure, 22,0 % Palmitinsäure und 16,5 % deutsches Paraffin (Schmelzpunkt ca. 74—80°) und war gewählt, weil unter zahlreichen Probemischungen eine von nahe der vorstehenden Zusammensetzung schön feinkörnig und homogen erstarrte, auch bei vorläufigen Zerreißungsversuchen recht regelmäßige Resultate lieferte. Natürlich können andere Gemische sich ebenso, oder noch besser zu Festigkeitsbeobachtungen eignen.

Dies Gemisch wurde wiederholt benutzt, indem die zerrissenen Präparate theils allein, theils mit proportionalen Zusätzen der Bestandtheile wieder eingeschmolzen wurden. Die Angaben über alle Präparate, die aus einer und derselben Schmelze hergestellt und direct hinter einander beobachtet sind, finden sich in nachstehender Tabelle in je einer Gruppe vereinigt.

In dieser Zusammenstellung beziehen sich die ersten drei Colonnen auf Beobachtungen in der Atmosphäre, d. h. unter einem Druck $D = 10$, die letzten vier Colonnen auf solche im Compressionsapparat, wo D zwischen 320 und 450 variirte. Bei der gewöhnlichen Temperatur im Beobachtungsraum während der winterlichen Zeit stieg der im Recipienten herrschende Sättigungsdruck der Kohlensäure nicht höher. $2R$ bezeichnet den Durchmesser des Präparates an seiner dünnsten Stelle in Millimetern, S die Größe der Federspannung im Moment des Zerreißens, ausgedrückt in Grammen; S/Q ist also der hiervon auf ein Quadratmillimeter des Querschnittes fallende Betrag.

	2R	S	S/Q	R	S	S/Q	D
I	5,0	2830	144	5,1	3250	159	420
	5,1	2750	135	5,1	3130	153	420
	5,2	3000	142	5,0	3200	163	420
	5,2	2750	129	5,2	3000	141	420
	5,2	3130	147	5,1	3050	149	420
				5,0	3300	168	420
II	5,1	3630	178	4,7	2700	156	420
	4,9	2950	156	5,0	2750	140	420
	4,8	2830	156	5,0	2750	140	420
	5,5	4000	168	5,2	3650	172	420
	5,3	3250	151	4,9	2750	146	400
	5,1	3000	147	5,2	2750	130	400
	5,4	3700	162	5,2	4250	200	380
	5,1	3550	174	5,3	3630	164	380
	5,2	3500	165	5,0	3700	188	360
III	5,0	2750	141	5,5	2900	122	420
	5,1	2800	137	5,2	2700	127	420
	5,1	3000	147	5,1	2750	135	420
	5,1	2880	141	5,0	2500	127	390
	5,2	2800	132	5,3	3250	147	390
	5,5	2880	121	5,1	2750	135	380
				5,3	3130	142	370
				5,0	2770	142	350
IV	5,6	3250	132	5,3	2750	125	320
	5,4	3000	131	5,3	4000	181	440
	5,2	2900	135	5,2	3250	153	450
	5,8	4000	162	5,2	3700	174	450
V	5,0	2950	151	5,0	2880	146	440
	5,2	2500	118	5,5	2750	116	440
	5,6	3130	127	5,3	2950	134	440
	5,0	2450	125	5,2	3000	141	440
	5,0	3130	159	5,2	3380	159	440
	5,0	2500	127	5,0	2000	102	440
	5,0	2750	140	5,1	2250	110	440
	5,1	3250	159	5,2	2380	112	440
				5,1	3250	159	440

Ueberblickt man diese Tabelle, so sieht man, daß von Gruppe zu Gruppe die für S/Q erhaltenen Zahlen etwas wechseln, gleich als ob die Festigkeit derselben Mischung durch wiederholtes Umschmelzen sich etwas ändere. Die Zahlen innerhalb derselben Gruppe schwanken nicht mehr, wie es bei Festigkeitsbeobachtungen erfahrungsgemäß immer eintritt; einzelne Gruppen zeigen sogar eine ungewöhnlich gute Uebereinstimmung.

Bildet man aus allen mitgetheilten Werthen von S/Q und D das Mittel, so erhält man:

$$S/Q = 145 \pm 1{,}9 \quad \text{bei} \quad D = 10$$
$$S/Q = 146 \pm 2{,}5 \quad \text{bei} \quad D = 413.$$

Dies Resultat ist in vollständiger Uebereinstimmung mit dem von mir aus meinen Beobachtungen an Steinsalzpräparaten geschlossenen Satz: daß bei gleichen Querschnitten der Präparate im Luftraum, wie im Compressionsapparat die gleiche Federspannung erforderlich war, um das Zerreißen zu bewirken. Es ist jedenfalls von Interesse, daß derselbe, nachdem er an einem Krystall zuerst gefunden war, sich nun auch bei einer amorphen oder körnigen Substanz erprobt hat.

Wichtiger erscheint indessen noch, daß bei diesen Beobachtungen das Zerreißen der Präparate im Compressionsapparat durch einen allseitigen Druck stattgefunden hat. In der That, bezeichnet man den longitudinalen Druck mit P, den transversalen wie bisher mit D, so war im Mittel

$$\text{im Luftraum} \quad P = -135, \quad D = +10$$
$$\text{im Apparat} \quad P = +267, \quad D = +413.$$

Durch diese Zahlen werden die älteren Kriterien des Zerreißungspunktes, die eine Grenzspannung oder eine Grenzdilatation heranziehen, womöglich noch nachdrücklicher widerlegt, als durch meine Beobachtungen, und um so bedeutungsvoller erscheint die Thatsache, daß bei den Messungen des Herrn Januszkiewicz, genau wie bei den meinigen, die Differenz zwischen den gleichsinnig gerechneten Spannungen normal und parallel zur Zerreißungsfläche eine der Substanz individuelle, für den Moment des Zerreißens characteristische Constante ist.

Göttingen, im April 1898.

Thermodynamisches zu den Wechselbeziehungen zwischen Galvanismus und Wärme.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 30. April 1898.

Vor einigen Jahren habe ich eine Behandlung der thermoelectrischen Vorgänge mit Hülfe eines Analogons zu dem thermodynamischen Potential veröffentlicht [1]), dieselbe auch in formeller Umgestaltung, aber sachlich übereinstimmend in meinem Kompendium der theoretischen Physik [2]) wiedergegeben. In beiden Darstellungen finden sich am Schluß Andeutungen darüber, auf welche Weise mit den entwickelten Hülfsmitteln eine Theorie der von Ettinghausen-Nernst'schen thermomagnetischen electromotorischen Kräfte und deren Umkehrung, der galvanomagnetischen Wärmeströmung zu gewinnen ist; aber die dort in Aussicht gestellte Mittheilung der ausführlichen Formeln ist bisher unterblieben — zum Theil, weil zu einer genauen Vergleichung mit der Beobachtung ausreichende Daten fehlen. Nun aber kürzlich mein verehrter College Riecke [3]) den Entwurf einer molekularen Theorie der ganzen Wechselwirkung zwischen electrischer und Wärmeströmung gegeben hat, scheint es an der Zeit, das bisher Versäumte nachzuholen. Dabei werde ich auch die Grundlagen meiner Entwickelungen etwas ausführlicher, als früher geschehen, auseindersetzen; die erhaltenen allgemeinen Formeln sind einmal von Wichtigkeit wegen der weiterhin von ihnen zu machenden Anwendungen, außerdem ist ihre Vergleichung mit den von Herrn Riecke erhaltenen von Interesse.

1) W. Voigt, Göttingen Nachr. 1895, Heft 2.

2) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, Leipzig 1895 u. 1896, Bd. II, S. 323.

3) E. Riecke, Göttinger Nachr. 1898, Heft 1.

I. Wir betrachten das Volumenelement eines Körpers, in dem thermisch-electrische Umsetzungen stattfinden, und wenden auf dasselbe die allgemeine Energiegleichung an, die wir schreiben:

$$d\varepsilon = d'\alpha + d'\omega;$$

in ihr bezeichnet ε die auf die Volumeneinheit bezogene Energie, $d\varepsilon$ deren durch Zuführung der gleichfalls auf die Volumeneinheit bezogenen Beträge $d'\alpha$ von Arbeit und $d'\omega$ von mechanisch gemessener Wärme bewirkten Zuwachs. $d'\alpha$ und $d'\omega$ sind im Allgemeinen keine vollständigen Differentiale.

Handelt es sich um einen stationären Zustand, und bezieht man die obige Formel auf den in der Zeit dt sich wirklich abspielenden Vorgang, so wird $d\varepsilon$ gleich Null sein, wenn man ε, wie gewöhnlich, als Function nur der den augenblicklichen Zustand characterisierenden Variabeln betrachtet. Setzt man noch

$$d'\alpha/dt = \alpha', \quad d'\omega/dt = \omega',$$

bezieht also Arbeit und Wärmezufuhr auf die Zeiteinheit, so resultirt:

$$0 = \alpha' + \omega';$$

diese Gleichung sagt aus, daß in jedem Volumenelement die pro Zeiteinheit absorbirte Wärme ω' die vollständige Compensation der ihm zugeführten Arbeit α' darstellt.

Es ist bekannt, daß diese Beziehung von der Erfahrung nicht bestätigt wird, sowie das Volumenelement einem inhomogen temperirten Körper angehört, und es liegt deshalb die Annahme nahe, daß in dem genannten Falle die Energie des Volumenelementes noch auf eine andere Weise beeinflußt werden kann, als durch Zufuhr von Arbeit und Wärme. Diese Annahme drückt sich aus in der erweiterten Formel

$$1)\qquad d\varepsilon = d'\alpha + d'\beta + d'\omega,$$

in der $d'\beta$ den auf jene dritte Wirkung zurückzuführenden Antheil des Zuwachses $d\varepsilon$ bezeichnet. Für einen stationären Zustand gilt dann bei derselben Deutung wie oben

$$2)\qquad 0 = \alpha' + \beta' + \omega';$$

in dieser Gleichung sind alle drei Größen α', β', ω' auf die Volumen- und die Zeiteinheit bezogen.

Nun werde der Zustand eines Volumenelementes, in dem sich ein stationärer Vorgang abspielt, zu beliebigen Zeiten $t_0, t_1, t_2, \ldots$ ins Auge gefaßt und jedesmal in Gedanken durch Ausübung aller der drei oben genannten Einwirkungen variirt.

Dann gilt nach der Ausgangsgleichung 1) für diese Aenderungen

$$(\delta\varepsilon)_0 = (\delta'\alpha)_0 + (\delta'\beta)_0 + (\delta'\omega)_0,$$
$$(\delta\varepsilon)_1 = (\delta'\alpha)_1 + (\delta'\beta)_1 + (\delta'\omega)_1,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Rücken die Zeitpunkte t_0, t_1, t_2, ... unendlich nahe zusammen, so wird durch unsere Operation der ganze ursprüngliche stetige Vorgang in einen anderen dergleichen verwandelt. Damit der neu erhaltene Vorgang wieder ein stationärer sei, muß auch bei ihm ε zeitlich constant, und desshalb das Increment $\delta\varepsilon$ von der Zeit unabhängig sein. Die Differenz der beiden obigen Formeln, wenn sie auf zwei um dt von einander entfernte Zeitpunkte t_0 und $t_1 = t_0 + dt$ bezogen werden, liefert dann

$$3)\qquad 0 = \frac{(\delta'\alpha)_1 - (\delta'\alpha)_0}{dt} + \frac{(\delta'\beta)_1 - (\delta'\beta)_0}{dt} + \frac{(\delta'\omega)_1 - (\delta'\omega)_0}{dt}.$$

Die allgemeinen Formeln 2) und 3) wollen wir nun durch die Einführung einiger Annahmen und die Ausführung einiger Umformungen weiter entwickeln.

Erstens setzen wir fest, daß der Vorgang ein streng oder wenigstens sehr angenähert umkehrbarer sei; dann gilt

$$4)\qquad \omega' = T\frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad \delta'\omega = T\delta\eta,$$

wobei T die absolute Temperatur und η die auf die Volumeneinheit bezogene Entropie bezeichnet.

Zweitens nehmen wir an, daß der variirte Vorgang sich bei derselben Temperatur abspielt, wie der ursprüngliche; dann ergiebt sich

$$5)\qquad \frac{(\delta'\omega)_1 - (\delta'\omega)_0}{dt} = T\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial t} = T\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right).$$

Ferner benutzen wir, daß nach Formel 2) bei dem ursprünglichen Vorgang während des Zeitelementes dt der Volumeneinheit in unbekannter Form ein Betrag $\beta' dt$ an Energie zugeführt wird. Wird nun am Anfang dieses Elementes $(\delta'\beta)_0$, am Ende $(\delta'\beta)_1$ willkürlich mitgetheilt, so wird dadurch $\beta' dt$ um $\delta\beta' dt = (\delta'\beta)_1 - (\delta'\beta)_0$ vermehrt, es gilt somit

$$6)\qquad \frac{(\delta'\beta)_1 - (\delta'\beta)_0}{dt} = \delta\beta'.$$

Endlich nehmen wir an, daß in dem betrachteten Volumenelement eine electrische Strömung i mit den Componenten u, v, w stattfindet; auf sie möge eine mit den thermischen Vorgängen um-

kehrbar verbundene electrische Kraft wirken, die, bezogen auf einen positiven Einheitspol, K heiße und die Componenten XYZ besitze.

Die an einem Pol von der Stärke $+e$ bei seiner Verschiebung um ds geleistete Arbeit ist dann

$$e(Xdx + Ydy + Zdz),$$

wobei dx, dy, dz die Projectionen von ds bedeuten.

Ist speciell e die ganze bewegte Ladung der Volumeneinheit, und ist ds der von ihr in der Zeit dt zurückgelegte Weg, so wird $edx/dt = u$, $edy/dt = v$, $edz/dt = w$ und somit

$$7)\qquad \alpha' = Xu + Yv + Zw.$$

Ferner gilt, wenn ds mit der willkürlichen Verschiebung δs vertauscht wird,

$$\frac{(\delta'\alpha)_1 - (\delta'\alpha)_0}{dt} = e\left(X\frac{\delta(x_1 - x_0)}{dt} + Y\frac{\delta(y_1 - y_0)}{dt} + Z\frac{\delta(z_1 - z_0)}{dt}\right),$$

wobei x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes der Ladung e zur Zeit t_0 und $t_1 = t_0 + dt$ bezeichnen. Dies ergiebt aber ersichtlicher Weise

$$8)\qquad \frac{(\delta'\alpha)_1 - (\delta'\alpha)_0}{dt} = X\delta u + Y\delta v + Z\delta w.$$

Setzt man die aus den Formeln 4) bis 8) folgenden Werthe in die Gleichungen 2) und 3) ein, so nehmen dieselben die Gestalt an

$$9)\qquad -\beta' = Xu + Yv + Zw + T\frac{\partial\eta}{\partial t},$$

$$10)\qquad -\delta\beta' = X\delta u + Y\delta v + Z\delta w + T\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right).$$

Führt man noch die Abkürzung

$$11)\qquad \beta' + T\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\xi'$$

ein, so erhält man

$$12)\qquad \xi' = Xu + Yv + Zw,$$

$$13)\qquad \delta\xi' = X\delta u + Y\delta v + Z\delta w - \frac{\partial\eta}{\partial t}\delta T.$$

Die hierdurch eingeführte Function ξ' ist ein Analogon zu dem bei Gleichgewichtsproblemen so vortheilhaft zu verwerthenden thermodynamischen Potential. Man erhält aus ihr nämlich sogleich

$$14)\qquad \frac{\partial\xi'}{\partial u} = X,\quad \frac{\partial\xi'}{\partial v} = Y,\quad \frac{\partial\xi'}{\partial w} = Z,\quad \frac{\partial\xi'}{\partial T} = -\frac{\partial\eta}{\partial t}. -$$

Die obige Entwickelung führt zunächst nur zu dem speciellen Fall, daß ξ', und somit der durch diese Function dargestellte Vorgang, allein von u, v, w und T abhängt, und scheint daher bei der thermoelectrischen Erregung, wo erfahrungsgemäß, außer der Temperatur T selbst, auch noch deren Gefälle, gegeben durch die Quotienten

15) $$\frac{\partial T}{\partial x} = T_x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T_y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = T_z$$

auf den Vorgang in dem einzelnen Volumenelement einwirken, zu versagen.

Indessen läßt sich dieser allgemeinere Fall bis zu einem gewissen Grade auf den speciellen zurückführen.

Wäre nämlich ξ' eine Function von $u, v, w, T, T_x, T_y, T_z$, so würde seine vollständige Variation lauten

16) $$\delta\xi' = \frac{\partial \xi'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \xi'}{\partial v}\delta v + \frac{\partial \xi'}{\partial w}\delta w + \frac{\partial \xi'}{\partial T}\delta T + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x}\delta T_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y}\delta T_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z}\delta T_z,$$

und es würde sich darum handeln, die Gleichung 13) so zu ergänzen, daß rechts das Aequivalent für die letzten drei Glieder des Ausdruckes 16) für $\delta\xi'$ aufträte. Dies gelingt, wenn man die Gleichung 13) über ein beliebiges Volumen k integrirt und die letzten drei Glieder des Ausdruckes $\int \delta\xi' dk$ durch theilweise Integration umformt. Es entsteht dann außer einem Raumintegral, unter dem sich die Variationen $\delta u, \delta v, \delta w, \delta T$ befinden, ein Oberflächenintegral, welches nur δT enthält. Da aber nach der Formel 13) der Factor von δT in dem Raumintegral die Geschwindigkeit der zeitlichen Aenderung der räumlichen Entropie darstellt, so wird man den analogen Factor in dem Oberflächenintegral als die Geschwindigkeit einer Oberflächenentropie ansehen dürfen.

Sonach gelangt man zu der folgenden Erweiterung der Gleichung 13):

17) $$\begin{aligned} &\int_k \Big[\frac{\partial \xi'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \xi'}{\partial v}\delta v + \frac{\partial \xi'}{\partial w}\delta w \\ &\quad + \frac{\partial \xi'}{\partial T}\delta T - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_z}\right)\right)\delta T\Big]\,\delta k \\ &- \int_k \left(\frac{\overline{\partial \xi'}}{\partial T_x}\cos(n,x) + \frac{\overline{\partial \xi'}}{\partial T_y}\cos(n,y) + \frac{\overline{\partial \xi'}}{\partial T_z}\cos(n,z)\right)\overline{\delta T}\,do \\ &= \int_k \left(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w - \frac{\partial \eta_v}{\partial T}\delta T\right)dk - \int_k \frac{\partial \eta_o}{\partial T}\overline{\delta T}\,do, \end{aligned}$$

Hierin bedeutet n die innere Normale auf do relativ zu k, und es bezeichnet η_v die auf die Volumeneinheit bezogene räumliche, η_o die auf die Flächeneinheit bezogene Oberflächenentropie. Da die pro Zeiteinheit absorbirte Wärmemenge ω' mit der Entropiegeschwindigkeit $\partial\eta/\partial t$ in der Beziehung $\omega' = T\partial\eta/\partial t$ steht, so ist der Sinn der vorgenommenen Erweiterung der, daß in der Oberfläche jedes für sich betrachteten Volumens — die nach der Entwickelung nie von dem letzteren getrennt behandelt werden darf — eine eigenartige flächenhafte Wärmeabsorption vor sich geht. Es ist dies, wie sich weiter unten noch deutlicher herausstellen wird, im Einklang mit der Erfahrungsthatsache, daß bei thermisch-electrischen Umsetzungen, die von den Temperaturgefällen abhängen, in gewissen Flächen Wärmeabsorptionen stattfinden.

Da der Raum k völlig beliebig ist, so folgt aus der letzten Gleichung

18) $$X = \frac{\partial\xi'}{\partial u}, \quad Y = \frac{\partial\xi'}{\partial v}, \quad Z = \frac{\partial\xi'}{\partial w},$$

19) $$\frac{\partial\eta_v}{\partial t} = -\frac{\partial\xi'}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial T_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial T_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial T_z}\right),$$

20) $$\frac{\partial\eta_o}{\partial t} = \overline{\frac{\partial\xi'}{\partial T_x}}\cos(n,x) + \overline{\frac{\partial\xi'}{\partial T_y}}\cos(n,y) + \overline{\frac{\partial\xi'}{\partial T_z}}\cos(n,z).$$

Die Normale n auf dem Oberflächenelement do ist, wie oben gesagt, hierin die innere relativ zu dem von der Oberfläche o umschlossenen Raum k. Flächenelemente, die im Innern des ganzen stromdurchflossenen Systemes liegen, kommen sonach zwei Mal — nämlich sowohl dem einen, wie dem andern der durch sie geschiedenen Raumtheile zuzurechnen — mit entgegengesetzter Normalenrichtung zur Geltung. Geht $\partial\xi'/\partial T_x$, $\partial\xi'/\partial T_y$, $\partial\xi'/\partial T_z$ stetig durch die Fläche, so wird hiernach der Gesammtbetrag der ihr zugehörigen Entropiegeschwindigkeit $\partial\eta_o/\partial t$ gleich Null sein. Gleiches gilt für die in diesen Flächen absorbirte Wärmemenge. Wir können uns daher das Verhältniß anschaulich so vorstellen, daß jede Zwischengrenze o_{hi} durch eine Doppelfläche $o_h + o_i$ gebildet wird, und daß in correspondirenden Stücken der Flächen o_h und o_i des Paares Entropiegeschwindigkeiten und somit Wärmeabsorptionen von gleicher Größe, aber entgegengesetzten Vorzeichen stattfinden; die in o_h stattfindende flächenhafte Entropie und Absorption ist mit der in dem angrenzenden Volumen k_h stattfindenden räumlichen Entropie und Absorption zusammenzufassen; ähnlich ist o_i mit k_i zu combiniren.

Die gesammte Entropiegeschwindigkeit $\partial H/\partial t$ eines beliebigen

Volumens k (eingerechnet seine Oberfläche o) ist hiernach gegeben durch

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_k \frac{\partial \eta_v}{\partial t} dk + \int_k \frac{\partial \eta_o}{dt} do = -\int_k \frac{\partial \xi'}{\partial T} dk;$$

es gilt also bei Beziehung auf die Volumeneinheit

21) $$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \xi'}{\partial T},$$

in Uebereinstimmung mit der letzten Formel 14).

Aehnlich erhält man die ganze in dem Volumen k pro Zeiteinheit absorbirte Wärmemenge zu

$$\Omega' = \int_k \frac{\partial \eta_v}{\partial t} T dk + \int_k \frac{\partial \eta_o}{\partial t} \bar{T} do$$
$$= -\int_k \left(\frac{\partial \xi'}{\partial T} T + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x} T_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y} T_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z} T_z\right) dk;$$

bei Beziehung auf die Volumeneinheit ergiebt sich

22) $$\omega' = -\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T} T + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x} T_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y} T_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z} T_z\right).$$

Die vorstehend angewandte Betrachtungsweise gestattet nicht die einfache Uebertragung auf den Fall, daß das physikalische Verhalten und somit das Temperaturgefälle längs gewisser Flächen unstetig wird; hier verliert schon die fundamentale Operation, ξ' als Function der T_x, T_y, T_z anzusetzen und $\int \delta \xi' dk$ durch Theile zu integriren, ihren Sinn. Es scheint, daß man am einfachsten zu mit der Erfahrung verträglichen Resultaten kommt, wenn man eine solche Fläche als eine unendlich dünne Schicht betrachtet und annimmt, daß in ihrem Innern die thermoelectrische Kraft K und die räumliche Entropiegeschwindigkeit $\partial \eta_v / \partial t$ endlich sind.

Wendet man unter diesen Voraussetzungen die Gleichung 2) auf die Flächeneinheit einer solchen Grenzschicht an, so wird wegen des endlich vorausgesetzten K die Arbeit α' unendlich klein, und es bleibt in sogleich verständlicher Bezeichnung

23) $$0 = \beta'_{hi} + \omega'_{hi}.$$

Die Compensation für die in der Grenzschicht absorbirte Wärme wird also nach den gemachten Annahmen vollständig durch die in unbekannter Form dorthin transportirte Energie gegeben.

Wegen des vorausgesetzten endlichen Werthes der Geschwindigkeit der räumlichen Entropie ist die auf die Flächeneinheit be-

zogene Geschwindigkeit der ganzen Entropie gleich der Summe der Geschwindigkeiten der den beiden Grenzflächen der Schicht eignen flächenhaften Entropien; d. h., es gilt

$$24)\qquad \frac{\partial \eta_{hi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \overline{\eta_o}}{\partial t}\right)_h + \left(\frac{\partial \overline{\eta_o}}{\partial t}\right)_i$$

$$= \left(\frac{\partial \overline{\xi'_h}}{\partial T_s} \cos(n_h, x) + \cdots\right) + \left(\frac{\partial \overline{\xi'_i}}{\partial T_s} \cos(n_i, x) + \cdots\right).$$

Aehnlich ist die in der Flächeneinheit der Grenzschicht absorbirte Wärme gleich der Summe der in den beiden Grenzflächen absorbirten; d. h., es gilt

$$25)\qquad \omega'_{hi} = \bar{T}\left(\left(\frac{\partial \overline{\eta_o}}{\partial t}\right)_h + \left(\frac{\partial \overline{\eta_o}}{\partial t}\right)_i\right)$$

$$= \bar{T}\left[\left(\frac{\partial \overline{\xi'_h}}{\partial T_s} \cos(n_h, x) + \cdots\right) + \left(\frac{\partial \overline{\xi'_i}}{\partial T_s} \cos(n_i, x) + \cdots\right)\right].$$

Hierin bezeichnet nach der Entwickelung n_h und n_i je die äußere Normale auf der Grenzfläche o_{hi} relativ zu den Volumina (h) und (i).

Die Formeln 18), 22) und 25) stellen die Grundgleichungen für die thermisch-electrischen Umsetzungen dar, bei denen das Temperaturgefälle eine Rolle spielt[1]). Sie sind von großer Allgemeinheit, liefern aber natürlich nur die bei den umkehrbaren Vorgängen in's Spiel tretenden Antheile der electrischen Kräfte und der Wärmeabsorptionen, welchen sich in der Wirklichkeit die nicht umkehrbaren superponiren. —

Unter der Wirkung der thermoelectrischen und etwaiger sonstiger electromotorischer Kräfte wird im Allgemeinen ein electrischer Strom entstehen. Seine Dichte an einer beliebigen Stelle sei mit i, ihre Componenten nach den Coordinatenaxen mit u, v, w bezeichnet. Behalten wir für die thermoelectrische Kraft und ihre Componenten die Bezeichnungen K, X, Y, Z bei und verstehen unter K_0, X_0, Y_0, Z_0 eine electromotorische Kraft nicht thermischen Ursprunges (z. B. von statischen Ladungen herrührend) und ihre Componenten, so sind u, v, w bekanntlich lineäre Functionen von $(X+X_0)$, $(Y+Y_0)$, $(Z+Z_0)$, die bei isotropen Körpern die specielle Form haben

$$26)\qquad u = \lambda(X+X_0),\quad v = \lambda(Y+Y_0),\quad w = \lambda(Z+Z_0);$$

λ ist dabei die specifische elektrische Leitfähigkeit.

1) W. Voigt, Kompendium II, S. 326 u. 327.

Ferner entsteht unter der Wirkung der räumlich wechselnden Temperatur und der thermischen Leitung ein Wärmestrom, dessen Dichte mit J bezeichnet werde. Heißen die Componenten von J nach den Axen U, V, W, so sind U, V, W lineäre Functionen von T_x, T_y, T_z, die im Falle eines isotropen Körpers die einfache Form besitzen

$$27)\qquad -U = \varLambda T_x,\quad -V = \varLambda T_y,\quad -W = \varLambda T_z;$$

$\varLambda$ ist dabei die mechanisch gemessene, specifische thermische Leitfähigkeit. Sind beide Strömungen stationär, so gilt für jeden innern Punkt

$$28)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$29)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \omega' = 0,$$

dagegen für die Zwischengrenzen zwischen zwei Körpern h und i bei Einführung der Componenten n und N der beiden Strömungen nach den betreffenden äußern Normalen:

$$30)\qquad \overline{n}_h + \overline{n}_i = 0,\quad \overline{N}_h + \overline{N}_i - \omega'_{hi} = 0.$$

Die letzten beiden Formeln für die Wärmeströmung J sind unvollständig, insofern sie die Wirkung der irreversibeln Wärmeabsorption nicht berücksichtigen. Diese spielt auch bei den weiter zu machenden Anwendungen keine Rolle; sie ist aber gewünschten Falles leicht einzuführen. —

II. Sollen die thermoelectrischen Kräfte X, Y, Z von der electrischen Strömung unabhängig sein, so muß nach 18) ξ' die Componenten u, v, w lineär enthalten. Soll die in den Zwischengrenzen stattfindende Wärmeentwickelung von dem Temperaturgefälle in deren Umgebung, resp. von der dortigen Wärmeströmung, unabhängig sein, so dürfen nach 25) auch T_x, T_y, T_z in ξ' nur lineär vorkommen. Beide Voraussetzungen sind mit der Beobachtung im Einklang; der allgemeinste mit ihnen vereinbare Ansatz für ξ' lautet hiernach

$$31)\qquad \begin{aligned} \xi' = {} & T_x(u\Theta'_{11} + v\Theta'_{12} + w\Theta'_{13}) + T_y(u\Theta'_{21} + v\Theta'_{22} + w\Theta'_{23}) \\ & + T_z(u\Theta'_{31} + v\Theta'_{32} + w\Theta'_{33}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die Θ'_{hk} Functionen der Temperatur, deren Parameter bei Körpern mit stetig wechselnder physikalischer Beschaffenheit Functionen der Coordinaten sein werden. Wir wollen uns auf homogene Körper beschränken und können dann, da hier die Θ'_{hk} mit x, y, z nur in sofern variiren, als sich T mit dem Ort

ändert, offenbar auch schreiben, indem wir

$$\Theta'_{hk} = \frac{d\Theta_{hk}}{dT}$$

setzen,

$$32)\quad \begin{aligned} \xi' = u\left(\frac{\partial\Theta_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{21}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{31}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial\Theta_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{32}}{\partial z}\right) \\ + w\left(\frac{\partial\Theta_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{33}}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Für die Componenten der thermoelectrischen Kraft K finden wir nach 18)

$$33)\quad \begin{aligned} X = \frac{\partial\Theta_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{21}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{31}}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial\Theta_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{32}}{\partial z}, \\ Z = \frac{\partial\Theta_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta_{33}}{\partial z}, \end{aligned}$$

und für ihre auf die Volumen- und Zeiteinheit bezogene Arbeit gilt

$$34)\quad \alpha' = \xi'.$$

Für die räumliche Wärmeabsorption erhält man nach 22) wegen der Beziehung

$$\xi' = \frac{\partial\xi'}{\partial T_x} T_x + \frac{\partial\xi'}{\partial T_y} T_y + \frac{\partial\xi'}{\partial T_z} T_z$$

den Ausdruck

$$35)\quad \begin{aligned} \omega' &= -\left(\xi' + \frac{\partial\xi'}{\partial T} T\right) = -\frac{\partial T\xi'}{\partial T} \\ &= -T_x\left(u\frac{\partial T\Theta'_{11}}{\partial T} + v\frac{\partial T\Theta'_{12}}{\partial T} + w\frac{\partial T\Theta'_{13}}{\partial T}\right) - \cdots, \end{aligned}$$

oder, da wir homogene Körper vorausgesetzt haben,

$$36)\quad \omega' = -\left(u\frac{\partial T\Theta'_{11}}{\partial x} + v\frac{\partial T\Theta'_{12}}{\partial x} + w\frac{\partial T\Theta'_{13}}{\partial x}\right) - \cdots.$$

Ist die electrische Strömung in dem betrachteten Körper nach Stärke und Richtung räumlich constant, so läßt sich dies schreiben

$$37)\quad \begin{aligned} \omega' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T(u\Theta'_{11} + v\Theta'_{12} + w\Theta'_{13})\right) \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(T(u\Theta'_{21} + \cdots)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(T(u\Theta'_{31} + \cdots)\right); \end{aligned}$$

der Vorgang spielt sich also ebenso ab, als wenn der electrische Strom einen Wärmestrom hervorriefe mit den Componenten

38)
$$\mathfrak{U} = -T(u\Theta'_{11} + v\Theta'_{12} + w\Theta'_{13}),$$
$$\mathfrak{V} = -T(u\Theta'_{21} + v\Theta'_{22} + w\Theta'_{23}),$$
$$\mathfrak{W} = -T(u\Theta'_{31} + v\Theta'_{32} + w\Theta'_{33}),$$

Die flächenhafte Wärmeabsorption (Peltier-Wärme) ist bei Benutzung dieser Abkürzungen nach 25) gegeben durch

$$\omega'_{hi} = -(\overline{\mathfrak{U}}\cos(n,x) + \cdots)_h - (\overline{\mathfrak{U}}\cos(n,x) + \cdots)_i,$$

oder durch

39)
$$\omega'_{hi} = -(\overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i),$$

falls $\mathfrak{N}$ die normal nach der Grenze hin gerichtete Componente der eingeführten Strömung bezeichnet. Diese Gleichung ist ersichtlich mit der soeben eingeführten Deutung der Aggregate $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ in vollem Einklang. —

Zerlegt man ω' gemäß der Formel 35) in die beiden Theile

40)
$$\omega'_1 = -\xi', \quad \omega'_2 = -\frac{\partial \xi'}{\partial T}T,$$

so stellt der erste Theil wegen 34) die Compensation der von der Kraft K an dem Volumenelement geleisteten Arbeit α' und somit eine besondere Art Joule-Wärme dar, die sowohl mit der Richtung des electrischen Stromes, als mit derjenigen des Temperaturgefälles ihr Vorzeichen umkehrt und demgemäß unter den umkehrbaren Wärmewirkungen des Stromes erscheint. Die gesammte gewöhnlich als Joule-Wärme bezeichnete Wärmeabsorption ist gleich $\omega'_0 + \omega'_1$, wobei $\omega'_0 = -(uX_0 + vY_0 + wZ_0)$ die Compensation der von der electromotorischen Kraft K_0 nicht thermischen Ursprunges geleisteten Arbeit darstellt; unter Benutzung von 26) erhält man für $\omega'_0 + \omega'_1$ sogleich die bekannten Ausdrücke $-i^2/\lambda$ oder $-\lambda(K)^2$, wobei (K) die aus K und K_0 resultirende Kraft bezeichnet.

Für den zweiten Theil von ω' folgt aus der Formel 2)

41)
$$-\beta' = \omega'_2;$$

derselbe erscheint somit als Compensation der im Eingang hypothetisch eingeführten Energiezufuhr und repräsentirt einen allgemeinern Fall der sogenannten Thomson-Wärme. ω'_2 und mit ihm β' verschwindet, wenn $\partial\xi'/\partial T$ gleich Null ist, d. h. also, wenn die Parameter Θ'_{hk} in ξ' von der Temperatur unabhängig sind. In diesem Falle ist also die in jedem Volumen entwickelte Wärme die Compensation der an eben demselben Volumen geleisteten Arbeit. —

III. Gehen wir nun specieller zur Behandlung isotroper

Körper über, so haben wir an Stelle des allgemeinen Ansatzes 31) für ξ' den folgenden zu benutzen

42) $$\xi' = \Theta'(u T_x + v T_y + w T_z);$$

hierin bezeichnet Θ' eine Function der Temperatur, welche aber der Substanz des Körpers individuell ist. Setzt man wieder

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{dT},$$

so wird für homogene Körper auch

43) $$\xi' = u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

und nach 18)

44) $$X = \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Aus diesem Resultat folgt unter Anwendung bekannter Schlußreihen leicht, daß die electrische Strömung in einem aus homogenen isotropen Körpern bestehenden System ebenso verläuft, als wenn nur in den Zwischengrenzen thermoelectrische Kräfte von den Beträgen

45) $$P_{hi} = \overline{\Theta}_h - \overline{\Theta}_i$$

wirkten. Ferner ergeben die Formeln 22) und 25), daß während der Zeiteinheit in jedem innern Punkt eine Wärmemenge

46) $$\omega' = -\left(u \frac{\partial T\Theta'}{\partial x} + v \frac{\partial T\Theta'}{\partial y} + w \frac{\partial T\Theta'}{\partial z}\right)$$

pro Volumeneinheit, und in jeder Zwischengrenze eine Wärmemenge

47) $$\omega'_{hi} = n_{hi} \overline{T} (\overline{\Theta}'_h - \overline{\Theta}'_i) = n_{hi} \overline{T} \frac{\partial P_{hi}}{\partial T}$$

pro Flächeneinheit absorbirt wird; hierin bezeichnet n_{hi} die normal von (h) nach (i) verlaufende, diesseits und jenseits der Grenze gleiche electrische Stromdichte.

Der Ausdruck für ω' läßt sich wegen der Bedingung 28) auch schreiben

48) $$\omega' = -\left(\frac{\partial u T\Theta'}{\partial x} + \frac{\partial v T\Theta'}{\partial y} + \frac{\partial w T\Theta'}{\partial z}\right)$$

und zeigt in dieser Gestalt an, daß bei isotropen Körpern im stationären Zustande die umkehrbare Wärmeentwickelung stets so stattfindet, als wenn ein Wärmestrom mit den Componenten

49) $$\mathfrak{U} = -u T\Theta', \quad \mathfrak{V} = -v T\Theta', \quad \mathfrak{W} = -w T\Theta',$$

unabhängig von den Temperaturgefällen durch den electrischen Strom mit den Componenten u, v, w unterhalten würde. $-T\Theta'$ stellt dabei die Mitführungszahl für die — mechanisch gemessene — Wärme dar. Die in den Zwischengrenzen absorbirte Wärme ω'_{ki} läßt sich in Uebereinstimmung hiermit als die Compensation desjenigen Ausfalles auffassen, der eintritt, wenn in der Grenze mehr ab-, als zuströmt.

Die Zerlegung von ω' in die beiden Theile $\omega'_1 = -\alpha'$ (Joule-Wärme) und $\omega'_2 = -\beta'$ (Thomson-Wärme) ist jetzt natürlich ebenso ausführbar, wie oben im allgemeinen Falle gezeigt ist. Neu ist indessen, daß sich hier bei isotropen Medien jeder der beiden Theile für sich als das Resultat einer Wärmeströmung, welche den electrischen Strom begleitet, auffassen läßt.

Man erhält nämlich unter Rücksicht auf die Bedingung 28) des stationären Zustandes

$$50)\qquad -\omega'_1 = +\alpha' = +\xi' = +\left(u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y} + w\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)$$
$$= +\left(\frac{\partial u\Theta}{\partial x} + \frac{\partial v\Theta}{\partial y} + \frac{\partial w\Theta}{\partial z}\right)$$

und

$$51)\qquad -\omega'_2 = +\beta' = +T\left(u\frac{\partial\Theta'}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta'}{\partial y} + w\frac{\partial\Theta'}{\partial z}\right)$$
$$= -\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial v\Phi}{\partial y} + \frac{\partial w\Phi}{\partial z}\right),$$

wobei

$$\Theta - T\Theta' = \Theta - T\frac{d\Theta}{dT} = \Phi$$

gesetzt ist. Es läßt sich sonach die frei werdende Wärme $-\omega'_1$ auf eine Wärmeströmung $\mathfrak{i}_1$ mit den Componenten

$$52)\qquad \mathfrak{u}_1 = -u\Theta,\quad \mathfrak{v}_1 = -v\Theta,\quad \mathfrak{w}_1 = -w\Theta,$$

die frei werdende Wärmemenge $-\omega'_2$, resp. der Energiezuwachs β', auf eine Strömung $\mathfrak{i}_2$ mit den Componenten

$$53)\qquad \mathfrak{u}_2 = +u\Phi,\quad \mathfrak{v}_2 = +v\Phi,\quad \mathfrak{w}_2 = +w\Phi$$

zurückführen. Hierbei ist resp. $-\Theta$ und $+\Phi$ die von der Stromdichte Eins transportirte Wärmemenge in mechanischem Maaß. Der mit der Thomson-Wärme ω'_2 zusammenhängende Ausdruck

$$54)\qquad \frac{1}{\mathfrak{A}}\frac{d\Phi}{dT} = -\frac{T}{\mathfrak{A}}\frac{d^2\Theta}{dT^2} = \sigma,$$

in dem $\mathfrak{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent bezeichnet, entspricht

dann dem, was W. Thomson die specifische Wärme der Electricität in dem Körper nennt, auf den sich die Function Θ bezieht; damit ist indessen keineswegs gesagt, daß σ die Dimension einer specifischen Wärme habe.

Unter Benutzung der neuen Bezeichnung σ läßt sich übrigens Gleichung 51) auch schreiben

55) $$\omega_s' = \mathfrak{A}\sigma(uT_x + vT_y + wT_z),$$

wodurch eine zweite Definition von σ an die Hand gegeben wird.

σ, und daher die Thomson-Wärme, ist gleich Null, wenn Θ durch eine lineare Function von T, somit Φ durch eine Constante dargestellt wird. Dieser Fall ist laut der Beobachtung merklich bei Blei verwirklicht. Für die andern Metalle kann man angenähert Θ durch eine Funtion zweiten Grades ausdrücken, etwa setzen, indem man statt der absoluten Temperatur T die nach Celsius gemessene τ einführt:

56) $$-\Theta = a\tau + \tfrac{1}{2}b\tau^2 + c.$$

Hier wird dann die scheinbare electromotorische Kraft P_{hi} in einer Grenzfläche a_{hi} nach 45) zu

57) $$P_{hi} = (a_i - a_h)\tau + \tfrac{1}{2}(b_i - b_h)\tau^2 + (c_i - c_h),$$

und für die specifische Wärme der Electricität σ_h in einem Metall h folgt nach 54)

58) $$\sigma_h = \frac{Tb_h}{\mathfrak{A}},$$

wodurch b_h einfach gedeutet wird. Für Blei ist $b = 0$. —

Es ist hier der Ort, auf die Uebereinstimmung hinzuweisen, welche zwischen den vorstehend entwickelten, resp. recapitulirten Resultaten und den neuerdings von Riecke auf ganz anderer Grundlage gefundenen besteht. Beide Theorien führen auf electromotorische Kräfte, die im Innern eines homogenen, verschieden temperirten Körpers bestehen, und liefern für diese, sowie für die Thomson- und die Peltier-Wärme im Wesentlichen dieselben Endformeln. Ein bedeutungsvoller Unterschied liegt allerdings darin, daß die vorstehenden Entwickelungen als directe Folge eines Temperaturgefälles die electrischen Kräfte liefern, während Riecke zunächst einen electrischen Strom erhält und auf die wirkenden electrischenKräfte erst indirect schließt. Außerdem beschränkt sich Riecke von allem Anfang an auf eine Annäherung, die ihn zu der Formel 57) führt und somit dem Ansatz 56) entspricht.

Riecke's Grundformeln betreffen die durch ein Temperaturgefälle — $\partial T/\partial z$ bewirkte electrische Stromdichte j und die von einem galvanischen Strom von der Dichte i bewirkte Wärmeströmung Ω und lauten

$$j = -k\omega\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \Omega = \eta i;$$

hierin stellen $k\omega$ und η zwei durch die molekularen Vorgänge anschaulich definirte Parameter dar, zwischen denen unter Heranziehung der Erfahrung die für die Riecke'sche Theorie fundamentale Beziehung

59) $$\omega k/\lambda = \mathfrak{A}\eta/T$$

aufgestellt wird, in der $\mathfrak{A}$ wieder das mechanische Wärmeäquivalent, λ die specifische electrische Leitfähigkeit bezeichnet.

Für den in diesen Formeln vorausgesetzten Fall, daß entweder nur ein Temperaturgefälle oder nur eine electromotorische Kraft wirksam ist, liefern aber die obigen Gleichungen 44) und 49)

$$j = \lambda\Theta'\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \Omega = -\frac{T\Theta' i}{\mathfrak{A}};$$

es steht also $-\lambda\Theta'$ an der Stelle von $k\omega$, $-T\Theta'/\mathfrak{A}$ an der Stelle von η, und da somit

$$k\omega/\lambda = -\Theta' \text{ und } \mathfrak{A}\eta/T = -\Theta'$$

ist, so folgt aus meinen Betrachtungen die Beziehung 59) ohne irgendwelche Hülfsannahmen.

Weiter sind auch die obigen Formeln 57) und 58) mit bei Riecke vorkommenden identisch. Hiermit ist die Uebereinstimmung zwischen den beiderseitigen Grundformeln erwiesen, während die Möglichkeit bestehen bleibt, daß bei gewissen Anwendungen der oben hervorgehobene Unterschied in der Bedeutung der Resultate Abweichungen bewirkt. —

IV. Befindet sich der betrachtete isotrope Körper in einem magnetischen Felde, so werden die früheren Resultate einer Ergänzung bedürfen. Eine erste Correction wird durch Glieder dargestellt werden, die lineäre Functionen der Feldstärke R_i im Innern des Körpers sind. Beschränkt man sich auf mäßige Feldstärken, so ist R_i eine lineäre Function der Feldstärke R im Außenraum, und die erste Correction wird somit auch lineär in R sein.

Man kann eine solche Correction nach zwei verschiedenen Principien bilden. Erstens kann man sich vorstellen, daß das

magnetische Feld einen zweiten reversiblen Vorgang hervorruft; es ist dann der obigen thermodynamischen Function ξ' eine Ergänzung beizugeben, die nach Symmetrie bei Einführung einer zu den Kraftlinien parallelen Z-Coordinatenaxe lauten muß[1])

60) $$\xi_1' = \Theta_1 R(vT_x - uT_y),$$

falls Θ_1 eine Function der Temperatur allein, in erster Annäherung eine Constante bezeichnet.

Dies würde als Ergänzungskräfte nach 18) liefern

61) $$X_1 = -\Theta_1 R T_y, \quad Y = +\Theta_1 R T_x, \quad Z_1 = 0,$$

als Ergänzungsströmungen dagegen nach 38)

62) $$\mathfrak{U}_1 = -\Theta_1 R T v, \quad \mathfrak{V}_1 = +\Theta_1 R T u, \quad \mathfrak{W}_1 = 0.$$

Zweitens kann man durch die Wirkung des magnetischen Feldes sowohl die thermoelectrischen Kräfte, als auch die convective Wärmeströmung, deren Gesetze oben abgeleitet sind, ähnlich wie die electrische Strömung beim Hall-Effect, um die Richtung der magnetischen Kraftlinien gedreht denken. Beträgt diese Drehung nur einen sehr kleinen Winkel, so kömmt dies darauf hinaus, daß man zu den in 44) und 49) angegebenen Werthen folgende Ergänzungsglieder fügt

63) $$X_1' = -\nu R \frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\nu R \Theta' T_y,$$
$$Y_1' = +\nu R \frac{\partial \Theta}{\partial x} = +\nu R \Theta' T_x, \quad Z_1' = 0,$$

64) $$\mathfrak{U}_1' = +\nu R T \Theta' v, \quad \mathfrak{V}_1' = -\nu R T \Theta' u, \quad \mathfrak{W}_1' = 0.$$

In ihnen bezeichnet ν eine Constante, die den Betrag der Drehung mißt. Daß dieselbe Constante in beiden Formeln eingesetzt ist, enthält keine wesentliche Willkürlichkeit; denn stände statt ν in der ersten etwa $\nu_0 + \nu_1$, in der zweiten $\nu_0 - \nu_1$ so würden die in ν_1 multiplicirten Glieder den in 61) und 62) enthaltenen conform sein, sich von ihnen nicht sondern lassen und einen umkehrbaren Vorgang der gleichen Art darstellen, wie jene.

Die durch 61) und 63) bestimmten resultirenden Kräfte K_1 und K_1' folgen den gleichen Gesetzen; sie stehen beide normal zu den Richtungen des Temperaturgefälles und der magnetischen Kraftlinien und sind sowohl dem Gefälle, wie der Feldstärke proportional. Auch die durch 62) und 64) bestimmten resultirenden

1) W. Voigt, Kompendium Bd. II, S. 333.

Strömungen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$ gehen einander parallel; sie stehen normal sowohl zum electrischen Strom, als zu den magnetischen Kraftlinien, und sind dem Product aus Feldstärke und Stromdichte proportional. Die K, wie die $\mathfrak{J}$, stellen transversale Wirkungen des magnetischen Feldes dar; haben die Kräfte K_1 und K_1' gleiche Richtungen, so die Ströme $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$ entgegengesetzte, und umgekehrt.

Im allgemeinen Falle, daß beide Wirkungen gleichzeitig stattfinden, wird gelten, falls immer R parallel $+Z$ liegt,

$$65)\qquad X = \Theta'(T_x - \nu R T_y) - \Theta_1 R T_y,$$
$$Y = \Theta'(T_y + \nu R T_x) + \Theta_1 R T_x, \quad Z = \Theta' T_z,$$

$$66)\qquad \mathfrak{U} = -\Theta' T(u - \nu R v) - \Theta_1 R T v,$$
$$\mathfrak{V} = -\Theta' T(v + \nu R u) + \Theta_1 R T u, \quad \mathfrak{W} = -\Theta' T w.$$

Die Gleichungen für den electrischen Strom benutzen wir jetzt in folgender Form:

$$67)\qquad u = \lambda(X + X_0) - \mu R v, \quad v = \lambda(Y + Y_0) + \mu R u,$$
$$w = \lambda(Z + Z_0);$$

μ ist dabei das Maaß des Hall-Effectes, X_0, Y_0, Z_0 sind wieder die electrischen Kräfte nicht-thermischen Ursprungs.

Den Gleichungen für die Wärmeleitung belassen wir, da ein Analogon zum Hall-Effect bisher noch nicht festgestellt ist, die frühere Form:

$$68)\qquad -U = \Lambda T_x, \quad -V = \Lambda T_y, \quad -W = \Lambda T_z.$$

Es sei nun eine prismatische Platte von der betrachteten Substanz gegeben, deren Flächen normal zu den Coordinatenaxen liegen; die XY-Ebene stelle die Plattenebene dar. Die Flächen normal zur X- und zur Z-Axe — letztere wieder zu R parallel — mögen electrisch und thermisch isolirt sein.

In dieser Platte werde zunächst eine homogene Temperatursteigung T_y nach der $+Y$-Axe, also ein homogener Wärmestrom parallel der $-Y$-Axe, hervorgebracht und deren Wirkungen nach der Richtung der X-Axe untersucht. Wegen $T_x = 0$ und $u = 0$, $v = 0$ gilt hier

$$69)\qquad X = -(\nu\Theta' + \Theta_1) R T_y, \quad \mathfrak{U} = 0.$$

Da kein electrischer Strom in der Platte bestehen kann, so muß letztere eine Ladung annehmen, deren Potentialfunction F

die erregten electrischen Kräfte compensirt; d. h., es muß ein sogenanntes transversales thermomagnetisches Potentialgefälle

$$X_0 = -\frac{\partial F}{\partial x} = -F_x$$

eintreten, gegeben durch:

70) $$F_x = -(\nu\Theta' + \Theta_1) R T_y.$$

Der stationäre thermische Zustand erfordert, daß $U + \mathfrak{U} = 0$ ist, eine Bedingung, die durch $T_x = 0$ identisch erfüllt wird.

Nunmehr durchsetze die Platte parallel zu der $+Y$-Axe ein homogener electrischer Strom. Dann ist wegen $u = 0$

71) $$\mathfrak{U} = +(\nu\Theta' - \Theta_1) R T v,$$

und die Bedingung des stationären thermischen Zustandes $U + \mathfrak{U} = 0$ führt für das sogenannte transversale galvanomagnetische Temperaturgefälle auf die Beziehung

72) $$T_x = +(\nu\Theta' - \Theta_1)\frac{R T v}{\Lambda}.$$

Aus der ersten Gleichung 67) erhält man ferner für das Potentialgefälle $-F_x = X_0$ der entstehenden Ladung:

73) $$F_x = X - \frac{\mu}{\lambda} R v = \Theta'(T_x - \nu R T_y) - \Theta_1 R T_y - \frac{\mu}{\lambda} R v.$$

Dabei ist T_x aus 72) zu entnehmen; der Werth von T_y hängt wesentlich davon ab, inwieweit die an den Eintrittsstellen des electrischen Stromes in die Platte entstehende Peltier-Wärme nach außen abzufließen vermag, und ist daher allgemein nicht angebbar. Die Formel 73) zeigt aber jedenfalls, daß, wie auch schon von Anderen hervorgehoben ist, das Hall-Phänomen unter Umständen durch den thermomagnetischen und den galvanomagnetischen Effect stark beeinflußt werden kann, und daß nur bei streng constanter Temperatur in der Platte die gewöhnliche Formel

74) $$F_x = -\frac{\mu}{\lambda} R v$$

Gültigkeit besitzt.

Was die Vergleichung mit der Beobachtung angeht, so ist zu bemerken, daß die in den Fundamentalformeln 70) und 72) auftretenden Parameter $\nu\Theta'$ und Θ_1 zunächst als im Voraus nicht

angebbar zu betrachten sind, daß also gesetzt werden kann

75) $$F_s = -\Pi' R T_y, \quad T_s = +\Pi'' \frac{RTv}{\varLambda},$$

wobei Π' und Π'' der Substanz der Platte individuelle, aber zunächst unbestimmte Functionen der Temperatur darstellen. Daß diese Resultate bezüglich des Einflusses der Dimensionen der Platte, der Stromstärke, des Temperaturgefälles und angenähert auch der magnetischen Feldstärke den Beobachtungen der Herren von Ettinghausen und Nernst[1]) durchaus entsprechen, ist leicht einzusehen.

Bezüglich der numerischen Werthe der Parameter

76) $$\Pi' = \nu\Theta' + \Theta_1, \quad \Pi'' = \nu\Theta' - \Theta_1$$

möge zunächst bemerkt werden, daß, soweit die Beobachtungen reichen, gilt:

77) $$\frac{\Pi'}{\Pi''} = \frac{\nu\Theta' + \Theta_1}{\nu\Theta' - \Theta_1} > 0,$$

daß somit das erste Glied in Zähler und Nenner für das Vorzeichen maßgebend ist.

Betrachtet man den Grenzfall, daß Θ_1 neben $\nu\Theta'$ vernachlässigt werden darf, so wird

78) $$F_s = -\nu\Theta' R T_y, \quad T_s = +\nu\Theta' \frac{RTv}{\varLambda},$$

also

79) $$\frac{F_s}{T_s} = -\frac{T_y \varLambda}{Tv}.$$

Der entgegengesetzte Werth für F_s/T_s würde resultiren, wenn $\nu\Theta'$ neben Θ_1 vernachlässigt werden könnte. —

Von Beobachtungen, die zur Berechnung der Constanten Π' und Π'' dienen könnten, kommen in erster Linie die von den Herren von Ettinghausen und Nernst an Wismuth und einigen Wismuth-Zinn-Legierungen (L I, L II, L III, L IV) angestellten in Betracht[2]), da sie allein sowohl den thermomagnetischen, als auch den galvanomagnetischen Effect an denselben Platten bestimmten. Man erhält aus den hierauf bezüglichen mittleren Zahlen folgende Tabelle

---

1) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **29**, 343, 1886; A. v. Ettinghausen, Wied. Ann. **31**, 737, 1887; W. Nernst, Wied. Ann. **31**, 760, 1887.

2) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **33**, 475, 1888.

	Bi	L I	L II	L III	L IV
$\Pi' =$	0,207	0,084	0,065	$0{,}013_5$	0,0039
$\Pi'' =$	0,143	0,054	0,038	0,017	0,0034.

Die Werthe von Π'' sind viel ungenauer, als die von Π'; denn sowohl die Messung von T_z, als die von Δ bietet große Schwierigkeiten. In Bezug auf T_z kann man ziemlich sicher vermuthen, daß die angegebenen Werthe zu klein sind, da die zur Messung von T an die Platten angelötheten Thermoketten denselben unzweifelhaft Wärme entzogen haben, auch die Isolation der Platten gegen Wärmeabgabe keine absolute sein konnte. Demgemäß wird auch Π'' zu klein gefunden sein. Von Δ sind überhaupt die gefundenen Werthe allein für Bi, L I und L III, u. zw. nur bis auf 1 oder 2 Ziffern genau angegeben, die übrigen sind vorstehend aus der beobachteten electrischen Leitfähigkeit λ unter der Annahme berechnet, daß Δ/λ für alle Legierungen constant ist.

Berücksichtigt man dies, so wird man sagen müssen, daß die Beobachtungen mit einer angenäherten Gleichheit von Π' und Π'' nicht im Widerspruch sind. Der thermomagnetische und der galvanomagnetische Effect würden sich dann auf eine einzige Constante, resp. eine einzige Temperaturfunction, nämlich auf den Ausdruck $\Pi = \nu\Theta'$, zurückführen lassen.

Was die beiden Theile dieses Parameters Π betrifft, so liegt es ziemlich nahe, zu vermuthen, daß ν mit dem correspondirenden Factor μ in den Formeln 67) für das Hall-Phänomen identisch ist. Θ' ist aus thermoelectrischen Beobachtungen nicht bestimmbar, da die für solche maßgebenden Formeln 45) und 47) nur die Differenzen der, zwei verschiedenen Metallen entsprechenden Θ resp. Θ' enthalten. Indessen würde eine Prüfung der Vermuthung, daß $\nu = \mu$ sein möchte, in der Weise möglich sein, daß für zwei Metalle h und i sowohl die ihnen entsprechenden Parameter Π_h, Π_i und μ_h, μ_i, als auch der Parameter

$$T(\Theta_h' - \Theta_i') = \Delta_{hi}$$

der ihrer Combination entsprechenden Peltier-Wärme durch Beobachtungen bestimmt würde; die Relation $\mu = \nu$ verlangt dann das Bestehen der Beziehung

$$80)\qquad T\left(\frac{\Pi_h}{\mu_h} - \frac{\Pi_i}{\mu_i}\right) = \Delta_{hi}.$$

Ihre Bestätigung würde nicht nur den schon von anderer Seite vermutheten Zusammenhang zwischen den oben beschriebenen Er-

scheinungen und dem Hall-Effect klar stellen, sondern auch das Mittel liefern, um die so wesentliche Function Θ' für die einzelnen Metalle numerisch zu bestimmen, was mannigfaches Interesse haben würde.

Nimmt man für Θ die in 56) gegebene Form

$$-\Theta = a\tau + \tfrac{1}{2} b\tau^2 + c,$$

so ist zwar nach dem S. 124 u. 126 Gesagten die Constante b der Beobachtung zugänglich, nicht aber a und c, welches letztere ja wegen des Voltaschen Spannungsgesetzes aus den Formeln für die electrische Strömung ganz herausfällt. Für Blei ist nach der Erfahrung b unmerklich. Es bietet sich daher die Frage, ob dieser Köper nicht vielleicht überhaupt thermoelectrisch unwirksam ist, d. h., auch eine unmerkliche Constante a besitzt. In diesem Falle würde $-\Theta'$ für jedes beliebige Metall seiner thermoelectrischen Kraft gegen Blei bei 1^0 Temperaturdifferenz direct gleich sein.

Dies sind einige der Fragen, die sich durch die gefundenen Resultate aufdrängen, und die einer eingehenden Untersuchung werth wären; eine Beantwortung würde aber vor allen Dingen verlangen, daß zuvor die direct beobachtete Hall'sche Constante von den ihr meist anhängenden fremden Antheilen befreit würde, von denen oben gesprochen ist. Jedenfalls widerspricht die Größenordnung des Parameters Π nicht den oben aufgestellten Vermuthungen. Z. B. ist für Wismuth bei der mittlern Feldstärke R, auf welche sich die obigen Zahlen beziehen, $\mu = 8.4{,}8 . 10^{-6}$; setzt man entsprechend der obigen Hypothese, daß Blei überhaupt thermoelectrisch unwirksam sei, und gewäß den Beobachtungen $\Theta' = 6400$, so erhält man für $\mu\Theta'$ den Werth 0,246, der dem oben angegebenen $\Pi' = 0{,}207$ außerordentlich nahe liegt. —

Was den Zusammenhang mit den von Riecke auf molekularer Grundlage erhaltenen Resultaten angeht, so stimmen die Fundamentalformeln 75) formal durchaus mit den bei Riecke mit 37) und 40) bezeichneten überein; die Parameter Π' und Π'' sind aber dort durch die Bewegungen der electrischen Theilchen sehr anschaulich ausgedrückt. Ein Unterschied liegt darin, daß sich Π' und Π'' bei Riecke stets positiv ergeben, während nach den vorstehenden Resultaten und nach der Beobachtung beide Vorzeichen möglich erscheinen.

V. Wie im Vorstehenden eine erste Correction der früheren Formeln durch mit der magnetischen Feldstärke proportionale Glieder hergestellt ist, so kann man eine zweite durch in ihr

quadratische Ausdrücke bilden und dabei dieselben beiden Wirkungen des magnetischen Feldes darstellen, die oben in Betracht gezogen sind.

Ein umkehrbarer Vorgang wird sich ausdrücken in einem Zusatzglied zu der thermodynamischen Function ξ' von der durch die Symmetrieverhältnisse bestimmten Form

$$81)\qquad \xi_2' = R^2(\Theta_2(uT_x + vT_y) + \Theta_2' w T_z);$$

in ihm sind Θ_2 und Θ_2' Functionen der Temperatur, in erster Annäherung Constanten; die Z-Axe ist dabei wieder parallel zu den magnetischen Kraftlinien angenommen.

Für die thermomagnetische Ergänzungskraft K_2 folgt hieraus nach 18)

$$82)\qquad X_2 = R^2\Theta_2 T_x,\quad Y_2 = R^2\Theta_2 T_y,\quad Z_2 = R^2\Theta_2' T_z,$$

für die galvanomagnetische Wärmeströmung nach 38)

$$83)\quad \mathfrak{U} = -R^2\Theta_2 Tu,\quad \mathfrak{V} = -R^2\Theta_2 Tv,\quad \mathfrak{W} = -R^2\Theta_2' Tw.$$

Nimmt man erst T_z, sodann w gleich Null, so erhält man erst eine Kraft K_2 parallel zu dem resultirenden Temperaturanstieg, sodann eine Wärmeströmung parallel zu dem electrischen Strom. Diese Vorgänge sind also streng longitudinal.

Einen nicht umkehrbaren Vorgang liefert die Annahme von mit dem Quadrat der Feldstärke variirenden electrischen und thermischen Leitfähigkeiten, d. h. die Einführung der gleichfalls den Symmetrieverhältnissen entsprechenden Ansätze

$$84)\begin{cases} u = (\lambda+\lambda_2 R^2)(X+X_0),\ v = (\lambda+\lambda_2 R^2)(Y+Y_0),\ w = (\lambda+\lambda_2' R^2)(Z+Z_0), \\ -U = (\Lambda+\Lambda_2 R^2)\,T_x,\ \ -V = (\Lambda+\Lambda_2 R^2)\,T_y,\ \ -W = (\Lambda+\Lambda_2' R^2)\,T_z. \end{cases}$$

In ihnen bezeichnen die λ_2, λ_2', Λ_2, Λ_2' Constanten, welche den Einfluß des magnetischen Feldes messen; die Z-Axe ist wiederum den Kraftlinien parallel liegend gedacht. Auch hier folgen bei verschwindendem $(Z+Z_0)$, resp. T_z rein longitudinale Wirkungen.

Indessen ist zu bemerken, daß zwischen diesen und den durch die Function ξ_2' gegebenen Vorgängen ein wesentlicher Unterschied besteht, dem im Falle der früher betrachteten transversalen Effecte nichts ähnliches entspricht. ξ_2' liefert direct eine electromotorische Kraft, resp. eine Wärmeconvection, während die durch das System 84) ausgesprochenen Leitfähigkeitsänderungen zwar unter gewissen Umständen einer solchen Kraft, resp. einer solchen Convection ähnlich wirken, unter anderen aber auch nicht.

Den thermomagnetischen Effect müßte man sich auf Grund der Ansätze 84) so erklären, daß man als Folge der geänderten thermischen Leitfähigkeit ein geändertes Temperaturgefälle annähme, das dann nach den Formeln 44) eine Aenderung der ursprünglichen electromotorischen Kraft bewirken würde. Bei der Hervorbringung des galvanomagnetischen Effectes könnte dagegen die Aenderung beider Leitfähigkeiten zusammenwirken.

Am genauesten ist bisher der longitudinale thermomagnetische Effect untersucht und z. B. bei Wismuth von recht bedeutender Größe gefunden worden. Da seine Erklärung mit Hülfe des durch 84) eingeführten irreversibeln Vorganges eine merkliche Veränderung der thermischen Leitfähigkeit im magnetischen Felde voraussetzt, so ist von Wichtigkeit, daß Herr Nernst eine solche bei seinen bez. Versuchen durchaus nicht nachzuweisen vermochte [1]). Man wird daher der Annnahme, daß die longitudinalen Effecte auf dem durch 81) dargestellten reversibeln Vorgang beruhen, vorläufig wohl den Vorzug geben.

Da bei dieser Annahme der thermomagnetische und der galvanomagnetische Effect auf dieselbe Constante, resp. dieselbe Temperaturfunction Θ_2 zurückgeführt ist, so wären quantitative Beobachtungen über beide Wirkungen an demselben Material von großer Wichtigkeit. Dergleichen fehlen indessen bisher.

Was aus den vorliegenden Beobachtungen zu schließen ist, geht dahin, daß der thermomagnetische Effect bei kleinen Feldstärken R mit deren Quadrat, bei größern näher mit R selbst proportional ist [2]), und daß die aus dem galvanomagnetischen Wärmestrom folgende electromotorische Kraft jederzeit in dem Sinne wirkt, daß der primäre Strom durch sie geschwächt wird [3]).

Ersteres stimmt, wenn man bedenkt, daß der Ansatz 81) als ein Correctionsglied zu dem früheren 42) hinzugefügt ist und bei stark anwachsendem R nothwendig allmählig unvollständig werden muß, sowie daß die im Innern des stromdurchflossenen Metalles herrschende und direct zur Wirkung kommende magnetische Feldstärke R_i der äußeren R nicht streng proportional ist mit unsern Resultaten überein.

Daß auch letzteres durch unsere Formeln richtig gegeben wird, zeigt die folgende Ueberlegung.

Verläuft der primäre Strom parallel der X-Axe, so ist das

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31, p, 783, 1887.

2) W. Nernst, l. c. p. 783.

3) W. Nernst, l. c. p. 785.

durch ihn bedingte Temperaturgefälle nach den für den reversibeln Vorgang gültigen Formeln 83) und nach der für den stationären Zustand characteristischen Bedingung $U + \mathfrak{U} = 0$ gegeben durch

$$\mathfrak{U} = -R^2 \Theta_2 T u = -U = +\Lambda \mathfrak{T}_x;$$

aus ihm folgt nach 82) eine electromotorische Kraft

$$X_2 = R^2 \Theta_2 \mathfrak{T}_x = -R^4 \Theta_2^2 T u / \Lambda,$$

und diese wirkt — gleichviel welches Vorzeichen Θ_2 hat, — jederzeit dem primären Strom u entgegen.

Aus den Vorstellungen der Riecke'schen Theorie scheinen die longitudinalen Effecte sich nicht zu ergeben.

Göttingen, im April 1898.

Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme.

Zweite Mittheilung.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1898.

1. Zur Mitführungstheorie der Thermoelektricität.

Der Gedanke, daß die elektrischen Theilchen im Inneren der Conduktoren Träger der Wärmeenergie seien, daß die Wärmeenergie nichts Anderes sei, als die kinetische Energie elektrischer, mit träger Masse begabter Theilchen, wurde von Wilhelm Weber zuerst ausgesprochen in der Abhandlung „zur Galvanometrie" vom Jahre 1858[1]. Die Consequenzen dieser Anschauung hat Weber nicht in ausführlicher und zusammenhängender Weise entwickelt; in der Abhandlung über das Princip der Erhaltung der Energie vom Jahre 1871[2] hat er zunächst angegeben, wie die Erscheinung der Peltier-Wärme aus seiner Anschauung erklärt werden kann; in der That ist die erste von den in § 5 meiner früheren Mittheilung enthaltenen Formeln im Wesentlichen nichts Anderes, als ein mathematischer Ausdruck des Weber'schen Gedankens. Am eingehendsten hat sich Weber mit der Ableitung des Ohmschen Gesetzes aus seiner Grundvorstellung beschäftigt[3]. In der zweiten von den unten angeführten Abhandlungen gelangt er, wie

---

1) W. Webers Werke, IV. Bd., S. 94.

2) W. Webers Werke, IV. Bd., S. 294.

3) Ueber die Bewegung der Wärme in Körpern von molecularer Constitution (1875). W. Webers Werke, IV. Bd., S. 348.

Elektrodynamische Maaßbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze. (Nachlass). W. Webers Werke, IV. Bd., S. 507.

ich nachträglich bemerkt habe, für die galvanische Leitfähigkeit eines Metalles zu einem Werthe, der im Wesentlichen mit dem übereinstimmt, durch welchen in Gleichung 11 meiner früheren Mittheilung die specifische Wanderungsgeschwindigkeit der positiven Elektricität bestimmt wird. Mit der Anwendung seiner Hypothese auf die Gesetze der Wärmeleitung hat sich Weber anscheinend nicht beschäftigt; nach dieser Richtung hin hat er sich vielleicht bei dem Gedanken beruhigt, daß Fouriers Entwicklungen über innere Wärmestrahlung auch auf die innere elektrische Strahlung übertragen werden könnten. Im Zusammenhange damit steht, daß Weber die thermoelektrischen Kräfte durch die Abhängigkeit der kontaktelektromotorischen Kräfte von der Temperatur erklärte, daß er die Möglichkeit einer elektromotorischen Wirkung des Wärmestromes nicht in Rechnung zog.

Das Verdienst, die Grundannahmen für eine Mitführungstheorie der Wärme und der Elektricität zuerst in einfachster Weise ausgesprochen zu haben, gebührt F. Kohlrausch[1]). In einer Abhandlung, welche er im Jahre 1874 in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veröffentlicht hat, thut er dieß in den beiden folgenden Sätzen: 1. „Wir nehmen — an, daß mit einem Wärmestrome in bestimmtem, von der Natur des Leiters abhängigem Maaße ein elektrischer Strom verbunden sei —". 2. „ . . . daß durch einen elektrischen Strom die Wärme bewegt werde".

Bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit meiner früheren Mittheilung die Fortführungszahl des Stromes durch die Wärme mit ω, die Leitfähigkeiten für Wärme und für Elektricität durch k und γ, die Fortführungszahl für Wärme durch den Strom mit η, so setzt Kohlrausch:

$$\eta = C \times \frac{k}{\gamma} \omega.$$

Die von Kohlrausch als konstant betrachtete Größe C ist in meiner Theorie gleich $\frac{T}{\mathfrak{A}}$. Uebrigens sind die Gesetze der thermoelektrischen Kräfte und der Peltierschen Wärme von Kohlrausch im Wesentlichen in derselben Weise entwickelt worden, wie dies von mir geschehen ist. Dagegen giebt Kohlrauschs Formulierung der Grundannahmen Veranlassung zu einer Auffassung, welche die ganze Theorie einigermaßen verwickelt. Es

1) F. Kohlrausch über Thermoelektricität, Wärme- und Elektricitätsleitung. Poggendorff, Ann., Bd. 156, S. 601.

sei ein primärer elektrischer Strom i_0 gegeben; dieser führt mit sich einen Wärmestrom ηi_0; der Wärmestrom seinerseits gäbe darnach wieder Veranlassung zu einem elektrischen Strom $\omega \eta i_0$ u. s. f. Die gesammte Stromstärke würde also schließlich gegeben durch:

$$i = i_0(1 + \omega\eta + \omega^2\eta^2 + \cdots),$$

die Stärke des mitgeführten Wärmestromes durch:

$$\Omega = \eta(1 + \omega\eta + \omega^2\eta^2 + \cdots)i_0.$$

Analoge Formeln würden bei einem primär gegebenen Wärmestrom gelten. Diese Complikation der ursprünglichen einfachen Annahmen ist in meiner Theorie von vornherein ausgeschlossen; denn bei ihr handelt es sich um eine einzige, vollkommen bestimmte Bewegung der materiellen Theilchen, welche Träger der Elektricität sind. Jede Bewegung dieser Theilchen bedingt aber zugleich eine Bewegung von Elektricität und von Wärme, da jedes der Theilchen nicht blos ein Träger von Elektricität, sondern auch von lebendiger Kraft ist.

Für die Mitführungszahl ω für Elektricität durch Wärme ergiebt sich aus den Gleichungen 3 und 5 der früheren Mittheilung, in Verbindung mit den Gleichungen 48, 43 und 44:

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}}{9T}\,\frac{\varepsilon P_0 - \varepsilon N_0}{\varepsilon P_0 x + \varepsilon N_0 y}.$$

Setzen wir hier die früher gefundenen numerischen Werthe ein, so ergiebt sich:

$$\omega = -1{,}14.$$

Nun ist die Mitführungszahl für Wärme durch Elektricität:

$$\eta = \frac{T}{\mathfrak{A}} \cdot \omega \frac{k}{\gamma}.$$

Setzen wir hier den gefundenen Werth von ω und die Werthe von k und γ, wie sie für Wismuth gelten, ein, so finden wir:

$$\eta = -0{,}0086.$$

2. Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen und die im Inneren der Metalle beweglichen elektrischen Theilchen.

Durch die neueren Untersuchungen von Des Coudres, Wiechert, J. J. Thomson, W. Wien, Lenard, Kaufmann ist erwiesen, daß die Kathodenstrahlung auf einer

Emission negativ elektrischer Theilchen aus der Kathode beruht. Für das Verhältniß zwischen der elektrostatischen Ladung und der ponderabelen Masse dieser Theilchen findet Kaufmann den Werth:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_n} = 531 \times 10^{15} \quad (\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}).$$

Die elektrische Ladung ist dabei in elektrostatischem Maaße gemessen.

Nun liegt die Annahme nahe, daß die von der Kathode ausgeschleuderten negativ elektrischen Theilchen keine anderen sind, als die im Innern der Metalle frei beweglichen. Dann ergiebt sich aus Gleichung 47 der früheren Mittheilung:

$$c_n^2 = 0{,}012 \times 10^{-5} \times \frac{\varepsilon}{\mu_n}.$$

Somit:

$$c_n = 2{,}52 \times 10^5 . \mathrm{cm\,sec}^{-1}.$$

Die Kanalstrahlen bestehen nach den Untersuchungen von W. Wien aus positiv elektrischen Theilchen, die von der Kathode in einer Richtung ausgeschleudert werden, welche der Richtung der Kathodenstrahlen entgegengesetzt ist. Für das Verhältniß zwischen der elektrischen Ladung dieser Theilchen und zwischen ihrer ponderabelen Masse findet W. Wien:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_p} = 9{,}5 \times 10^{12}.$$

Seine Kathode bestand aus Eisen; nimmt man nun an, die ausgeschleuderten Theilchen beständen aus zweiwerthigen Jonen des Eisens, so wird ε gleich der doppelten Jonenladung sein, gleich 2η. Andererseits gilt für Wasserstoff:

$$\frac{\eta}{h} = 0{,}29 \times 10^{15};$$

wir erhalten somit bei einer Eisenkathode:

$$\frac{\mu_p}{h} = \frac{2 \times 0{,}29}{9{,}5} \times 10^3 = 61.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist das Verhältniß zwischen der Masse der von der Eisenkathode ausgesandten Theilchen zu der Masse des Wasserstoffions nahe gleich dem Atomgewichte des Eisens, gleich 56. Wir knüpfen daran die Annahme, daß bei einer Eisenkathode die positiv elektrischen Theilchen der Kanalstrahlen nichts anderes sind, als zweiwerthige Eisenionen. Natür-

lich kann erst durch weitere experimentelle Untersuchungen entschieden werden, ob in der That der Satz gilt, daß die Kanalstrahlen aus positiven Jonen des Kathodenmetalles bestehen. Trifft dieß zu, so liegt der Gedanke nahe, daß auch die beweglichen positiven Theilchen, die wir im Inneren der Metalle angenommen haben, Metallionen sind. Nun ist für die dreiwerthigen Jonen des Wismuth:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_p} = 4{,}2 \times 10^{12}.$$

Es ist aber nach Gleichung 47 der früheren Mittheilung:

$$c_p^2 = 1{,}7 \times 10^{-5} \times \frac{\varepsilon}{\mu_p},$$

somit:

$$c_p = 8{,}4 \times 10^3 \,\mathrm{cm.sec}^{-1}.$$

Bei 0° C. würden demnach in Wismuth die Geschwindigkeiten der beweglichen positiven und negativen elektrischen Theilchen sein:

$$u_p = 1{,}4 \times 10^5 \,\mathrm{cm.sec}^{-1},$$
$$u_n = 42{,}6 \times 10^5 \,\mathrm{cm.sec}^{-1}.$$

Die Entdeckung Zeemanns und die daran sich knüpfenden Arbeiten von H. A. Lorentz können zu der Vermuthung führen, daß das Licht des *Na* durch negativ elektrische Theilchen erzeugt werde, die sich in kreisförmiger Bewegung befinden; die Umlaufszeit der Theilchen würde übereinstimmen mit der Oscillationsdauer des Natriumlichtes. Für das Verhältniß von elektrischer Ladung und Masse ergiebt sich aus den Beobachtungen von Zeemann im Wesentlichen derselbe Werth ε/μ_n, wie aus den Messungen von Kaufmann. Wir werden dementsprechend auch die Licht erzeugenden elektrischen Theilchen im Natriumdampfe als identisch betrachten mit den beweglichen negativen Theilchen im Inneren der Conduktoren. Es ist dann nicht ohne Interesse, den Durchmesser des Kreises zu bestimmen, der von den negativ elektrischen Theilchen des Natriumdampfes durchlaufen wird, wenn ihre Geschwindigkeit von derselben Größenordnung ist, wie die in Wismuth gefundene Geschwindigkeit u_n. Wir setzen für Natriumdampf:

$$u_n = \nu \times 42{,}6 \times 10^5,$$

wo ν eine Zahl sein soll, die der Größenordnung nach von Eins nicht allzu verschieden ist. Bezeichnen wir den Durchmesser der

kreisförmigen Bahn, welche von unseren negativ elektrischen Theilchen durchlaufen wird, mit d, so ergiebt sich:

$$\frac{\pi d}{v \times 42{,}6 \times 10^5} = \frac{589 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{10}},$$

$$d = v \times 0{,}026 \times 10^{-6} \text{ mm.}$$

Es ist das ein Werth, der kleiner ist als diejenigen, welche man beispielsweise für die Molekulardurchmesser von Stickstoff, Kohlensäure anzunehmen pflegt:

Für das Produkt $u_n d$ ergiebt sich der Werth $v^2 \times 0{,}112$.

Es möge hinzugefügt werden, daß ein Werth von ähnlicher Größenordnung durch eine Berechnung erhalten wird, welche sich auf eine andere Thatsache bezieht. Nach der Vorstellung von Ampère wird der maximale Werth des magnetischen Momentes im Eisen erreicht, wenn alle Molekularströme parallel gerichtet sind. Nehmen wir an, die Menge der negativen elektrischen Theilchen, welche um ein zweiwerthiges Eisenatom in Kreisbewegung sich befinden, sei gleich dem doppelten der Valenzladung, so ergiebt sich für das Produkt aus Bahndurchmesser und aus Bahngeschwindigkeit der Werth 2,6.

Setzt man die Masse eines Wismuthatoms gleich

$$208 \times 7{,}8 \times 10^{-25} \text{ g},$$

so ist die Zahl der Wismuthatome in 1 ccm gleich 604×10^{20}. Setzt man die elektrische Ladung der dreiwerthigen Wismuthatome gleich $6{,}5 \times 10^{-10}$, so ergiebt sich für die Zahl der frei beweglichen Wismuthionen im ccm:

$$P_0 = \frac{0{,}17}{6{,}5} \times 10^{20} = 0{,}026 \times 10^{20}.$$

3. Beziehung zwischen der galvanomagnetischen Temperaturdifferenz und zwischen dem thermomagnetischen Transversaleffecte.

Mein verehrter Freund Voigt hat für die genannten Erscheinungen eine allgemeine Theorie auf Grund von thermodynamischen Principien entworfen; er fand auf diesem Wege eine gewisse Beziehung zwischen dem Coëfficienten der thermomagnetischen Temperaturdifferenz und dem Coëfficienten des galvanomagnetischen Effectes. In unserer Theorie ist die Beziehung der beiden Wirkungen zunächst ausgedrückt durch die Gleichungen 39 und 41 der früheren Mittheilung. Aus diesen Gleichungen

folgt aber weiter:

$$\frac{Q.\mathfrak{H}bi}{(T-T')gm} = \gamma xy = k \cdot \frac{\mathfrak{A}}{9T} \frac{P_0 y + N_0 x}{P_0 x + N_0 y}.$$

Benützt man nun die früher gefundenen numerischen Werthe, so ergiebt sich:

$$\frac{Q.\mathfrak{H}bi}{(T-T')gm} = 2{,}005 \times \frac{\mathfrak{A}k}{T}.$$

4. Wärmestrom ohne galvanischen Strom, galvanischer Strom ohne Wärmestrom.

In der Richtung der z-Axe wirke auf einen Metallcylinder, dessen Figurenaxe mit der z-Axe zusammenfällt, eine elektromotorische Kraft und ein Temperaturgefälle. Das letztern sei dT/dz, die erstere für die Längeneinheit gleich E. Der ganze Wärmestrom in der Richtung der z-Axe ist dann:

$$\mathfrak{W} = -k\frac{dT}{dz} + \eta\gamma E$$

der ganze galvanische Strom:

$$J = \gamma E - \omega k \frac{dT}{dz}.$$

Ist der galvanische Strom Null, so ist der Wärmestrom:

$$\mathfrak{W}_0 = -k(1+\omega\eta)\frac{dT}{dz}.$$

Ist der Wärmestrom Null, so ist der galvanische Strom:

$$J_0 = \gamma(1+\omega\eta)E.$$

5. Weitere numerische Daten.

Aus den Beobachtungen von Lorenz über Wärmeleitung und Elektricitätsleitung kann man für eine Reihe von Metallen die Konstanten β und δ berechnen. Die gefundenen Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Metall	β	δ	Metall	β	δ
Cu	0,00137	−0,000010	Fe	+0,00223	+0,000150
Mg	0,00157	+0,000033	Sn	0,00190	−0,000031
Al	0,00095	−0,000008	Pb	0,00193	−0,000061
Messing (r)	0,00014	−0,000009	Neusilber	−0,00110	−0,000085
Cd	0,00184	−0,000051	Sb	+0,00204	−0,000068
Messing (g)	−0,00037	+0,000092	Bi	0,00205	−0,000010

Aus den Werthen der Rotationskoëfficienten P und aus den galvanischen Leitfähigkeiten kann man mit Hülfe der früher gegebenen Formel die Differenzen $\mathfrak{u}-\mathfrak{v}$ der Beweglichkeiten berechnen. Die folgende Tabelle enthält die Werthe, welche sich aus den Beobachtungen von von Ettingshausen und Nernst ergeben.

Metall	$(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})\,10^5$	Metall	$(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})\,10^5$
Te	7,9	Cu	−0,022
Sb	0,42	Au	−0,026
Fe	0,10	Ag	−0,055
Cd	0,007	Mg	−0,023
Zn	0,006	Pd	−0,009
Pb	+0,00005	Na	−0,061
Sn	−0,00004	Ni	−0,022
Pt	−0,0016	Bi	−7,16
Al	−0,0085.		

Aus den Beobachtungen der galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen, welche von Ettingshausen ausgeführt hat, ergiebt sich die Zusammenstellung:

Metall	Werthe von $\dfrac{\gamma(T-T')gm}{\mathfrak{H}bi}$
Bi	$2{,}98 \times 10^{-10}$
Te	$0{,}32 \times 10^{-10}$
Sb	positiv.

Die von Nernst bestimmten Coëfficienten des thermomagnetischen Effektes endlich sind folgende:

Metall	Q	Metall	Q
Bi	0,132	Fe	−0,00156
Sb	0,00887	Cu	−0,000090
Ni	0,00861	Zn	−0,000054
Co	0,00224	Ag	−0,000046.

In unserer Theorie erscheint Q bisher als eine wesentlich positive Größe; die negativen Werthe, welche den vier letzten Metallen entsprechen, stehen mit dieser Theorie vorerst in Widerspruch. Um ihn zu lösen, bemerken wir, daß für die Bewegung der elektrischen Theilchen im Inneren des Metalls nicht die Feldintensität in Betracht kommt, welche außerhalb des Metalles herrscht. Vielmehr handelt es sich um einen Mittelwerth der Intensität in den Zwischenräumen der Moleküle, welche von den

beweglichen elektrischen Theilchen durchlaufen werden. Wir haben also in all unseren Formeln an Stelle von $\mathfrak{H}$ einen anderen Werth zu setzen, den wir mit $\lambda\mathfrak{H}$ bezeichnen wollen. Führen wir dann die neuen Größen $\mathfrak{u}' = \lambda\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}' = \lambda\mathfrak{v}$ ein, so bleiben die Formeln dieselben, wie bisher, nur treten an Stelle von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Größen $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$. Hat λ einen negativen Werth, was keineswegs unmöglich scheint, so werden $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ und damit auch Q negativ.

Erst nach Abschluß der vorliegenden Mittheilung wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß die Herrn von Ettingshausen und Nernst sämmtliche in Betracht kommende Erscheinungen an einer und derselben Wismuthpatte beobachtet und über die Resultate in einer späteren Arbeit berichtet haben. Es ist klar, daß die so erhaltenen Zahlen ein sehr viel besseres Material zu der Prüfung der Theorie abgeben, als die seither benutzten. Ich habe die Rechnung auch mit diesen neuen Daten durchgeführt; quantitativ ergeben sich in der That zum Theil erheblich andere Zahlen, als diejenigen, welche in den vorhergehenden Mittheilungen angegeben sind; qualitativ wird aber nichts geändert. Dieß ist der Grund, weßhalb ich in dieser zweiten Mittheilung die früheren Zahlenwerthe nicht mehr nachträglich verändert habe. In einer etwas ausführlicheren Darstellung, welche an anderer Stelle erscheinen soll. werden von vornherein jene späteren Beobachtungen benutzt werden.

Bemerkung über die Größe der Spannungen und Deformationen, bei denen Gleitschichten im Kalkspath entstehen.

Von

W. Voigt.

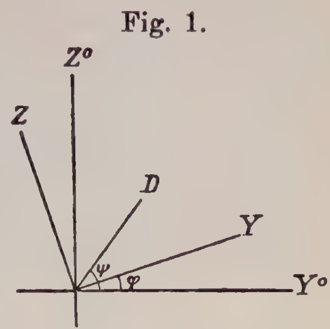
Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Mai 1898.

So lebhaftes Interesse die räthselhafte Erscheinung, die man als das Auftreten von Gleitschichten bezeichnet, zu erwecken geeignet ist, so fehlt es doch bisher an einer zahlenmäßigen Feststellung der Umstände, unter denen sie eintritt. Die gewöhnlichen Methoden zur Darstellung von Gleitschichten, die überaus complicirte Deformationen der Krystalle ins Werk setzen, gestatten solche Messungen auch nicht; indessen kann man leicht eine Anordnung finden, welche jenen Uebelstand nicht besitzt. Es genügt hierzu, ein rechtwinkliges Parallelopiped der zu untersuchenden Substanz von geeigneter Orientierung gegen die krystallographischen Axen gleichförmigen, allmählig anwachsenden normalen Drucken gegen ein Flächenpaar zu unterwerfen und den Gesammt-Druck P zu bestimmen, bei dem die erste Gleitschicht entsteht. Unter der Annahme, daß bei diesem Vorgang das Parallelopiped homogen deformirt wird, kann man dann, falls die Elasticitätsmoduln der beobachteten Substanz bekannt sind, die Spannungs- und Deformationsverhältnisse berechnen, die beim Auftreten der ersten Gleitschicht vorhanden waren. Dabei ist übrigens eine s t r e n g homogene Deformation nicht erforderlich; denn die Verschiebung einer ganzen Schicht hängt höchst wahrscheinlich von dem m i t t l e r e n, längs derselben herrschenden Zustand ab, und wenn die Gleitschicht das gepreßte Parallelopiped so durchsetzt, daß ihre Begrenzung ringsum in dessen freien Seitenflächen liegt, so ist bei m ä ß i g e n Abweichungen von der Homo-

genität der mittlere Spannungszustand in ihr offenbar sehr nahe derselbe, der aus dem ausgeübten Gesammtdruck P bei homogener Deformation folgen würde.

Bei der Aufstellung der Formeln wollen wir uns sogleich auf den Fall eines Krystalles der holoëdrischen Gruppe des rhomboëdrischen Systemes beschränken, welcher der Kalkspath angehört. Die dreizählige krystallographische Hauptaxe werde zur Z^0-Axe, eine der zweizähligen Nebenaxen zur X^0-Axe gewählt, die $+Y^0$-Axe trete aus einer der Flächen des Spaltungsrhomboëders aus, welche die $+Z^0$-Axe umgeben. Dann liegt bekanntlich das eine System von Gleitflächen normal zur Y^0Z^0-Ebene und unter einem Winkel von $+26^0 15'$ gegen die X^0Y^0-Ebene geneigt.

Fig. 1.



Wir wählen eine zu diesen Gleitflächen parallele Ebene zur XY-Ebene eines zweiten Coordinatensystemes, dessen X-Axe und YZ-Ebene mit der X^0-Axe und Y^0Z^0-Ebene des oben definirten Hauptaxensystemes zusammenfällt. Der Vorgang des Gleitens stellt sich dann dar als eine homogene Deformation mit den Componenten $U = 0$, $V = kz$, $W = 0$ nach den Axen X, Y, Z, wobei k für Kalkspath den Werth 0,656 besitzt. Wegen dieser einfachen Ausdrücke für U, V, W empfiehlt es sich, auch die das Gleiten bedingenden (elastischen) Spannungen und Deformationen auf das Hülfsaxensystem XYZ zu beziehen.

Sind die beiden gedrückten Flächen des beobachteten Parallelopipeds normal zur Y^0Z^0-Ebene, so liegt der Gesammtdruck P und sein auf die Flächeneinheit des Querschnittes Q kommender Antheil $D = P/Q$ in der Y^0Z^0-Ebene, also auch in der YZ-Ebene.

Setzt man kurz

$$\cos(D, Y) = \beta, \quad \cos(D, Z) = \gamma,$$

so gilt für die in bekannter Weise bezeichneten Druckcomponenten nach dem Axensystem XYZ:

$$1) \quad X_x = 0, \; Y_y = D\beta^2, \; Z_z = D\gamma^2, \; Y_z = D\beta\gamma, \; Z_x = 0, \; X_y = 0.$$

Um die Deformationscomponenten nach denselben Axen zu berechnen, ist es vortheilhaft, zunächst die nach den Hauptaxen X^0, Y^0, Z^0 zu bilden, da jene mit den bezüglichen Drucken am einfachsten durch die sechs Elasticitätsmoduln s_{hk} der Substanz verknüpft sind. Es gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
-x_x^0 &= s_{11} X_x^0 + s_{12} Y_y^0 + s_{13} Z_z^0 + s_{14} Y_z^0,\\
-y_y^0 &= s_{12} X_x^0 + s_{11} Y_y^0 + s_{13} Z_z^0 - s_{14} Y_z^0,\\
-z_z^0 &= s_{13} X_x^0 + s_{13} Y_y^0 + s_{33} Z_z^0,\\
-y_z^0 &= s_{14} X_x^0 - s_{14} Y_y^0 \qquad - s_{44} Y_z^0,\\
-z_x^0 &= s_{44} Z_x^0 + 2 s_{14} X_y^0,\\
-x_y^0 &= 2 s_{14} Z_x^0 + 2(s_{11} - s_{12}) X_y^0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Nun seien die Richtungscosinus von X, Y, Z und D gegen die Hauptaxen X^0, Y^0, Z^0 durch folgendes Schema gegeben:

3)

	X	Y	Z	D
x^0	1	0	0	0
y^0	0	β_2	$-\gamma_2$	β_0
z^0	0	γ_2	β_2	γ_0.

Dann gilt einerseits

4) $X_x^0 = 0,\ Y_y^0 = D\beta_0^2,\ Z_z^0 = D\gamma_0^2,\ Y_z^0 = D\beta_0\gamma_0,\ Z_x^0 = 0,\ X_y^0 = 0$

andrerseits

$$
\begin{aligned}
x_x &= x_x^0,\\
y_y &= y_y^0 \beta_2^2 + z_z^0 \gamma_2^2 + y_z^0 \beta_2 \gamma_2,\\
z_z &= y_y^0 \gamma_2^2 + z_z^0 \beta_2^2 - y_z^0 \beta_2 \gamma_2,\\
y_z &= -(y_y^0 - z_z^0)\, 2\beta_2\gamma_2 + y_z^0 (\beta_2^2 - \gamma_2^2),\\
z_x &= z_x^0 \beta_2 - x_y^0 \gamma_2,\quad x_y = z_x^0 \gamma_2 - x_y^0 \beta_2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die Werthe (2) und (4) sind nun mit den Formeln (5) zu combiniren, um die gesuchten Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ zu erhalten. Die Resultate lauten folgendermaßen

$$
\begin{aligned}
-x_x &= D(s_{12}\beta_0^2 + s_{13}\gamma_0^2 + s_{14}\beta_0\gamma_0),\\
-y_y &= D[\beta_2^2(s_{11}\beta_0^2 + s_{13}\gamma_0^2 - s_{14}\beta_0\gamma_0)\\
&\qquad + \gamma_2^2(s_{13}\beta_0^2 + s_{33}\gamma_0^2) + \beta_2\gamma_2(-s_{14}\beta_0^2 + s_{44}\beta_0\gamma_0)],\\
-z_z &= D[\gamma_2^2(s_{11}\beta_0^2 + s_{13}\gamma_0^2 - s_{14}\beta_0\gamma_0)\\
&\qquad + \beta_2^2(s_{13}\beta_0^2 + s_{33}\gamma_0^2) - \beta_2\gamma_2(-s_{14}\beta_0^2 + s_{44}\beta_0\gamma_0)],\\
-y_z &= D[-2\beta_2\gamma_2(s_{11}\beta_0^2 + s_{13}(\gamma_0^2 - \beta_0^2) - s_{33}\gamma_0^2 - s_{14}\beta_0\gamma_0)\\
&\qquad + (\beta_2^2 - \gamma_2^2)(-s_{14}\beta_0^2 + s_{44}\beta_0\gamma_0)],\\
-z_x &= 0,\ -x_y = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Für die Verschiebungscomponenten u, v, w eines beliebigen Punktes des Krystalles kann man hiernach schreiben

$$7)\qquad u = x_x \cdot x,\ v = y_y \cdot y + y_z \cdot z,\ w = z_z \cdot z;$$

dabei ist für den Coordinatenanfang u, v und für alle Punkte der XY-Ebene w gleich Null angenommen.

Von den Ausdrücken (6) interessirt in erster Linie der für y_z, da seine nummerische Berechnung und die Vergleichung der während der Spannung geltenden Formel $v = y_y \cdot y + y_z \cdot z$ mit der nach vollendetem Gleiten gültigen $V = kz$ eine deutliche Vorstellung davon gewährt, in wie weit die vorhergehende Deformation das schließliche Gleiten vorbereitet.

Führen wir gemäß der obigen Figur 1 die Winkel

$$D, Y^0 = \psi,\quad Y, Y^0 = \varphi$$

ein, so läßt sich der Ausdruck für y_z leicht auf die folgende zur nummerischen Berechnung geeignete Form bringen

$$8)\quad y_z = \tfrac{1}{2} D [\sin 2\varphi \left((s_{11} + s_{33}) + (s_{11} - s_{33} - 2s_{13}) \cos 2\psi - s_{14} \sin 2\psi \right) + \cos 2\varphi (s_{14}(1 + \cos 2\psi) - s_{44} \sin 2\psi)].$$

Für Kalkspath ist $\varphi = 26°15'$; außerdem folgt aus Elasticitätsbeobachtungen [1])

$$s_{11} = 11{,}14.10^{-8},\ s_{33} = 17{,}13.10^{-8},\ s_{44} = 39{,}52.10^{-8}$$
$$s_{13} = -4{,}24.10^{-8},\ s_{14} = 8{,}98.10^{-8}$$

wobei der Druck als in Grammen pro Quadratmillimeter gemessen vorausgesetzt ist; die Benutzung dieser Werthe — von vornherein vielleicht bedenklich — wird nachträglich dadurch gerechtfertigt, daß die in unserem Fall stattfindenden Deformationen sich außerordentlich klein ergeben. Aus den angegebenen Zahlen folgt:

$$9)\quad \begin{aligned} y_z &= \tfrac{1}{2} D . 10^{-8} [0{,}794 (11{,}14 + 17{,}13 \cos 2\psi - 8{,}98 \sin 2\psi) \\ &\qquad + 0{,}609 (8{,}98 (1 + \cos 2\psi) - 39{,}52 \sin 2\psi)] \\ &= \tfrac{1}{2} D . 10^{-8} [14{,}3 + 19{,}1 \cdot \cos 2\psi - 31{,}2 \sin 2\psi]. \end{aligned}$$ —

Die Beobachtungen, die ich mit Unterstützung der Kgl. Gesell-

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1889 Nr. 19.

schaft der Wissenschaften durchgeführt habe, sind an Präparaten angestellt worden, die Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg für mich angefertigt hatten. Es waren rechteckige Prismen, deren eine Kante etwa 10 mm lang war, während die anderen 5—6 mm betrugen. Das zu beobachtende Parallelopiped wurde mit seiner Längskante aufrecht gestellt, oben und unten mit Lederplättchen armirt und dann einem verticalen Druck ausgesetzt. Dieser Druck wurde mittelst einer Hebelvorrichtung erzeugt, deren Belastung durch zufließendes Quecksilber allmählich gesteigert werden konnte. Die erhaltenen Resultate weichen nicht unbedeutend von einander ab, wie das nach dem allgemein bei Festigkeitsbeobachtungen Wahrgenommenen nicht anders zu erwarten war. Indessen beeinträchtigt die Unsicherheit der definitiven Zahlen um 10—20 %, wie man sehen wird, die zu ziehenden Folgerungen nicht wesentlich.

Die erste Gattung von Präparaten lag mit ihrer Längskante um 24° 36′ gegen die erzeugten Gleitschichten geneigt, sodaß bei ihnen der Winkel ψ rund 1° 40′ betrug. Der Werth von D, bei dem die erste Gleitschicht erschien, betrug bei der am glättesten verlaufenden Beobachtung ca 14.10³ Gramm pro Quadratmillimeter.

Hieraus folgt für die scheerende Druckcomponente Y_z nach (1) der Werth $\frac{1}{2}\,14.10^3 . \sin 49^\circ 12'$, d. h. $3,2 . 10^3$, — ein Betrag, der (z. B. bei Drillungen) gegen andere als Gleitflächen sehr wohl wirken kann, ohne ein Abscheeren hervorzurufen.

Für die Schiebung y_z erhält man nach (9) den Werth

$$y_z = 0{,}00022.$$

Seine außerordentliche Kleinheit beweist, daß es in der That unbedenklich war, zu seiner Berechnung die aus den Elasticitätsbeobachtungen abgeleiteten Werthe der Elasticitätsmoduln zu benutzen.

Die zweite Gattung von Präparaten lag mit ihrer Längskante um 45° gegen die erzeugte Gleitfläche geneigt, sodaß der Winkel ψ gleich $-18^\circ 45'$ war.

Der hier erhaltene Werth von D betrug im Mittel ca 15.10³ Gramm pro Quadratmillimeter.

Dem entspricht eine scheerende Druckcomponente Y_z gleich $\frac{1}{2}\,15.10^3 \sin 90^\circ$, d. h. $7{,}5.10^3$, ein Betrag der mehr wie doppelt so groß ist, als der vorhin erhaltene.

Für die Schiebung ergiebt die Formel (9) hier

$$y = 0{,}00037.$$

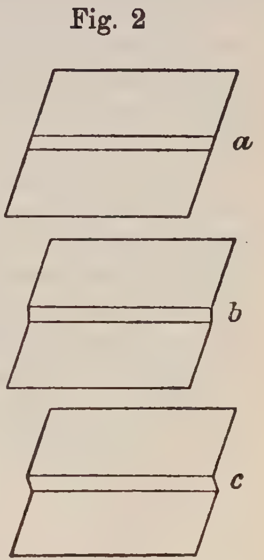
Die Abweichung zwischen den verschiedenen Werthen $Y_{,}$ und $y_{,}$ ist keineswegs allein auf die Unsicherheit der Beobachtungen zurückzuführen. Die wahren Bedingungen für das Entstehen von Gleitschichten sind bisher noch ganz unbekannt, und es ist ebenso wenig wahrscheinlich, daß sie nur einen bestimmten Werth der scheerenden Kraft, als daß sie nur einen solchen der Schiebung nach der Gleitfläche verlangen. Ich weise dazu auf die analoge Unsicherheit betreffs des Gesetzes der Festigkeit isotroper Körper hin [1]).

Das Hauptinteresse der erhaltenen Zahlen liegt in der Größenordnung von $y_{,}$, die wir durch die Formel

$$y_{,} \;(=)\; 0{,}0003$$

andeuten wollen.

Fig. 2



Die zunächst liegende, allein an die geometrischen Verhältnisse anknüpfende Vorstellung über das Zustandekommen einer Gleitschicht, — die vielleicht hier und da auch factisch gehegt wird — würde wohl folgende sein. Sei in nebenstehender Figur 2, die einen zur Symmetrieebene YZ parallelen Schnitt eines Kalkspathspaltungsstückes wiedergiebt, unter a eine sehr dünne Schicht in ihrer ursprünglichen Position dargestellt, unter c dagegen so, wie sie sich nach dem Gleiten zeigt. Dann möchte man vermuthen, daß zum Zwecke der Umwandlung die Schicht zunächst in die unter b verzeichnete Position gebracht werden müßte, wo sie sich auf der labilen Grenze zwischen den beiden stabilen Zuständen a und c zu befinden scheint. Eine kleine Abweichung nach der einen oder nach der andern Seite sollte dann das Gleiten nach a oder nach c hin bewirken.

Unsere Resultate zeigen, daß der Vorgang sich in Wirklichkeit ganz anders abspielt. Während bei der soeben geschilderten Vorstellung eine Drehung der seitlichen Begrenzungslinien der betrachteten dünnen Schicht um rund 19° erforderlich wäre, um das Gleiten einzuleiten, zeigt der erhaltene Werth

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, Nr. 13, p. 521.

$$y_z \ (=) \ 0{,}0003,$$

daß diese Drehung in Wirklichkeit nur etwa eine Bogenminute beträgt. Eine Drehung in der entgegengesetzten Richtung von demselben Betrag reicht somit auch aus, um die Schicht aus der zweiten Position c in die erste a zurückzuführen. Zwischen diesen beiden durch Drehungen aus den stabilen Gleichgewichtslagen erreichten Grenzen liegen also lauter labile Zustände.

Man muß hieraus schließen, daß für das Gleiten einer Schicht in erster Linie nicht ihre geometrische Configuration, sondern ein — natürlich mit dieser in Zusammenhang stehender — Vorgang in den kleinsten Theilchen der Krystallsubstanz maßgebend ist. Daß bei dem Gleiten selbst eine innermolekulare Umlagerung stattfinden muß, folgt schon aus Symmetriebetrachtungen. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich aber, daß der für die Aufhebung der zuvor vorhandenen Stabilität des Systems maßgebende Theil der innermolekularen Veränderung, den wir uns als keineswegs unbeträchtlich zu denken haben werden, bereits bei diesen, das Gleiten vorbereitenden minimalen Deformationen vor sich gehen muß.

Dies Resultat scheint mir einiges Interesse zu verdienen. Denn da die Deformationen bei den oben beschriebenen Versuchen sich in Nichts von den sonst (z. B. bei Elasticitätsbeobachtungen) benutzten unterscheiden, auch nicht anzunehmen ist, daß Kalkspath sich völlig singulär verhält, so wird man schließen dürfen, daß bei allen Deformationen fester Körper innermolekulare Bewegungen von meist erheblicher Größe stattfinden. Eine Elasticitätstheorie, welche, wie die gelegentlich zu bestimmtem Zwecke von mir entwickelte[1]), die Moleküle als starre Körper behandelt, wird also nur eine Annäherung darstellen. Indessen sieht man leicht, daß die allgemeinere Vorstellung dieselben Endgleichungen, nur mit anderer Bedeutung der Parameter, liefern muß, wie jene specielle.

Sind die Deformationen von starken Umlagerungen im Innern der Moleküle begleitet, so ergiebt sich daraus offenbar ein neues Argument für die von mir an anderer Stelle vertretene Auffassung[2]), daß die Erscheinungen der Piëzoelectricität auf der Aenderung der Anordnung der electrisch geladenen Atome im Molekül beruhen. Und da die Pyroelectricität ganz oder wenigstens zum

1) W. Voigt, Gött. Abh. Bd. 34, Nr. 2, 1887.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, Nr. 16, p. 669.

großen Theil auf die durch Temperaturänderung bewirkten Deformationen zurückzuführen ist, so wird man auch sie ähnlich erklären dürfen.

Freilich wird eine molekulare Theorie dieser, wie aller an festen Körpern wahrnehmbaren Erscheinungen nach dem oben Dargelegten nur immer schwieriger erscheinen. Denn wenn, wie bewiesen zu sein scheint, minimale Deformationen beträchtliche Umlagerungen im Innern der Moleküle hervorrufen, so wird jedenfalls auch die Größe der einzelnen Moleküle nicht als verschwindend klein neben ihrem mittleren Abstand betrachtet werden dürfen, — und welche enorme Complication die theoretischen Entwickelungen durch diesen Umstand erhalten, ist bekannt.

Göttingen, Anfang Mai 1898.

Zur Kenntnis der Dispersion im electrischen Spectrum des Wassers.

Von

Erich Marx.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 14. Mai 1898.

Von verschiedenen Beobachtern sind Messungen von Brechungsexponenten des Wassers im elektrischen Spektrum ausgeführt worden. Für Wellen von 4 mm bis zu ∞ langen Wellen liegen Beobachtungen vor. Die größte Lücke welche die Untersuchungen des Brechungsexponenten bei variirende Periode aufweisen, liegt in dem Schwingungsgebiet, welches sich von einer Wellenlänge von 2 cm bis zu einer solchen von 75 cm ausdehnt. Eine im physikalischen Institut der Universität Göttingen zur Ergänzung der bekannten Beobachtungsdaten von mir angestellte Experimentaluntersuchung, welche sich der Methode der Drahtwellen bediente, ergab für die Brechungsexponenten des Wassers einen periodischen Verlauf, der einer einfachen Regel zu folgen scheint.

Die Zusammenstellung der vorliegenden Beobachtungen liefert die folgende Dispersionstabelle. Hierin bedeutet λ die Wellenlänge in Luft in cm, n^2_{17} das Quadrat des auf 17°C. reducirten Brechungsexponenten, T die Periode der elektrischen Schwingung.

Dispersionstabelle des Wassers.

Beobachter	n^2_{17}	n_{17}	λ	T
Nernst [1])	80(ε)	8,944($\sqrt{\varepsilon}$)	$\sim$ 35000	$\sim 10^5 \times 10^{-10}$
Cohn und Zeemann [2])	79,4	8,91	12—1400	$\sim$ 400 „
Cole [3]), Cohn u. Zeemann [2])	80,82	8,99	$\sim$ 600	200 „
Drude [4])	80,6	8,978	205	66,6 „
Drude [4])	81,67	9,037	75	25 „
Marx	83,73	9,150	53	17,7 „
Drude [4])	83,60	9,143	44,1	14,7 „
Marx	82,50	9,083	36,5	12,2 „
Cole [3])	77,44	8,80	5	1,66 „
Marx	85,00	9,22	3,2	1,07 „
Lampa [5])	80,45	8,969	0,8	0,266 „
Lampa	88,45	9,405	0,6	0,20 „
Lampa	90,23	9,499	0,4	0,13 „

Die Maxima und Minima des Brechungsexponenten sind durch die immerhin geringe Anzahl von Beobachtungen verhältnismäßig gut eingeengt. Folgende Tabelle enthält die Werte derselben, wie sie sich durch eine graphische Interpolation aus den Beobachtungsdaten ergeben; dabei wurden die Wellenlängen als Abscissen, die Brechungsexponenten als Ordinaten aufgetragen. Mit α, β, γ, δ, ε, ζ sind die Ordinaten bezeichnet die einem Maximum oder Minimum entsprechen. Die Gesetzmäßigkeit, nach der sie sich annähernd berechnen lassen, ist folgende.

$$\lambda_{\max} = 2^{2n_u+1}\varrho;\ \lambda_{\min} = 2^{2n_g+1}\varrho,$$

wo n_u ungerade, n_g gerade Zahlen bedeutet. ϱ ist gleich 0,4.

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Phys. Chemie, 14, p. 659. 1894.
2) Cohn und Zeemann, Akad. d. Wissensch. zu Amsterdam 1895. Spt.
3) A. D. Cole, Wied. Ann. 57, p. 290, 1896.
4) P. Drude, Abhdl. d. k. S. Ak. Bd. XXIII, No. 1, 1896, p. 55.
5) A. Lampa, Wien. Ber. (2) 105. Juli 1896.

Ordin.	Graphisch Interpol.	λ beob.	λ berechnet
α	1,0	$\sim 0,8$	$0,8 = 0,4 \cdot 2^1 =$ Minimum
β	2,8	$\sim 3,2$	$3,2 = 0,4 \cdot 2^3 =$ Maximum
γ	11,4	$5 < \lambda < 36,5$	$12,8 = 0,4 \cdot 2^5 =$ Minimum
δ	50,6	$44 < \lambda < 53$	$51,2 = 0,4 \cdot 2^7 =$ Maximum
ε	199	205	$204,8 = 0,4 \cdot 2^9 =$ Minimum
ζ	812	$600 < \lambda < 1200$	$819,2 = 0,4 \cdot 2^{11} =$ Maximum

Eine Berechnung weiter hinaus, etwa für $n = 6$, führt auf $\lambda_{min} = 3276,8$. Dieser Werth entspricht dem Sinne nach der Beobachtung des Herrn Nernst mit schnellen Schwingungen in der Brückencombination[1]), falls die angewandte Schwingungszahl zu 10^6 angenommen wird. Herr Nernst findet $\varepsilon_{17} = 78,3$. Auch die in der Tabelle angegebene Beobachtung von Cohn und Zeemann für Wellen von 1200—1400 cm, stimmt dem Sinne nach mit der gegebenen Regel überein. Die Maxima und Minima werden mit wachsender Wellenlänge immer mehr gedämpft und sind dem entsprechend schwerer zu beobachten. Außerdem ist zu bedenken, daß bei Wellen von über 1200 cm Länge nur noch Dielektricitätsconstanten, d. h. die Werte $n^2 - k^2$ [2]), nicht die Brechungsexponenten n gemessen werden können. Aus einer Dispersion, welche bei der Dielektricitätsconstante beobachtet wird, kann aber nicht unmittelbar auf die Dispersion bei der Brechung geschlossen werden. Bei der noch immer verhältnismäßig geringen Anzahl von Beobachtungen kann erst durch weitere Versuche festgestellt werden, in wie weit die vermutete Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Maxima und Minima der Wirklichkeit entspricht. Aus den vorliegenden Beobachtungen ergiebt sich die Regel.

Im elektrischen Spektrum des Wassers folgen die Maxima und Minima der Brechungsexponenten, annähernd in Doppeloktaven der Grundschwingung, mit immer schwächer werdender Intensität.

---

1) W. Nernst, Wied. Ann. 60, 1897, p. 611.

2) Der Absorptionsindex k ist dadurch definirt, daß die Amplitude der einfallenden Welle auf der Strecke von einer Wellenlänge im Verhältnis $1 : e^{2\pi k}$ abnimmt.

Ueber Transformationen von Bewegungen.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Mai 1898 von Prof. Klein.

§ 1.

Boltzmanns Transformation der Centralbewegungen.

In seinen *Vorlesungen über die Principe der Mechanik* (1. Teil, Leipzig 1897) bemerkt Boltzmann (S. 73), es scheine wichtig, „auch jenen speciellen Fällen der gegenwärtig aussichtsvollsten Bilder, welche nicht bisher beobachteten Thatsachen entsprechen, einige Aufmerksamkeit zuzuwenden. Sie können erstens in Zukunft einmal zur Darstellung beobachteter Thatsachen sich eignen, und zweitens erhalten wir erst durch das Studium aller möglichen Fälle auch eine bessere Uebersicht über den inneren Zusammenhang jener speciellen Fälle, die uns schon jetzt nützlich sind". Mit dieser Bemerkung rechtfertigt er eine ausführliche Untersuchung des allgemeinen Charakters der bei einer Centralbewegung möglichen Bahnformen, eine Untersuchung, mit der Korteweg 1884 einen viel versprechenden Anfang gemacht hatte[1]. Als sehr nützlich erweist sich dabei eine von Boltzmann entdeckte *Transformation der Centralbewegungen*, die es ermöglicht, sobald die Bahnen für ein Kraftgesetz bekannt sind, für unzählige andre, mit dem ursprünglichen in einfacher Beziehung stehende Kraftgesetze die Bahnen zu verzeichnen; was Boltzmann

1) Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, t. XIX. Harlem 1884, S. 391—434, t. XXI. Harlem 1887, S. 201—205; vergl. auch Staude, Berichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, Jahrgang 1888, S. 399—405.

an verschiedenen lehrreichen Beispielen erläutert. Je interessanter aber seine Darlegungen sind, um so empfindlicher berührt ein Mangel: *jene Transformation trägt den Character eines mathematischen Kunstgriffs, und man vermißt die Angabe ihrer physikalischen Bedeutung.* Hierin liegt die Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit, in der Boltzmanns Untersuchungen ergänzt und weitergeführt werden.

Jede Centralbewegung in einer Ebene läßt sich in zwei Bewegungen zerlegen: die Drehung des Radius vectors r um das Centrum C und die geradlinige Bewegung des materiellen Punktes M der Masse 1 auf dem rotirenden Radius vector. Zur Bestimmung der ersten Bewegung dient der *Flächensatz*:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = k, \tag{1}$$

bei dem ϑ den Winkel bezeichnet, den r mit einem festen, durch C gelegten Strahl bildet, während k eine Konstante bedeutet. Durch Integration folgt aus (1):

$$\vartheta = k.\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2}, \tag{2}$$

und die Quadratur läßt sich ausführen, sobald die Bewegung von M auf dem als fest anzusehenden Radius vector bekannt ist. Um sie zu ermitteln, hat man der auf M wirkenden Centralkraft $f(r)$ die *Centrifugalbeschleunigung* $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ hinzuzufügen und erhält daher vermöge (1) für die Bewegung des Punktes M die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f(r) + \frac{k^2}{r^3}. \tag{3}$$

Die allerdings recht nahe liegende Deutung des Zusatzgliedes $\frac{k^2}{r^3}$ als einer Centrifugalbeschleunigung habe ich 1885 gefunden und in meiner Dissertation angegeben[1]). In der Literatur über Centralbewegungen fand ich sie nirgends erwähnt; jedoch hat, wie ich nachträglich erfuhr, Clebsch in seinen Vorlesungen über Mechanik (1858) darauf hingewiesen.

Aus (3) folgt durch Integration

1) *Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche.* Berlin 1885, S. 19.

(4) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\int f(r)dr - \frac{k^2}{r^2},$$

und die Verbindung dieser Gleichung mit (1) liefert die *Differentialgleichung der Bahnen* des Punktes M in der Ebene (r, ϑ):

(5) $$d\vartheta = \frac{kdr}{r^2\sqrt{2\int f(r)\,dr - \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Während nun Boltzmann seine Transformation der Centralbewegungen aus der Gleichung (5) ableitet, tritt die physikalische Bedeutung der Sache sofort in Evidenz, wenn man von der Gleichung (3) ausgeht. Legt man nämlich der Konstanten k einen festen Wert bei, so definirt (3) eine bestimmte Bewegung auf einer geraden Linie. Umgekehrt aber gehören zu dieser Bewegung unzählig viele Centralbewegungen, denn dem Kraftgesetze $f_1(r)$ entspricht die Gleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f_1(r) + \frac{k_1^2}{r^3},$$

die mit (3) identisch wird, sobald man

$$f_1(r) = f(r) + \frac{k^2 - k_1^2}{r^3}$$

setzt. Man kann also, ohne die Bewegung auf dem Radius vector zu ändern, einen Teil der Centrifugalkraft, etwa $\frac{a}{r^3}$, zur Centralkraft hinzunehmen, wenn man nur bei dem neuen Kraftgesetze

(6) $$f_1(r) = f(r) + \frac{a}{r^3}$$

solche Bahnen wählt, für welche die Konstante des Flächensatzes den Wert

(7) $$k_1 = \sqrt{k^2 - a}$$

erhält.

Vergleicht man jetzt entsprechende Bahnen (r, ϑ) und (r_1, ϑ_1), die beziehungsweise zu $f(r)$ und k, $f_1(r)$ und k_1 gehören, so werden die beiden Radii vectores r und r_1 dieselben Functionen der Zeit t, es ist also

(8) $$r_1(t) = r(t),$$

dagegen wird

$$\vartheta = k.\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2}, \qquad \vartheta_1 = k_1.\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2},$$

und es besteht daher zwischen den Azimuthen die Beziehung

(9) $$\vartheta_1(t) = \sqrt{1-\frac{a}{k^2}}.\vartheta(t),$$

die es ermöglicht aus jeder Bahn des ersten Problems sofort eine Bahn des zweiten Problems abzuleiten. Hierin aber besteht Boltzmanns Transformation der Centralbewegungen.

§ 2.

Transformation der Bewegungen eines Punktes auf einer Rotationsfläche.

Ebenso wie das Problem der Centralbewegungen in der Ebene als ein besonderer Fall derjenigen Bewegungen eines materiellen Punktes M auf einer Rotationsfläche aufgefaßt werden kann, bei denen die Kräftefunktion in den Parallelkreisen konstant bleibt, ebenso läßt sich auch Boltzmanns Transformation der Centralbewegungen als ein besonderer Fall gewisser Transformationen solcher Bewegungen auf einer Rotationsfläche ansehen.

Man gelangt zu den genannten Transformationen, indem man die Lösung dieses bekannten, schon von Newton, Lagrange und Jacobi behandelten dynamischen Problems [1]) folgendermaßen bewerkstelligt. Zunächst gilt der Flächensatz in Bezug auf die Axe der Rotationsfläche, die zur z-Axe gewählt werde, es ist also

(1') $$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = k;$$

r bezeichnet den Abstand des Punktes M von der z-Axe, ϑ den Winkel, den eine um diese Axe rotirende Halbebene mit einer festen Halbebene bildet. Aus (1') folgt durch Integration

---

1) Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, Lib. I. Sect. X, Lagrange, Mécanique analytique, Oeuvres t. XII, S. 199, Jacobi, De motu puncti singularis, Werke Bd. IV, S. 263—288. Weitere Literaturangaben findet man in meiner schon erwähnten Dissertation, in der ich auch den allgemeinen Character der Bahnformen untersucht habe; Kortewegs Arbeiten über Centralbewegungen in der Ebene, die sich mit diesen Untersuchungen vielfach berühren, sind mir leider erst später bekannt geworden.

(2′) $$\vartheta = k . \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2},$$

sodaß alles darauf ankommt die Bewegung von M auf dem in der Halbebene befindlichen Meridian zu ermitteln. Will man von der Rotation der Halbebene absehen, so ist der auf M wirkenden Kraft $f(r)$ die Centrifugalbeschleunigung

$$r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{r^3}$$

hinzuzufügen. Die Bewegung auf dem Meridian wird dann durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt, die, für

(10) $$z = \varphi(r)$$

als Gleichung des Meridians, die Gestalt annimmt:

(4′) $$\left(1+\varphi'^2(r)\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\int f(r)\,dr - \frac{k^2}{r^2}.$$

Durch Ableitung nach t ergiebt sich hieraus als Differentialgleichung der Bewegung auf dem Meridian:

(3′) $$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{f(r) + \frac{k^2}{r^3} - \varphi'(r)\,\varphi''(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{1+\varphi'^2(r)}.$$

Die Gleichung (3′) bleibt unverändert, wenn man $f(r)$ durch

(6′) $$f_1(r) = f(r) + \frac{a}{r^3}$$

und gleichzeitig k durch

(7′) $$k_1 = \sqrt{k^2 - a}$$

ersetzt. Es gelten dann wiederum die Gleichungen

(8′) $$r_1(t) = r(t),$$ (9′) $$\vartheta_1(t) = \sqrt{1-\frac{a}{k^2}}\cdot\vartheta(t),$$

genau wie bei Boltzmanns Transformation der Centralbewegungen. Dagegen gelangt man zu neuen Transformationen, wenn man untersucht, ob nicht bei geeigneter Wahl des Kraftgesetzes und der Konstanten des Flächensatzes außer der gegebenen Rotationsfläche S mit dem Meridian $z = \varphi(r)$ andre Rotationsflächen S_0 mit dem Meridian

(11) $$z = \varphi_0(r)$$

existiren, bei denen die Bewegung auf dem Meridian ebenfalls durch die Gleichung (3′) dargestellt wird.

Wird das Kraftgesetz für S_0 mit $f_0(r)$, der Wert der Konstanten des Flächensatzes mit k_0 bezeichnet, so fordert das Zusammenfallen der Differentialgleichungen der Bewegung auf dem Meridian, daß gleichzeitig

$$\frac{f_0(r) + \frac{k_0^2}{r^3}}{1 + \varphi_0'^2(r)} = \frac{f(r) + \frac{k^2}{r^3}}{1 + \varphi'^2(r)}, \qquad \frac{\varphi_0'(r)\,\varphi_0''(r)}{1 + \varphi_0'^2(r)} = \frac{\varphi'(r)\,\varphi''(r)}{1 + \varphi'^2(r)}$$

ist. Die zweite Gleichung ergiebt als Meridian von S_0 die Curve:

(12) $$z = m \cdot \int \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \varphi'^2(r)}\, dr,$$

wo m eine Konstante bedeutet, die erste liefert das Kraftgesetz:

(13) $$f_0(r) = m^2 f(r) + \frac{a}{r^3};$$

dabei ist

(7″) $$k_0 = \sqrt{m^2 k^2 - a}.$$

Die Vergleichung entsprechender Bahnen (r, ϑ) und (r_0, ϑ_0) auf S und S_0 führt zu der Transformation:

(8″) $$r_0(t) = r(t),$$ (9″) $$\vartheta_0(t) = \sqrt{m^2 - \frac{a}{k^2}} \cdot \vartheta(t).$$

Die Flächen S und S_0 stehen in einer einfachen geometrischen Beziehung. Nach Minding gehören zu der Rotationsfläche:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = \varphi(r)$$

die Biegungsflächen:

$$\xi = \frac{x}{m}\cos m\vartheta, \quad \eta = \frac{y}{m}\sin m\vartheta, \quad \zeta = \int \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \varphi'^2(r)}\, dr,$$

die wiederum Rotationsflächen sind. Um aus diesen Flächen die Flächen S_0 zu erhalten, hat man sie nur im Maßstabe $1 : m$ zu vergrößern, denn alsdann ergiebt sich:

$$x_0 = x\cos m\vartheta, \quad y_0 = y\sin m\vartheta, \quad z_0 = m \cdot \int \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \varphi'^2(r)}\, dr.$$

Die Flächen S_0 sind also den Mindingschen Biegungsflächen von S ähnlich.

Auf Anwendungen dieser Transformation kann hier nicht eingegangen werden.

§ 3.

Das allgemeine Problem der Transformation der Bewegungen.

Die Lehre von der Transformation der Bewegungen hat sich in neuerer Zeit in einem eigenen Kapitel der Dynamik entwickelt[1]), und man wird daher fragen, welche Stelle die im Vorhergehenden behandelten Transformationen darin einnehmen. Es wird sich herausstellen, daß ihre Eingliederung nur dann möglich ist, wenn man dem Probleme der Transformation eine allgemeinere Fassung giebt, als das bisher geschehen ist.

Handelt es sich im Sinne Jacobis um ein *dynamisches Problem* mit n Graden der Freiheit, so definiren die Differentialgleichungen der Bewegung die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen der Zeit t und der $2n$ Integrationskonstanten; von diesen kommt eine, t_0, nur in der Verbindung $t-t_0$ vor. Die Elimination der Zeit ergiebt alsdann $n-1$ Relationen zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in denen, wie Painlevé gezeigt hat, genau $2n-1$ unabhängige Konstanten vorkommen, es sei denn, daß alle Kraftkomponenten verschwinden; der Einfachheit halber soll von diesem Ausnahmefalle eines *geodätischen Problems* im Folgenden abgesehen werden. Es ist zweckmäßig, jene $n-1$ Relationen als die Gleichungen von ∞^{2n-1} Curven in einer M_n zu deuten, welche die zu dem Problem gehörigen *Bahnen* genannt werden sollen.

Betrachtet man ein zweites dynamisches Problem mit den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ und der Zeit τ, so gehören zu ihm wiederum ∞^{2n-1} Bahnen, die in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_n liegen mögen.

Nunmehr bringe man die beiden Mannigfaltigkeiten M_n und M_n mit einander in Beziehung durch eine *Abbildung*:

$$\text{(A)} \qquad x_k = \omega_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

---

1) Man vergleiche Abschnitt III meines Berichtes: *Neuere Untersuchungen über die Differentialgleichungen der Dynamik.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jahrgang 1897. Leipzig 1898.

die in einem hinreichend kleinen Bereiche jedem Punkte der M_n einen Punkt der M_n und umgekehrt zuordnet. Vermöge der Abbildung entspricht auch jeder Curve der M_n eine Curve der M_n und umgekehrt. Es ist sogar stets möglich die Abbildung so einzurichten, daß willkürlich gegebenen ∞^{n-1} Curven der M_n in beliebiger Zuordnung willkürlich gegebene ∞^{n-1} Curven der M_n entsprechen, während bei Schaaren von ∞^n und mehr Curven *im Allgemeinen* keine solche Abbildung existirt.

Hieraus folgt, daß im Allgemeinen, selbst wenn die Wahl der Abbildung freigestellt wird, die ∞^{2n-1} Bahnen eines beliebig herausgegriffenen Problemes I die ∞^{2n-1} Bahnen eines ebenfalls beliebig herausgegriffenen Problems II nicht zu Bildern haben werden. Hiermit verträgt sich sehr wohl, daß jedem dynamischen Probleme (I) sogar unendlich viele dynamische Probleme (II) zugeordnet sind, die eine solche Abbildung der Bahnen gestatten. Um das zu erreichen braucht man nur von vorn herein in den definirenden Differentialformen der lebendigen Kraft und der virtuellen Verrückung von (I) vermöge der Gleichungen (A) statt der $x_1, \ldots, x_n$ die $\xi_1, \ldots, \xi_n$ einzuführen, also von (I) zu einem *isometrischen Probleme* überzugehen. Dasselbe gilt von der Anwendung der mechanischen Aehnlichkeit und von *ähnlichen Problemen.* Dagegen giebt es, wie Painlevé bewiesen hat, im Allgemeinen keine andren als diese trivialen Abbildungen. Painlevé hat daher, allerdings in andrer Ausdrucksweise, das Problem der Transformation der Bewegungen so formulirt:

„*Es sollen alle dynamischen Probleme (I) bestimmt werden, deren ∞^{2n-1} Bahnen die ∞^{2n-1} Bahnen eines dynamischen Problems (II) zu Bildern haben, ohne daß (I) und (II) vermöge dieser Abbildung isometrisch oder ähnlich sind*“.

Man überzeugt sich leicht, daß die in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Transformationen in dieses Schema *nicht* hineinpassen. Dort wurden ja von den ∞^3 Bahnen des Punktes M diejenigen herausgegriffen, die zu demselben Werte der Konstanten k gehörten, also eine *Familie* von ∞^2 Bahnen, und es zeigte sich, daß durch die Gleichungen

$$r_1 = r, \qquad \vartheta_1 = \sqrt{1 - \frac{a}{k^2}} \cdot \vartheta$$

jede dieser ∞^2 Bahnen auf eine derjenigen ∞^2 Bahnen eines zweiten Problems abgebildet werden konnte, bei denen die Konstante des Flächensatzes den Wert

$$k_1 = \sqrt{k^2 - a}$$

hatte. Diese Abbildung ändert sich, wenn man von einer Familie zu einer andern übergeht, während das Problem von Painlevé verlangt, daß durch eine und dieselbe Abbildung mit einem Schlage die sämtlichen ∞^3 Bahnen von (I) in die sämtlichen ∞^3 Bahnen von (II) übergeführt werden sollen.

Das Problem der Transformation der Bewegungen bedarf mithin, um auch diese Fälle zu umfassen, einer Erweiterung. Man teile zu diesem Zwecke die ∞^{2n-1} Bahnen eines dynamischen Problems in *Familien*. Eine Familie von Bahnen entsteht, wenn r der $2n-1$ Constanten, etwa $c_1, c_2, \ldots, c_r$, feste Werte erhalten, während die übrigen, $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_{2n-1}$ variiren; sie enthält daher ∞^{2n-1-r} Bahnen, und es giebt ∞^r solcher Familien.

Setzt man

$$\text{(B)} \qquad x_k = \omega_k(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

so gehen die ∞^{2n-1-r} Bahnen der Familie mit den constituirenden Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_r$ durch eine und dieselbe Abbildung in eine Schaar von ∞^{2n-1-r} Curven der M_n über. Erzeugt man jetzt bei einem zweiten dynamischen Probleme ebenfalls Familien mit r constituirenden Parametern $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$, so entsteht die Frage:

Ob bei geeigneter Zuordnung der Familien:

$$c_\varrho = \chi_\varrho(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

eine Abbildung (B) existirt, welche die ∞^{2n-1-r} Bahnen jeder der ∞^r Familien des Problems (I) in die ∞^{2n-1-r} Bahnen der zugeordneten Familie des Problems (II) überführt.

Wenn man die Gesamtheit aller ∞^{2n-1} Bahnen als eine einzige Familie auffaßt, also $r = 0$ setzt, so ergiebt sich das Problem von Painlevé. Wenn man dagegen $r = 2n-1$ setzt, so bildet jede Bahn für sich eine Familie und hat Anspruch auf eine ihr eigentümliche Abbildung. In diesem Sinne läßt sich jedes dynamische Problem mit n Graden der Freiheit auf jedes andre mit n Graden der Freiheit abbilden. Dasselbe gilt auch, falls $r \geq n$ ist, sodaß für die Lehre von der Transformation der Bewegungen nur solche Familien in Betracht kommen, bei denen die Anzahl der constituirenden Parameter $0, 1, 2, \ldots, n-1$ beträgt.

Läßt sich die Pyroelectricität der Krystalle vollständig auf piëzoelectrische Wirkungen zurückführen?

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Juni 1898.

I. Einleitung.

Es ist eine bereits von den Entdeckern der Erscheinungen der Piëzoelectricität, den Herren J. und P. Curie[1]) ausgesprochene Vermuthung, daß die sogenannte Pyroelectricität in Wahrheit auf piëzoelectrischen Erregungen beruhen möchte, d. h., daß die Temperaturänderung eines Krystalles nur deshalb electricitäterregend wirkt, weil sie ihn deformirt. Diese Vermuthung hat später besonders Herr Röntgen[2]) auf Grund seiner Beobachtungen mit großem Nachdruck vertreten.

Ihre exacte Prüfung erfordert außer quantitativen Bestimmungen der bezüglichen Erscheinungen eine vollständige Entwickelung der Theorie der Piëzoelectricität, da nur mit Hülfe einer solchen die erregende Wirkung einer thermischen Deformation zu derjenigen einer mechanischen Deformation in Beziehung gebracht werden kann. Diese allgemeine Theorie habe ich vor nunmehr acht Jahren veröffentlicht[3]). Für eine große Zahl von

1) J. u. P. Curie, C. R. 91, p. 295, 1880.
2) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19, p. 513, 1883.
3) W. Voigt, Gött. Abh. Bd. 36, Nr. 2, 1890.

Krystallgruppen ergiebt sich indessen die Richtigkeit der oben dargestellten Vermuthung ohne die Hülfe von Beobachtungen schon aus den ersten Grundannahmen jener Theorie mittelst einer einfachen Symmetriebetrachtung. Nennt man nämlich *wahre pyroëlectrische Erregung* diejenige, welche in einem Krystalle *durch eine gleichförmige Erwärmung bei aufgehobener Deformation* hervorgerufen wird, dann ist von vorn herein klar, daß eine solche nur bei Krystallen auftreten kann, die eine einzelne krystallographisch ausgezeichnete Richtung besitzen, z. B. eine einzigartige polare Symmetrieaxe.

Schreibt man also die Komponenten a, b, c des diëlectrischen Momentes der Volumeneinheit in der Form

$$a = F(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, \tau), \quad b = G(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, \tau),$$
$$c = H(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, \tau),$$

wobei F, G, H beliebige Functionen der Deformationsgrößen x_x, $\ldots x_y$ und der Temperaturänderung τ bezeichnen, so ist für jene Krystalle jedenfalls

$$a = F(0,0,0,0,0,0,\tau) = 0 \text{ u. s. f.}$$

Die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ sind nun in allen practisch realisirbaren Fällen äußerst kleine Zahlen, sodaß man bei der Entwickelung der Functionen F, G, H nach ihnen stets mit den ersten Gliedern abbrechen kann. Beschränkt man sich auch auf Temperaturänderungen τ von derselben Größenordnung, so wird

$$a = F_1 x_x + F_2 y_y + F_3 z_z + F_4 y_z + F_5 z_x + F_6 x_y + F_7 \tau, \text{ u. s. f.}$$

wo nunmehr die $F_h, \ldots$ Constanten bezeichnen.

Für die Krystalle ohne eine einzelne ausgezeichnete Richtung sind aber nach dem soeben Gesagten F_7, G_7, H_7 gleich Null, und dies zeigt, daß *bei ihnen jede directe Einwirkung der Temperatur auf die electrische Erregung ausgeschlossen ist.* Wenn hier also durch eine Erwärmung ein electrisches Moment hervorgerufen wird, so ist dies stets eine *piëzoelectrische Wirkung; die anscheinend vorhandene Pyroelectricität ist, wie wir sagen wollen, eine falsche.* Es dürfte nützlich sein, dies zur Vermeidung von Mißverständnissen nachdrücklich zu betonen.

Die genauere Untersuchung zeigt übrigens, daß solche Krystalle bei gleichförmiger Erwärmung auch dann keine electrische Erregung zeigen, wenn die jene begleitenden Deformationen un-

gehindert zu Stande kommen; sie reagiren vielmehr nur auf ungleichförmige Erwärmungen. Es hängt dies, wie die durchgeführte Theorie zeigt, auf's Engste damit zusammen, daß jene Krystalle nicht durch einen allseitig gleichen Druck, wohl aber durch einen mit der Richtung variirenden electrisch erregt werden [1]. —

Soweit die Frage nach der Identität von Pyro- und Piëzoelectricität, oder, — was damit nach dem Vorstehenden identisch ist, — diejenige nach der Existenz wahrer Pyroelectricität hierdurch nicht bereits erledigt ist, d. h. also bei Krystallen, die einzelne krystallographisch ausgezeichnete Richtungen besitzen, ist sie nicht ohne Heranziehung der Beobachtung zu entscheiden. Theoretisch am einfachsten wäre diese Entscheidung so zu treffen, daß man einen Krystall erwärmte und zugleich durch ein System geeigneter äußerer Drucke seine Deformation aufhöbe; die ganze hierbei entstehende electrische Erregung würde dann wahre Pyroelectricität darstellen. Indessen bietet dieser Weg unüberwindliche practische Schwierigkeiten, und man ist daher gezwungen, einen Umweg einzuschlagen, der eine Combination von Theorie und Beobachtung benutzt.

Gelegentlich unserer gemeinsamen Beobachtungen zur Prüfung der von mir gegebenen Formeln und zur Bestimmung der piëzoelectrischen Constanten für Quarz und Turmalin haben mein College E. Riecke und ich auch die eben angeregte Frage untersucht [2]. Turmalin ist ja nicht nur ein Krystall mit einer ausgezeichneten Richtung, (— jede der beiden Seiten seiner polaren Hauptaxe ist einzigartig —) sondern auch einer der am stärksten auf eine gleichförmige Erwärmung reagirenden.

Die von uns angestellte Ueberlegung war diese. Durch Beobachtungen von Riecke war die Zunahme des specifischen electrischen Momentes bei einer Temperatursteigerung um 1°C gefunden; durch die erwähnten Beobachtungen von Riecke und mir, bei Benutzung der von mir erhaltenen Werthe der Elasticitätsmoduln und bei Anwendung der von mir gegebenen allgemeinen Formeln

1) In dem allgemeineren Falle beliebig großer Temperaturänderungen liegt die Sache, beiläufig gesagt, etwas anders. Hier würde zu schreiben sein

$$a = F_0 + F_1 x_x + \dots F_6 x_y \text{ u. s. f.},$$

wobei jetzt die F_h Functionen der vorhandenen Temperatur darstellen. Für die oben characterisirten Krystalle wäre dann F_0, G_0, H_0 gleich Null; bei ihnen stellt sich also die Wirkung einer Erwärmung auf das electrische Moment als eine Veränderlichkeit der piëzoelectrischen Erregung mit der Temperatur dar.

2) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. 45, p. 523, 1892.

waren die piëzoelectrischen Constanten des Turmalines bekannt, und damit war die Berechnung der Aenderungen des specifischen electrischen Momentes bei beliebigen Deformationen ermöglicht. Bestimmte man noch die Deformation, welche der Turmalin bei einer Temperatursteigerung um 1°C erleidet, mit Hülfe der von anderen Autoren mitgetheilten Werthe seiner thermischen Dilatationsconstanten, so konnte man die electrische Erregung berechnen, die er bei diesem Vorgange zeigen würde, wenn wirklich nach der Curie'schen Hypothese nur die Deformation für die Erregung maßgebend wäre. Ihre Vergleichung mit der von Riecke erhaltenen Zahl mußte dann eine Entscheidung über jene Hypothese liefern.

Unsere Rechnung ergab eine uns überraschende Uebereinstimmung zwischen den zu vergleichenden Werthen, — die Differenz zwischen ihnen betrug nur etwa zehn Procent — und wir waren geneigt, wie wir damals auch aussprachen, derselben ein entscheidendes Gewicht beizulegen. Indessen liegt doch der Verdacht nahe, daß bei dem Resultat ein Zufall mitgewirkt habe. Die Anwendung der Theorie erfordert die Combination einer sehr erheblichen Anzahl von auf verschiedenen Wegen gewonnenen physikalischen Constanten, und, ganz abgesehen von der Unsicherheit einer jeden einzelnen Bestimmung, erregt es Bedenken, daß diese Constanten nicht sämmtlich an demselben Krystall gemessen waren, und daß gerade die, welche von anderen herübergenommen wurden, von einem Individuum zum andern recht stark zu variiren scheinen. Es sind dies die eine Constante der Pyroelectricität und die zwei der thermischen Dilatation, während die sechs Constanten der Elasticität und die vier der Piëzoelectricität sämmtlich für denselben Krystall bestimmt worden waren.

Die Bedenken gegen die entscheidende Kraft unserer früheren Rechnung wurden bei mir noch verstärkt durch die Folgerungen, die sich für die angeregte Frage aus der von mir vertretenen Anschauung über das Zustandekommen der Pyro- und Piëzoelectricität [1]) ergeben. Wenn diese Vorgänge, wie ich vermuthe, auf der Dislocation der electrischen Atome oder Pole beruhen, welche in den Molekülen der Krystalle in einer den Symmetrieverhältnissen entsprechenden Anordnung gruppirt sind (resp. um derartige Gleichgewichtslagen schwingen), und wenn solche Dislocationen durch Deformationen der Volumenelemente bewirkt werden

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, Nr. 16 p. 669.

können, so erscheint es nach den Vorstellungen der kinetischen Wärmetheorie als nahezu selbstverständlich, daß auch eine bloße Temperaturveränderung ohne begleitende Deformation die Anordnung der electrischen Pole — natürlich ohne deren Symmetrie zu tangiren — ändern wird. Auf Grund einer solchen Vorstellung wird man also die Existenz wahrer Pyroelectricität jedenfalls erwarten müssen, und in dem Falle, daß dieselbe nicht wahrnehmbar ist, nicht auf ein absolutes Fehlen, sondern nur auf eine sehr geringe Stärke der betreffenden Erregung schließen.

Diesen Erwägungen entsprechend habe ich in einer späteren Arbeit [1]), welche die allgemeine Thermodynamik der acentrischen (und somit pyro- und piëzoelectrisch erregbaren) Krystalle zum Gegenstand hat, die Möglichkeit wahrer Pyroelectricität durchweg berücksichtigt.

Bei der principiellen Bedeutung der Frage, ob diese wahre Pyroelectricität in der Wirklichkeit vorkommt, hielt ich es für richtig, mich bei der ersten, immerhin mehr beiläufig vorgenommenen Prüfung nicht zu beruhigen, sondern zu versuchen, eine zweite mit womöglich größerer Schärfe durchzuführen. Zur Erreichung dieses Zieles war es nach dem Gesagten in erster Linie nothwendig, alle Beobachtungen auf denselben Krystall zu beziehen. Außerdem habe ich darnach gestrebt, der Bestimmung der pyroelectrischen Constanten des untersuchten Individuum eine größere Genauigkeit zu geben, als sie Riecke insbesondere deshalb zu erreichen vermochte, weil er Bedenken trug, die benutzten, immerhin ziemlich kostbaren Turmaline zu zerstören, und sie in der natürlichen, an sich für die Beobachtung ungünstigen und überdies nur ungenau auszumessenden Gestalt benutzte. Ich war im Besitz eines für die vorliegenden Zwecke viel geeigneteren Materiales; denn durch die Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften hatte ich seinerzeit für die Elasticitätsuntersuchungen am brasilianischen Turmalin einen prachtvollen Krystall dieses Minerales ankaufen und zu Stäben verarbeiten können; von letzteren boten aber die parallel der Hauptaxe geschliffenen die denkbar günstigsten Objecte für die neuen Beobachtungen.

Da für den beschriebenen Krystall sowohl die Elasticitätsconstanten, resp. -moduln, als auch die piëzoelectrischen Constanten, resp. Moduln bereits gemessen waren, so blieb nur noch die Bestimmung der ihm zugehörigen Constanten der thermischen

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1894 Nr. 4, p. 343.

Dilatation und der Pyroelectricität. Hierüber wird im Folgenden hauptsächlich zu berichten sein.

II. Die Fundamentalformeln.

Die Grundlage der von mir aufgestellten allgemeinen Theorie der Piëzoelectricität bildet — wie schon oben gestreift wurde — die Annahme, daß die diëlectrischen Momente a, b, c der Volumeneinheit nach den Coordinatenaxen lineäre Functionen der Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ sind, d. h. daß man setzen kann:

1) $$a = \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \varepsilon_{13} z_z + \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x + \varepsilon_{16} x_y,$$

. . . .

hierin stellen die ε_{hk} die achtzehn, im allgemeinen von einander unabhängigen piëzoelectrischen Constanten der Substanz dar.

Solange es sich um Deformationen bei constant erhaltenen Temperaturen handelt, sind die Deformationen homogene lineäre Functionen der Druckcomponenten $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$, sodaß man schreiben kann

2) $$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y,$$

. . . .

hierin bedeuten die s_{hk} die Elasticitätsmoduln der Substanz, und es gilt $s_{hk} = s_{kh}$.

Mit Hülfe dieser Beziehungen kann man die diëlectrischen Momente auch als lineäre Functionen der Drucke darstellen und schreiben

3) $$-a = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \delta_{13} Z_z + \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x + \delta_{16} X_y,$$

. . . .

wo nun die piëzoelectrischen Moduln δ_{hk} definirt sind durch die Formeln

4) $$\delta_{ih} = \sum_k \varepsilon_{ik} s_{hk}.$$

Für die Krystalle der hemimorph-hemiëdrischen Gruppe des rhomboëdrischen Systemes, zu denen Turmalin zählt, nehmen die vorstehenden Gleichungen die folgenden einfacheren Formen an, bei denen die Z-Axe mit der dreizähligen Hauptaxe, die X-Axe mit einer der zweizähligen Nebenaxen zusammenfallend, und die $+Y$-Axe aus einer der die $+Z$-Axe umgebenden Rhomboëderflächen R austretend gedacht ist.

Die Momente als Functionen der Deformationsgrößen werden gegeben durch:

5) $$a = \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \quad b = -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_z, \\ c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z.$$

Die Deformationsgrößen als Functionen der Drucke stellen sich dar:

6) $$\begin{aligned} -x_x &= s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z, \\ -y_y &= s_{12} X_x + s_{11} Y_y + s_{13} Z_z - s_{14} Y_z, \\ -z_z &= s_{13} X_x + s_{13} Y_y + s_{33} Z_z \\ -y_z &= s_{14} X_x - s_{14} Y_y \qquad\qquad + s_{44} Y_z, \\ -z_x &= s_{44} Z_x + 2 s_{14} X_y, \quad -x_y = 2 s_{14} Z_x + 2(s_{11} - s_{12}) X_y. \end{aligned}$$

Die Beziehungen zwischen den Momenten und den Drucken lauten

7) $$-a = \delta_{15} Z_x - 2\delta_{22} X_y, \quad -b = -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15} Y_z, \\ -c = \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z,$$

wobei nun ist

8) $$\delta_{22} = \varepsilon_{22}(s_{11} - s_{12}) - \varepsilon_{15} s_{14}, \quad \delta_{15} = \varepsilon_{15} s_{44} - 2\varepsilon_{22} s_{14}, \\ \delta_{31} = \varepsilon_{31}(s_{11} + s_{12}) + \varepsilon_{33} s_{13}, \quad \delta_{33} = 2\varepsilon_{31} s_{31} + \varepsilon_{33} s_{33}.$$

Aus diesen letzten Formeln erhält man für die piëzoelectrischen Constanten ε_{hk} die folgenden Ausdrücke in den beiden Gattungen von Moduln

9) $$\varepsilon_{22} = \frac{\delta_{22} s_{44} + \delta_{15} s_{14}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2 s_{14}^2}, \quad \varepsilon_{15} = \frac{2\delta_{22} s_{14} + \delta_{15}(s_{11} - s_{12})}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2 s_{14}^2}, \\ \varepsilon_{31} = \frac{\delta_{31} s_{33} - \delta_{33} s_{13}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{-2\delta_{31} s_{13} + \delta_{33}(s_{11} + s_{12})}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2}.$$

Die thermischen Deformationen können bei mäßigen Temperaturänderungen τ diesen proportional angenommen werden; d. h., man kann setzen

10) $$x_x = \alpha_1 \tau, \; y_y = \alpha_2 \tau, \; z_z = \alpha_3 \tau, \; y_z = \alpha_4 \tau, \; z_x = \alpha_5 \tau, \; x_y = \alpha_6 \tau,$$

wobei die α_h die thermischen Deformationscoefficienten darstellen. Für die Krystallgruppe, der der Turmalin zugehört, reducirt sich dies System auf

11) $$x_x = y_y = \alpha_1 \tau, \; z_z = \alpha_3 \tau, \; y_z = 0, \; z_x = 0, \; x_y = 0.$$

Demgemäß ist die piëzoelectrische Erregung, welche die Erwärmung eines Turmalines um τ Grad bei ungeändertem Drucke ergiebt, bestimmt durch

$$a = 0, \quad b = 0,$$

12) $$c = \frac{2(\delta_{31} s_{33} - \delta_{33} s_{13}) \alpha_1 - (2\delta_{31} s_{13} - \delta_{33}(s_{11} + s_{12}))\alpha_3}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2} \tau = \delta \tau,$$

worin δ als der Modul der falschen pyroelectrischen Erregung bezeichnet werden kann.

Die gesammte beobachtete Erregung findet sich innerhalb mäßiger Temperaturgrenzen gleichfalls der Erwärmung proportional; es kann also für sie geschrieben werden:

13) $$(a) = 0, \quad (b) = 0, \quad (c) = \gamma \tau,$$

wobei nun γ als Modul der gesammten pyroelectrischen Wirkung erscheint. Die Differenz $(c) - c = c'$ stellt dann die nicht auf Deformationswirkungen zurückführbare electrische Erregung dar, und

$$\gamma - \delta = \vartheta$$

ist somit der Modul der wahren pyroelectrischen Erregung.

Die Frage nach der Existenz wahrer Pyroelectricität im Turmalin spitzt sich sonach auf die Untersuchung zu, ob das so definirte ϑ einen neben γ resp. δ merklichen Werth besitzt.

Der Plan für ihre Durchführung weicht von dem früher von Riecke und mir verfolgten nur wenig ab; er geht kurz gesagt dahin, daß aus früheren Beobachtungen die Werthe der Elasticitätsmoduln, sowie das Verhältniß der piëzoelectrischen Moduln δ_{31}/δ_{33} entnommen werden, und daß an dem früher benutzten Krystall neue Messungen über die thermischen Dilatationscoefficienten α_1 und α_3 und über das Verhältniß der beiden Moduln δ_{33} und γ angestellt werden.

Der Modul δ_{33} ist deshalb ausgewählt, weil eine der energischsten piëzoelectrischen Wirkungen, nämlich die Erregung eines zur Hauptaxe parallelen Cylinders durch longitudinalen Druck, ganz allein durch ihn gemessen wird. In der That, setzt man in den Formeln 7)

14) $$X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0, \quad Z_z = p,$$

so resultirt

15) $$a = 0, \; b = 0, \; -c = \delta_{33} p.$$

Bezeichnet dann μ eine mit δ_{33}, ν eine mit γ proportionale Größe, so ist $\gamma - \delta$ proportional mit

16) $$\nu - \mu \frac{((s_{11} + s_{12})\alpha_3 - 2s_{13}\alpha_1) + (s_{33}\alpha_1 - s_{13}\alpha_3) 2\delta_{31} / \delta_{33})}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2} = \lambda,$$

und es ist wahre Pyroelectricität vorhanden oder nicht vorhanden, je nachdem λ von Null verschieden oder gleich Null ist. Im ersteren Falle ergiebt dann auch λ/ν den Bruchtheil der ganzen pyroelectrischen Erregung, der als wahre Pyroelectricität zu bezeichnen ist.

III. Die elastischen und die piëzoelectrischen Moduln.

Die Elasticitätsmoduln des benutzten Turmalines habe ich seiner Zeit bestimmt.[1]) und bin dabei zu folgenden Resultaten gekommen, die als Druckeinheit das Kilogramm-Gewicht pro Quadratcentimeter voraussetzen:

$$s_{11} = 3{,}91.10^{-7}, \; s_{12} = -1{,}01.10^{-7}$$
$$s_{33} = 6{,}12.10^{-7}, \; s_{13} = -0{,}16.10^{-7}$$
$$s_{44} = 14{,}84.10^{-7}, \; s_{14} = +0{,}57.10^{-7}.$$

Beobachtungen über die piëzoelectrischen Moduln sind, wie schon oben gesagt, von Riecke und mir [2]) angestellt und veröffentlicht; indessen ist die Berechnung der Resultate aus den direct gemessenen Werthen früher nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt, sondern es ist der Ausgleich der Fehler ziemlich willkürlich vorgenommen worden.

Da es sich bei dem vorliegenden Problem darum handelt, jeder der benutzten nummerischen Grundlagen eine möglichst große Sicherheit zu geben, so habe ich jene Berechnung nunmehr nachträglich angestellt.

Bezeichnet man die Werthe der in willkürlichen Einheiten ausgedrückten piëzoelectrischen Moduln mit d_{hk}, während man unter δ_{hk} die in absoluten Einheiten ausgedrückten versteht, so sind früher folgende Gleichungen als Ausdruck der directen Messungsresultate aufgestellt [3]), bei denen die eingeklam-

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 7, 1890, Wied. Ann. 41, p. 712, 1890.
2) E. Riecke und W. Voigt Wied. Ann. 45, p. 523, 1892.
3) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 543.

merten Ziffern je die Anzahl der Beobachtungen angeben, von welcher der angegebene Zahlwerth das Mittel darstellt.

		beob.		ber.
$-d_{33}$	=	0,172,	(4)	0,171
$-d_{22}$	=	0,020,	(2)	0,020
$-d_{15}-d_{33}-d_{31}-d_{22}$	=	0,500,	(2)	0,499
$-d_{15}-d_{33}-d_{31}+d_{22}$	=	0,539,	(3)	0,540
$-d_{31}$	=	0,027,	(1)	0,022
$-d_{31}$	=	0,025,	(1)	0,022
$-d_{15}+d_{22}+d_{33}+d_{31}$	=	0,156,	(2)	0,154
$-d_{15}-d_{22}+d_{33}+d_{31}$	=	0,111,	(1)	0,113.

Giebt man diesen Formeln Gewichte, die den Beobachtungszahlen entsprechen, so erhält man folgendes Werthsystem

$$d_{22} = +0{,}02034,\ d_{15} = -0{,}3265,\ d_{31} = -0{,}0220,\ d_{33} = -0{,}1711;$$

sein Einsetzen in die links stehenden Ausdrücke liefert die unter „ber.“ aufgeführten Zahlen. Die Uebereinstimmung ist mit einziger Ausnahme der in fünfter und sechster Reihe stehenden Zahlen, die aus sehr schwachen Erregungen und daher wahrscheinlich ungenauer bestimmt sind, eine überraschend gute.

Für das uns zunächst interessirende Verhältniß d_{31}/d_{33}, für das übrigens eine große Genauigkeit nicht erfordert wird, ergiebt sich

$$d_{31}/d_{33} = \delta_{31}/\delta_{33} = 0{,}129.$$

Es mag bemerkt werden, daß die oben für die d_{hk} angegebenen Zahlen jedenfalls ein wenig zu klein sind, da sie durch eine Berechnung erhalten wurden, bei der die Capacität der metallischen Belegungen des gepreßten Krystalles gegenüber derjenigen des Electrometers inclusive der Zuleitungen vernachlässigt sind. Die vollständige Theorie der benutzten Messungsmethode habe ich für einen besonders einfachen Fall nachträglich entwikkelt[1]). Aus derselben läßt sich schließen, daß unter den bei unsern Beobachtungen vorliegenden Umständen der gemachte Fehler 1% jedenfalls nicht erreicht.

Wegen gewisser Anwendungen mögen beiläufig auch diejenigen absoluten Werthe δ'_{hk} der piëzoelectrischen Moduln mitgetheilt werden, die sich bei Einführung des absoluten electrostatischen Maaßes ergeben, während der Druck aus practischen Gründen

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1894, Nr. 4, p. 358.

(wie bisher) in Kilogramm-Gewicht pro Quadratcentimeter ausgedrückt bleibt. Man hat dann nach dem früher Erörterten[1]) an den d_{hk} den Reductionsfactor 69,3.0,478.10^{-2} anzubringen und erhält dadurch

$$\delta'_{22} = +0{,}00674,\ \delta'_{15} = -0{,}1081,\ \delta'_{31} = -0{,}00730,\ \delta'_{33} = -0{,}0567.$$

Will man schließlich noch als Krafteinheit statt des Kilogramm-Gewichtes die Dyne einführen, so hat man diese Zahlen mit 9,81.10^5 zu dividiren; hierdurch findet man

$$\delta_{22} = +0{,}687.10^{-8},\ \delta_{15} = -11{,}03.10^{-8},\ \delta_{31} = -0{,}744.10^{-8},$$
$$\delta_{33} = -5{,}77.10^{-8}$$

als die definitiven Werthe der piëzoelectrischen Moduln des Turmalines in absolutem Maaße (cm, g. sec.).

IV. Die Constanten der thermischen Deformation.

Da das hiesige Institut die Hülfsmittel zu so genauen Bestimmungen der thermischen Deformationsconstanten, wie sie für meine Zwecke erwünscht waren, nicht besitzt, so wandte ich mich an die Firma Carl Zeiß in Jena, die das treffliche Fizeau-Abbé-sche Dilatometer wiederholt ausgeführt und angewandt hat, mit der Bitte, mir ihre Hülfe zu gewähren. Die Geschäftsleitung der Firma hat in entgegenkommendster Weise die nöthigen Beobachtungen mit dem ihr gehörigen Apparat durch einen ihrer Mitarbeiter, Herrn Kellner, ausführen lassen und mir die Resultate zur Verfügung gestellt. Ich spreche auch an dieser Stelle der Firma, wie dem gefälligen Beobachter, nicht minder Herrn Dr. C. Pulfrich, der die bezüglichen Arbeiten geleitet und die Resultate berechnet hat, für die meinen Untersuchungen gewährte Förderung den herzlichsten Dank aus.

Im Nachstehenden wiederhole ich die Angaben, die mir Herr Dr. Pulfrich über die Methode und die Resultate der Beobachtungen gemacht hat.

Aus einem Stück des von mir zu den übrigen Messungen benutzten Turmalines wurde ein Würfel von nahezu 1 cm Seitenlänge hergestellt, mit dem einen Flächenpaar normal, mit den beiden anderen parallel zu der krystallographischen Hauptaxe orientirt. Die eine der ersteren und die eine der letzteren Flächen wurde darnach soweit hohlgeschliffen, daß von der ursprüng-

---

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 549.

lichen ebenen Begrenzung nur noch drei kleine Randstücke übrig blieben, auf denen nun der Würfel, wie auf Füßchen, sicher ruhen konnte. Die diesen umgestalteten Flächen gegenüberliegenden Ebenen wurden sorgfältig polirt.

Als Vergleichskörper diente der Quarzring von ca. 1,01 cm Höhe, dessen axiale thermische Dilatation Herr E. Reimerdes[1]) sorgfältig bestimmt hat. Das Turmalinpräparat wurde mit dem Ringe, und zwar in dessen Innenraum, auf eine ebene Grundplatte von Quarz gestellt und auf den Ring eine plane Deckplatte von Quarz aufgelegt. In dem Raum zwischen der oberen Fläche des Turmalines und der unteren der Deckplatte kommen dann bei geeigneter Beleuchtung die bekannten, als Beobachtungsobject dienenden Interferenzstreifen zu Stande. Bezüglich des Details der Beobachtungsmethode und der zur Berechnung anzuwendenden Formeln kann auf die Arbeit des Herrn Reimerdes verwiesen werden. Es genügt hier Folgendes hervorzuheben.

Die Lagenbestimmung der Interferenzstreifen für die rothe Wasserstofflinie und die grüne Quecksilberlinie erfolgte durch mikrometrische Ausmessung mit Hilfe des Dilatometers bei Temperaturen von ca 10, 60, 90 Grad C., und nach der Abkühlung wieder bei ungefähr 10 Grad C. Aus der ersten, zweiten und vierten Beobachtung wurde die Zahl der verschobenen Streifen sowohl für die Erwärmung, als für die Abkühlung ermittelt und hieraus der Ausdehnungs-Coefficient für eine mittlere Temperatur von ca. 35 Grad abgeleitet. Die Combination der ersten, dritten und vierten Beobachtung ergab den Ausdehnungscoefficienten für eine mittlere Temperatur von ungefähr 50 Grad. Die aus Erwärmung und Abkühlung für dieselbe mittlere Temperatur gewonnenen Ausdehnungscoefficienten stimmten bis auf weniger als 1 % unter einander überein.

Unter Benutzung des von Herrn Reimerdes für den Quarzring gefundenen axialen Ausdehnungscoefficienten

$$\alpha_q = (6{,}925 + 0{,}01689\, t)\, 10^{-6},$$

in dem t die Temperatur nach Celsius bezeichnet, ergaben die mittleren Beobachtungsresultate folgende Zahlen:

1. Turmalin, Ausdehnung normal zur Hauptaxe.

Dicke des Präparates 0,9686 cm

mittlere Temperatur 41,0° $\alpha_1 = 3{,}587 . 10^{-6}$,

" " 52,5° $\alpha_1 = 3{,}729 . 10^{-6}$.

Hieraus

1) E. Reimerdes Inaug. Diss. Jena 1896.

$$\alpha_1 = (3,081 + 0,01235\, t)\, 10^{-6}$$

2. Turmalin, Ausdehnung parallel zur Hauptaxe

Dicke des Präparates 0,9900 cm
mittlere Temperatur 33,°5 $\alpha_3 = 8,530.10^{-6}$,
" " 50,°5 $\alpha_3 = 8,895.10^{-6}$.

Hieraus

$$\alpha_3 = (7,810 + 0,0215\, t).10^{-6}.$$

Diese Werthe stimmen befriedigend mit den von Fizeau an grünem brasilianischen Turmalin erhaltenen überein, welche lauten

$$\alpha_1 = (3,06 + 0,0183\, t).\, 10^{-6}, \quad \alpha_3 = (7.77 + 0,0320\, t).\, 10^{-6}.$$

Dagegen weichen sie stark von den von Riecke und mir früher benutzten Pfaff'schen Zahlen

$$\alpha_1 = 7,73.10^{-6}, \quad \alpha_3 = 9,37.10^{-6}$$

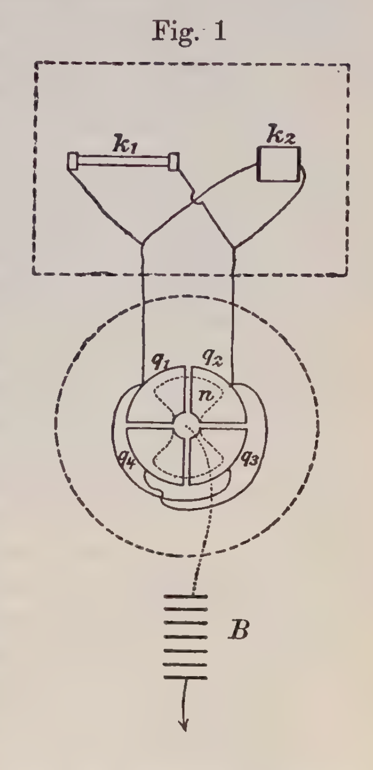
ab, deren Unterschied von den Fizeau'schen uns s. Z. nicht aufgefallen ist, und es steht demgemäß von vorn herein zu erwarten, daß die neue Untersuchung das von uns früher erhaltene Resultat **nicht** bestätigen wird.

V. Das Verhältniß der pyroelectrischen Constante γ des Turmalines zu seinem piëzoelectrischen Modul δ_{33}.

Wie schon auf S. 173 erörtert ist, bedarf man zur Entscheidung der Frage nach der Existenz wahrer Pyroelectricität beim Turmalin nicht des absoluten Werthes seiner pyroelectrischen Constante γ, sondern nur deren Verhältniß zu einem seiner piëzoelectrischen Moduln, z. B. zu δ_{33}. Dies hat für unsere Arbeit den Vortheil, daß für unsere nächsten Zwecke jene Hülfsbeobachtungen, die nöthig sind, um das benutzte Meßinstrument — hier ein Thomson'sches Electrometer — zur absoluten Messung von Ladungen zu aichen, unterbleiben konnten.

Der Grundgedanke der zur Bestimmung des Verhältnisses γ/δ_{33} angewandten Beobachtungsmethode war kurz der, daß mit den Quadrantenpaaren des Electrometers in paralleler Schaltung verbunden war sowohl das Krystallpräparat k_1, an dem die pyro-, als k_2, an dem die piëzoelectrische Erregung beobachtet werden sollte, und daß abwechselnd das eine oder das andere erregt, und dabei das Electrometer abgelesen wurde. Da bei diesen

Beobachtungen die mit den Quadrantenpaaren verbundenen Capacitäten unverändert die gleichen waren, so entsprachen direct gleiche Ausschläge des Electrometers gleichen frei werdenden Ladungen; da weiter bei der pyroelectrischen Erregung die Temperatur-, bei der piëzoelectrischen die Druck-Aenderung verfügbar war, so konnten diese Ausschläge einander so nahe gleich gemacht werden, daß es nicht einmal nöthig wurde, die Proportionalität der Ausschläge mit den Ladungen zu prüfen.



Die nebenstehende Figur 1 erläutert schematisch die Anordnung. q_1 bis q_4 sind die diagonal gekoppelten Quadranten des Electrometers; mit jedem Paar ist je eine Belegung des zu erwärmenden Krystallstäbchens k_1 und eine des der zu pressenden Prismas k_2 verbunden. Alle Verbindungen sind durch Löthung hergestellt, um eine Veränderung der Contacte möglichst auszuschließen. Die Nadel des Electrometers war an einem Wollaston-Platin-Draht aufgehängt und durch denselben mit dem einen Pol einer sorgsam isolirten Wasserbatterie B verbunden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet wurde.

Die Krystallpräparate k_1 und k_2 mit den nöthigen Hülfsmitteln zu ihrer thermischen und mechanischen Erregung befanden sich in einem Glaskasten, der mit Drahtgitter, resp. Stanniol überzogen war, um jene Theile der Wirkung von störenden thermischen und electrischen Einflüssen nach Möglichkeit zu entziehen. Wir wollen diesen Kasten weiterhin kurz den Isolirkasten nennen.

Das Electrometer war mit einem ähnlichen Gehäuse umgeben; zwischen beiden blieb nur ein geringer Raum frei, der eben genügte, um die ihn durchsetzenden Leitungsdrähte, und damit die Electrometerquadranten bequem zur Erde abzuleiten, sowie solches nöthig wurde.

Die beiden Schutzhüllen sind in der obigen schematischen Figur durch punktirte Linien angedeutet.

Ueber die Einrichtung des Electrometers ist sonst nichts zu sagen, als daß gemäß der ihm gestellten Aufgabe, Ladungsstärken zu vergleichen, seine Isolation durch ausschließliche Verwendung von Schellackstützen und -trägern so sehr als möglich vergrößert und seine Capacität durch Auseinanderschieben der Quadranten verkleinert war. Seine Empfindlichkeit war derart, daß ein Cadmiumelement von 1,024 Volt Spannung bei Commutation auf der Scala einen Ausschlag von 90 mm gab. —

Der zu pressende Krystall k_2 hatte die Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds und war in der früher beschriebenen Weise[1]) an zwei gegenüberliegenden Flächen mit Stanniol überzogen, dagegen auf den übrigen zur Erhöhung der Isolation lakkirt. Er befand sich mit den Belegen zwischen zwei kleinen ebenen Kupferplatten, deren eine, auf einem Schellackklötzchen befestigte, seine Unterlage bildete, während auf die andere, ebenfalls mit Schellack nach außen isolirte, das Gewicht wirkte, das den Druck auf den Krystall hervorbringen sollte. Es wurden die beiden früher mit A und B bezeichneten Turmalin-Präparate benutzt, die eine Kante der krystallographischen Hauptaxe parallel hatten und nach der Richtung dieser Kante comprimirt wurden. A hatte erheblich größere Querdimensionen als B, und dies ließ A zu den Hauptbeobachtungen weniger geeignet erscheinen. Da nämlich die Zimmertemperatur sich nicht vollständig constant erhalten ließ, so variirten auch die zu piëzoelectrischen Untersuchungen benutzten Präparate dauernd ein wenig ihre Temperatur; sie wurden also fortwährend auch pyroelectrisch erregt. Die in ihren Belegungen frei werdenden Ladungen sind nun aber bei gleichen Temperaturänderungen den Querschnitten der Präparate proportional; sie waren sonach bei dem größeren Präparat erheblich stärker als bei dem kleineren. Wenn nun auch unter Voraussetzung einer constanten Geschwindigkeit der Temperaturänderung diese pyroelectrische Erregung aus dem Mittelwerth der bei Belastung und der bei Entlastung gewonnenen Beobachtungen streng herausfällt, so konnte doch bei dem größeren Präparat eine Abweichung von der constanten Geschwindigkeit recht wohl einen merklichen Fehler geben, und deshalb ist der größere Krystall A nur insoweit benutzt, als constatirt wurde, daß er merklich dieselbe piëzoelectrische Constante besaß, als der kleinere B. Bei diesem übertrafen die pyroelectrischen Erregungen nicht 2 % der piëzoelectrischen, sie waren aber meist noch geringer.

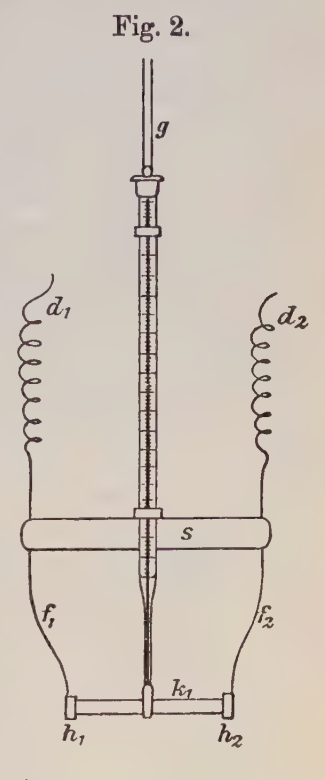
---

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 530.

Ueber die zur Messung der piëzoelectrischen Erregung zu machenden Ablesungen ist in der früheren Arbeit ausführlich gesprochen. Hier genügt die Erwähnung, daß zur Elimination der Wirkung einer nicht vollkommenen Isolation die auf Belastung oder Entlastung folgenden fünf Umkehrpunkte der Electrometernadel beobachtet wurden.

Die einer wechselnden Temperatur auszusetzenden Turmalinstäbchen k_1 waren gleichfalls oberflächlich leicht lakkiert. Die leitenden Belegungen ihrer Enden wurden durch zwei kleine aus Kupferfolie gefertigte Kästchen h_1, h_2 (Figur 2) gebildet, die über diese Enden geschoben waren und zugleich die Stäbchen trugen. Zu letzterem Zweck waren sie mit einander zugewandten Oeffnungen an die Enden zweier dünner kupferner Federn $f_1 f_2$ befestigt, die ihrerseits an einem Schellackstab s saßen; der Stab seinerseits war an das untere Ende eines dünnen Glasstabes g gekittet, welcher die Stütze des ganzen Systemes bildete. Dieser Glasstab hing bei den Beobachtungen von der Decke des oben erwähnten Isolirkastens herab, sodaß das untere Ende mit dem daran befestigten Krystallstäbchen pendelnde Bewegungen ausführen konnte. An die Federn f_1, f_2 waren die Drähte d_1, d_2 angelöthet, die zu den Quadranten des Electrometers führten.

Fig. 2.



Der Glasstab trug außer dem Krystallpräparat noch ein empfindliches Thermometer, dessen Gefäß dicht an dem Krystall anlag; zwei in angemessener Stellung an dem Thermometer befestigte Loupengläser gestatteten, von außerhalb des Isolirkastens her Hundertel-Grade abzulesen.

Unter dem Stäbchen stand ein primitiver niedriger Wagen, der sich von außerhalb des Isolirkastens hin- und herschieben ließ. Er trug zwei Gefäße mit Paraffinöl, die durch Umkleidung mit Filz gegen Wärmeaufnahme und -abgabe einigermaßen geschützt waren. Das eine wurde vor Beginn der Beobachtung um 2—3°C über, das andere um ebensoviel unter die Temperatur der Umgebung gebracht. Diese Temperaturen änderten sich dann nur

außerordentlich langsam, und es erwies sich vortheilhafter, bei allmählig abnehmender Temperaturdifferenz zu beobachten, als letztere durch eigne Veranstaltungen, welche leicht die electrischen Beobachtungen stören, vollständiger constant zu halten. Die eigentliche Messung geschah dann in folgender Weise.

Während die Quadranten des Electrometers zur Erde abgeleitet waren, wurde das eine der beiden Oelgefäße unter das oben beschriebene, Krystall und Thermometer tragende System geschoben und letzteres bis nahe an den Schellackstab eingetaucht. Mit Hülfe eines von außen in den Isolirkasten geleiteten Fadens wurde dann der untere Theil jenes Systemes in pendelnde Bewegungen versetzt, sodaß das Oelbad ziemlich kräftig umgerührt und zugleich der Temperaturausgleich zwischen dem Bad einer-, dem Stäbchen und dem Thermometer andererseits beschleunigt wurde.

War keine Temperaturänderung an dem Thermometer mehr merklich, so wurde die Verbindung der Quadranten mit der Erde aufgehoben und die Ablesung von drei Umkehrpunkten der Nadel ausgeführt. Hierauf wurde Stäbchen und Thermometer aus dem ersten Oelbad gehoben, das andere Bad untergeschoben, das ganze System wie zuvor eingetaucht und in Schwingungen versetzt. Schon nach einer Periode 2 T der Electrometernadel (ca. 25 Secunden) pflegte eine Aenderung des Standes des Thermometers nicht mehr merklich zu sein, und da das Krystall-Stäbchen erheblich dünner war, als das Thermometergefäß, so durfte man zu diesem Zeitpunkt den Ausgleich seiner Temperatur mit der des Bades als innerhalb der Genauigkeit der Ablesung am Thermometer vollzogen betrachten.

Die Ablesungen an der Electrometer-Nadel begannen bei deren dritter Umkehr, also um etwa $^5/_2$ T nach dem Moment des Eintauchens; sie wurden bis zur siebenten Umkehr fortgesetzt. Aus den so erhaltenen fünf Zahlen läßt sich dann, wie weiter unten gezeigt werden wird, die Ablenkung berechnen, welche die Nadel erlitten haben würde, wenn das Stäbchen die Temperatur des zweiten Bades momentan erreicht hätte, oder wenn die Isolation eine vollständige gewesen wäre.

Nach Ausführung dieser Ablesungen wurden die Quadranten wieder zur Erde abgeleitet, nach Wiederherstellung der Isolation drei Umkehrpunkte der Nadel bestimmt und darauf der Wechsel der Bäder wie oben von Neuem ausgeführt. Die Beobachtungen gingen so schnell von statten, daß in der Zeit von einer Benutzung eines jeden Bades bis zur nächsten seine Temperatur selten mehr, als 0,1°C variirte.

Die für die theoretische Verwerthung bestimmten Beobachtungsreihen sind in nachstehender Tabelle im Auszug mitgetheilt. Die bezüglichen Messungen wurden unmittelbar hintereinander innerhalb weniger Stunden und somit bei möglichst constanten Verhältnissen angestellt, nachdem durch eine größere Zahl orientirender Versuche jeder Theil der Beobachtungsmethode erprobt worden war. Die mannigfachen Veränderungen, die hierbei die Details der letzteren erlitten, können mit Stillschweigen übergangen werden. Bei den Vorarbeiten, wie bei den definitiven Messungen hat mir der Assistent des Institutes, Herr Prof. Dr. Wiechert, vielfältige Hülfe geleistet.

Stäbchen I. $q = 0{,}0555$, 11 Beob.

$\tau_1 = 20{,}73$ 372,7 470,3 418,1 $y_1 = 436{,}2$
$\tau_2 = 24{,}41$ 309,2 324,5 319,1 325,2 324,2 $x_2 = 317{,}4$
$\tau = 3{,}68$ $\xi = +4{,}6$ $y_1 - x_2 = 118{,}8$;
$\tau_2 = 24{,}45$ 488,0 398,7 445,1 $y_2 = 429{,}3$
$\tau_1 = 20{,}79$ 570,9 547,7 556,3 548,5 549,8 $x_1 = 558{,}1$
$\tau = 3{,}66$ $\xi = -3{,}6$ $x_1 - y_2 = 128{,}8$;
Mittel $\tau = 3{,}67$, $\sigma_\tau = 130{,}0$, $\sigma_\tau/\tau q = 638$.

Krystall *B*. 6 Beob.

R. 437,7 426,1 430,4 $y = 429{,}3$
B. 662,5 530,6 595,7 556,8 573,6 $x = 579{,}7$
$y - x = 150{,}4$
R. 434,7 427,7 430,5 $y = 429{,}6$
E. 192,0 322,4 255,9 294,1 275,6 $x = 275{,}2$
$x - y = 154{,}4$.
Mittel $\sigma_p = 152{,}4$, $\sigma_p / P = 30{,}4$.

Stäbchen II. $q = 0{,}0599$, 10 Beob.

$\tau_1 = 19{,}32$ 405,8 532,4 465,0 $y_1 = 488{,}4$
$\tau_2 = 23{,}71$ 313,9 336,0 326,5 333,6 331,7 $x_2 = 326{,}9$
$\tau = 4{,}39$ $\xi = +4{,}0$, $y_1 - x_2 = 161{,}5$;
$\tau_2 = 23{,}71$ 558,9 435,1 498,9 $y_2 = 477{,}2$
$\tau_1 = 19{,}39$ 655,4 628,6 638,1 628,3 629,4 $x_1 = 641{,}4$
$\tau = 4{,}32$ $\xi = -6{,}0$, $x_1 - y_2 = 164{,}2$;
Mittel $\tau = 4{,}35_5$, $\sigma_\tau = 170{,}4$, $\sigma_\tau / \tau q = 652$.

Krystall *B*. 6 Beob.

R. 464,0 460,9 460,7 $y = 461{,}2$
B. 693,5 562,3 626,3 587,4 603,8 $x = 611{,}5$
$x - y = 150{,}3$

$R.$ 466,8 458,3 461,8 $y = 460,8$
$E.$ 230,2 357,9 292,9 329,3 311,5 $x = 311,9$
$y - x = 148,9$

Mittel $\sigma_p = 149,6$, $\sigma_p / P = 29,8_5$.

Stäbchen III. $q = 0,0599$, 10 Beob.

$\tau_1 = 20,02$ 384,6 505,6 439,9 $y_1 = 464,2$
$\tau_2 = 25,02$ 264,4 287,8 278,5 286,0 184,0 $x_2 = 277,8$
$\tau = 5,00$ $\xi = +5,2$, $y_1 - x_2 = 186,4$;
$\tau_2 = 25,05$ 549,8 402,0 477,5 $y_2 = 452,0$
$\tau_1 = 20,04$ 650,2 616,6 626,7 614,8 615,8 $x_1 = 633,2$
$\tau = 5,01$ $\xi = -7,4$, $x_1 - y_2 = 181,2$;

Mittel $\tau = 5,00_5$, $\sigma_\tau = 193,3$, $\sigma_\tau / \tau q = 645$.

Krystall $B.$ 8 Beob.

$R.$ 451,5 450,6 449,7 $y = 450,4$
$B.$ 684,9 551,9 616,5 577,2 593,4 $x = 600,7$
$x - y = 150,3$
$R.$ 457,6 452,7 453,3 $y = 453,5$
$E.$ 213,4 344,9 277,2 314,2 295,2 $x = 298,3$
$y - x = 155,2$

Mittel $\sigma_p = 152,7$, $\sigma_p / P = 40,4$.

Was die Bedeutung der obigen Zahlen angeht, so findet sich neben der Ordnungsnummer des pyroelectrisch erregten Stäbchens zunächst sein Querschnitt q, genauer das Mittel aus der Größe seiner beiden Endquerschnitte, in Quadratcentimetern. Daneben steht die Anzahl der überhaupt mit dem Stäbchen ausgeführten Beobachtungsreihen, von denen etwa die Hälfte den Uebergang von niedern zu höheren, die Hälfte den Uebergang von höheren zu niederen Temperaturen betrifft.

Die darnach folgenden Zahlen sind die Mittel aus den für diese beiden Erregungen erhaltenen Messungen. τ_1 bezeichnet die mittlere Temperatur des kälteren, τ_2 die des wärmeren Bades zur Zeit, da Wärmegleichgewicht mit dem Stäbchen herrschte. Neben den Werthen von τ_1 und τ_2 stehen die Mittelwerthe der bei diesen Temperaturen erhaltenen drei resp. fünf Umkehrpunkte der Electrometernadel auf der Scala.

In Bezug auf die rechnerische Verwerthung dieser Zahlen bemerke ich Folgendes.

Wenn die Nadel einem constant wachsenden oder abnehmenden electrischen Einfluß unterliegt, der ihre Ruhelage während einer einfachen Schwingung T um ξ Scalentheile verschiebt, und

wenn d ihr Dämpfungsverhältniß bezeichnet, so gilt für die einem Durchgang durch die Ruhelage folgenden Umkehrpunkte a_h das Gesetz [1])

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x + \tfrac{1}{2}\xi + \alpha, \\
a_2 &= x + \tfrac{3}{2}\xi - \alpha/d, \\
a_3 &= x + \tfrac{5}{2}\xi + \alpha/d^2, \\
a_4 &= x + \tfrac{7}{2}\xi - \alpha/d^3, \\
\alpha_5 &= x + \tfrac{9}{2}\xi + \alpha/d^4, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnet x die Ruhelage, die eintreten würde, wenn von dem Zeitpunkt des ersten Durchganges an die electrische Einwirkung auf die Nadel constant bliebe. Das Dämpfungsverhältniß d ist durch die Beobachtung der Schwingungsamplituden bei feststehender Ruhelage, d. h. bei verschwindendem ξ, zu 1,88 bestimmt worden; diese Zahl ist bei den weiter unten beschriebenen Rechnungen benutzt worden. Die Verschiebung ξ hat im allgemeinen eine doppelte Ursache. Einerseits ändert sich während der Ablesungen die Temperatur des, wie oben beschrieben, mit dem beobachteten Stäbchen k_1 parallel geschalteten Krystalles k_2 ein wenig, andererseits ist die Isolation des ganzen Systemes mangelhaft.

Während sich das Stäbchen im ersten Bad befindet, trägt es nach der obigen Darstellung eine merkliche Ladung nicht, eine Einwirkung der mangelhaften Isolation findet somit nicht statt; ξ beruht hier allein auf der geringen Temperaturänderung in k_2 und ist demgemäß ziemlich unbedeutend, überdies bei auf einander folgenden Beobachtungsreihen von gleichem Vorzeichen und von nahe gleicher Größe. Demgemäß wird es passend durch Combination der auf einander folgenden Beobachtungsreihen, die abwechselnd Erwärmung und Abkühlung benutzen, eliminirt.

Aus den drei auf das erste Bad bezüglichen Ablesungen a_1, a_2, a_3 sind die in der Tabelle aufgeführten Größen y berechnet nach der Formel

$$y = \frac{a_1 + 2\,a_2\,d + a_3\,d^2}{(1+d)^2} = x + \frac{1+5\,d}{2\,(1+d)}\,\xi;$$

das in ihr neben x stehende Glied fällt bei der definitiven Verwerthung dieser Zahlen nach dem oben Gesagten heraus.

Bei den auf das zweite Bad bezüglichen Beobachtungen kommen beide Ursachen, welche die Verschiebung ξ bedingen, gemein-

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 533.

sam zur Geltung; dabei wirkt die zweite, wesentlichere, bei Erwärmung und bei Abkühlung im entgegengesetzten Sinne; ξ muß daher hier bei jeder dieser Beobachtungen für sich eliminirt werden. Dies geschieht mit Hülfe der fünf angegebenen Ablesungen $a_1, \ldots a_5$ nach der Formel

$$x = x_1 - (x_4 - x_1)\frac{1 + 3d}{6(1 + d)},$$

in der bezeichnet

$$x_1 = a_2 + \frac{a_1 - a_2}{1 + d}, \quad x_4 = a_5 + \frac{a_4 - a_5}{1 + d}.$$

Die Größe x ist oben in der Tabelle gleichfalls aufgeführt; sie stellt nach dem zuvor Gesagten diejenige Ruhelage dar, die eintreten würde, wenn von einem Zeitpunkt an, der um $\frac{1}{2}\,T$ vor der ersten Ablesung liegt, die electrischen Verhältnisse constant blieben. Dieser Zeitpunkt liegt aber um $2\,T$ nach dem Moment des Eintauchens des Stäbchens in das zweite Bad, und um die Wirkung der mangelhaften Isolation etc. vollständig zu eliminiren, muß man noch den Vorgang in Rechnung ziehen, der sich während dieser, vor den mitgetheilten Messungen liegenden Zeit abgespielt hat.

Hätte die electrische Erregung des Stäbchens diese ganze Zeit hindurch die volle Stärke besessen, so wäre auch die Verschiebung der Ruhelage mit dem vollen Betrag ξ in Rechnung zu setzen; in diesem Falle wäre der wahre Ausschlag σ_τ, der einer pyroelectrischen Erregung durch die Temperaturänderung $\tau = \tau_2 - \tau_1$ entspricht, durch die Formel $\pm\,\sigma_\tau = y - x + 2\,\xi$ gegeben. Indessen nimmt das Stäbchen nicht momentan die Temperatur des zweiten Bades an, seine Erregung erreicht erst allmählig den vollen Werth; somit ist auch der Verlust, den seine Ladung erleidet, geringer, und man wird zu setzen haben

$$\pm\,\sigma_\tau = y - x + 2\beta\xi, \tag{17}$$

worin β einen echten Bruch bezeichnet. Es handelt sich darum, die Größe von β und von ξ zu bestimmen, wobei eine mäßige Genauigkeit ausreichen wird, da $2\beta\xi$ immerhin nur eine Correction ist, die an dem (neben ihr sehr beträchtlichen) Werth von $y - x$ angebracht werden soll.

ξ habe ich aus den l e t z t e n d r e i der für das zweite Bad mitgetheilten Ablesungen bestimmt, weil bei diesen die Amplituden schon kleiner waren, und darum die strengere Gültigkeit

des oben angegebenen Gesetzes erwartet werden durfte. Es gilt, wie leicht erkennbar ist,

$$\xi = \frac{(a_4 - a_3)\, d + (a_5 - a_4)}{1 + d}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Werthe ξ sind in der Tabelle angegeben; sie finden sich bei ein und demselben Stäbchen von etwas abweichender absoluter Größe, je nachdem dasselbe durch Erwärmung oder durch Abkühlung erregt war. In der That enthält ξ nach dem oben Gesagten einen Theil, der sein Vorzeichen hierbei nicht umkehrt, nämlich die Wirkung der veränderlichen Temperatur des dem Stäbchen parallel geschalteten Krystalles k_2.

Faßt man die von jenem Antheil freien mittleren absoluten Werthe der gefundenen ξ für die drei beobachteten Stäbchen in's Auge, welche resp. lauten

$$\xi_I = 4{,}1, \quad \xi_{II} = 5{,}0, \quad \xi_{III} = 6{,}3,$$

und vergleicht damit die mittleren absoluten Werthe $y - x$ oder auch die durch sie angenähert gemessenen electrischen Erregungen ε der Stäbchen, nämlich die Zahlen

$$\varepsilon_I = 124, \quad \varepsilon_{II} = 163, \quad \varepsilon_{III} = 184,$$

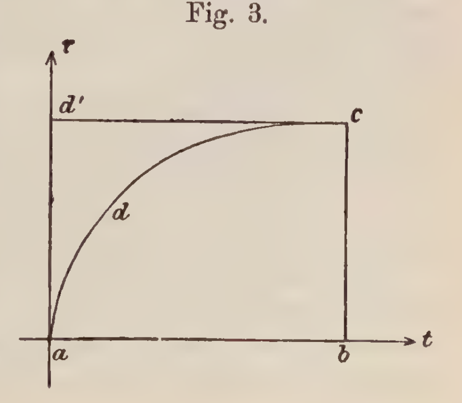
so erhält man

$$\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)_I = 30, \quad \left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)_{II} = 33, \quad \left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)_{III} = 29.$$

ξ ist sonach mit ε nahe proportional, wie das zu erwarten war, wenn anders die Verschiebung der Ruhelage auf der mangelhaften Isolation beruhte.

Um β zu erhalten, mußte zunächst der Verlauf der Temperatur und somit der electrischen Erregung des Stäbchens während der ersten Doppelschwingung der Nadel nach dem Eintauchen des Stäbchens in das zweite Bad bestimmt werden. Die Temperatur des Stäbchens durfte in hinreichender Annäherung der des mit ihm verbundenen Thermometergefäßes gleichgesetzt werden und ließ sich sonach leicht bestimmen. Die in gleichen Zeitintervallen abgelesenen Temperaturen

Fig. 3.



wurden als Ordinaten aufgetragen und mit ihrer Hülfe die Curve construirt, welche den zeitlichen Verlauf der Temperatur und somit denjenigen der Erregung des Stäbchens angenähert darstellte (s. Fig. 3). Da in jedem Zeitelement das Stäbchen einen Betrag an Ladung verliert, der seiner augenblicklichen Erregung nahezu proportional ist, so verhält sich der wirkliche Verlust innerhalb der ersten Doppelschwingung zu dem in den folgenden stattfindenden, wie die Fläche $abcda$ zu dem Rechteck $abcd'a$ in der Figur. Dies Verhältniß, das mit dem oben eingeführten β übereinstimmt, wurde bestimmt durch Wägung der beiden betreffenden Stücke des Cartonpapiers, auf dem die Construction der Curve vorgenommen war. Sein Werth fand sich sehr genau gegeben durch

$$\beta = 0{,}75.$$

Mit Hülfe der oben mitgetheilten Zahlen für ξ und dieser Zahl für β sind die in der Tabelle mitgetheilten Zahlenwerthe für σ_τ gemäß der Formel (17) berechnet. Aus ihnen ergiebt sich dann sogleich der Ausschlag, den ein Stäbchen von dem Querschnitt eines Quadratmillimeters bei einer Temperaturänderung von 1°C liefern würde, indem man σ_τ mit dem angegebenen Querschnitt q und der benutzten mittleren Temperaturänderung τ dividirt, also bildet

$$\nu = \sigma / \tau q.$$

Die erhaltenen Zahlen für ν, nämlich

I) 638 II) 652 III) 645

stimmen so gut überein, als nur irgend zu hoffen war. Ihr Mittel ist

$$\nu = 645,$$

und mit dieser für die ganze pyroelectrische Erregung des Turmalines characteristischen Zahl wird weiter unten zu rechnen sein. —

Auf die Beobachtungen über die pyroelectrische Erregung eines Turmalinstäbchen folgen in der Tabelle stets die im Anschluß daran erhaltenen Zahlen über die piëzoelectrische Erregung desselben Krystallparallelopipedes, das in der früheren Arbeit durch den Buchstaben B bezeichnet war.

Zuerst findet sich wieder die Anzahl der Beobachtungsreihen, aus denen die mitgetheilten mittleren Ablesungen berechnet sind. Daran schließen sich die beobachteten Umkehrpunkte der Nadel; drei, mit R bezeichnet, sind unmittelbar nach Aufhebung der Ab-

leitung erhalten, welche zuvor die Belegungen des Krystalles mit der Erde verband, und dienen zur Bestimmung der Ruhelage y der Nadel in der oben erörterten Weise; fünf andere beziehen sich auf die einer Belastung (B) oder Entlastung (E) unmittelbar folgenden Umkehrpunkte und sind in der gleichfalls oben besprochenen Weise zur Berechnung der Lagen x benutzt, welche die Nadel ohne Electricitätsverlust eingenommen haben würde. Die Differenz $\pm\sigma = x - y$ giebt hier aber unmittelbar den der Be- oder Entlastung entsprechenden Ausschlag; eine Correction ist nicht anzubringen, weil die Ablesungen direct nach der mechanischen Einwirkung auf den Krystall begannen. Zwar steckt in den so erhaltenen σ noch die Wirkung der oben erörterten allmähligen Temperaturänderung des gepreßten Krystalles; dieselbe fällt aber aus dem Mittel σ_p der beiden bei Be- und bei Entlastung erhaltenen Zahlen heraus.

Die Belastung P betrug bei allen Beobachtungen übereinstimmend 5,025 kg. Reducirt man den Ausschlag auf 1 kg, d. h. bildet man

$$\mu = \sigma_p / P,$$

so erhält man die oben angeführten Zahlen, welche bei den drei Beobachtungsgruppen lauten

1) 30,4 2) $29{,}8_5$ 3) 30,4.

Ihr Mittel

$$\mu = 30{,}2$$

ist die weiter unten zu benutzende für die axiale piëzoelectrische Erregung characteristische Zahl.

Dieselbe setzt voraus, daß der Druck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter ausgedrückt ist.

VI. Besitzt der Turmalin wahre Pyroelectricität?

Die Frage nach der Existenz wahrer Pyroelectricität am Turmalin spitzt sich nach dem S. 174 Gesagten zu auf die Untersuchung des Werthes der Größe λ, laut (6) gegeben durch

$$18)\quad \nu - \mu\,\frac{((s_{11}+s_{12})\alpha_3 - 2\,s_{13}\,\alpha_1) + (s_{33}\,\alpha_1 - s_{13}\,\alpha_3)\,2\,\delta_{31}/\delta_{33}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2\,s_{13}^2} = \lambda,$$

welche dem Modul der wahren Pyroelectricität proportional ist. Die zur Berechnung des complicirten zweiten Gliedes erforderlichen Zahlenwerthe sind im Vorstehenden zusammengestellt; es

erübrigt nur noch die Anwendung der auf S. 178 angegebenen allgemeinen Werthe der thermischen Dilatationscoefficienten auf die mittlere Beobachtungstemperatur von 22,2°C, wodurch wir erhalten

$$\alpha_1 = 3{,}36.10^{-6}, \quad \alpha_3 = 8{,}29.10^{-6}.$$

Die Temperatur 22,2° liegt außerhalb des von der directen Messung bestrichenen Intervalles; dies dürfte die obigen Zahlen ein wenig unsicher machen, doch jedenfalls nicht so weit, daß dadurch die zu ziehenden Folgerungen irgendwie erschüttert würden.

Die Ausführung der Zahlenrechnung giebt der Gleichung (18) die Form

$$645 - 529 = 116 = \lambda.$$

Hieraus folgt, daß laut den oben beschriebenen Beobachtungen im Turmalin zwar jedenfalls der größte Theil der bei einer Erwärmung stattfindenden electrischen Erregung auf eine Wirkung der Deformation zurückgeführt werden muß, daß aber etwa $^1/_5$ als eine directe Wirkung der Temperaturänderung erscheint und somit übrig bleiben würde, auch wenn man durch geeignete Drucke die thermische Deformation aufheben könnte.

Der immerhin geringe Betrag dieses Antheiles scheint mir einigermaßen für die im Eingang erwähnte Vorstellung von dem Mechanismus der electrischen Erregung der acentrischen diëlectrischen Krystalle zu sprechen. Jedenfalls stellt sich die wahre und die falsche Pyroelectricität als von so nahe gleicher Größenordnung dar, daß man darauf hingewiesen wird, eine gemeinsame Ursache für beide anzunehmen; und die oben erörterte schließt sich wohl am zwanglosesten den allgemeiner adoptirten Anschauungen über die Constitution der Materie an.

Es mag bemerkt werden, daß das Resultat der von Riecke und mir früher angestellten Beobachtungen mit dem vorstehenden in nächste Uebereinstimmung kommt, wenn man bei der Rechnung statt der Pfaff'schen Dilatationscoefficienten die neu bestimmten benutzt. Man erhält dann in den in jener Arbeit angewandten Einheiten für den Modul der falschen Pyroelectricität den Werth 0,98, während das Mittel der Riecke'schen Beobachtungen für den Modul der gesammten Pyroelectricität 1,23 lieferte. Die Differenz ist wieder ein Fünftel des letzteren Werthes. —

Bei den vorstehenden Entwickelungen ist das Hauptgewicht

auf die relativen Werthe der pyro- und piëzoelectrischen Erregungen gelegt; jetzt zum Schluß mag noch beigebracht werden, was sich mit Hülfe der angestellten Beobachtungen über absolute Zahlenwerthe schließen läßt.

Zunächst giebt der auf S. 176 angegebene Werth des piëzoelectrischen Moduls δ'_{33} in absolutem Maaße sogleich die Möglichkeit, die Moduln γ und ϑ der ganzen und der wahren pyroelectrischen Erregung in gleicher Weise auszudrücken. Denn μ, ν und λ sind resp. mit δ'_{33}, γ und ϑ proportional, demgemäß wird sein müssen

$$\gamma = \delta'_{33} \cdot \frac{\nu}{\mu}, \quad \vartheta = \delta'_{33} \frac{\lambda}{\mu}.$$

Benutzt man die Werthe $\delta'_{33} = -0{,}0567$, $\nu = 645$, $\mu = 30{,}2$, so erhält man

$$\gamma = 1{,}21, \quad \vartheta = 0{,}238.$$

Der Werth von γ liegt sehr nahe dem Mittelwerth 1,23 aus den unter sich stark abweichenden Moduln, die Riecke bei verschiedenen brasilianischen Turmalinen gefunden hat[1]).

Was die allgemeinen Folgerungen aus den vorstehend abgeleiteten Resultaten angeht, so ist zunächst klar, daß, wenn bei einem Krystall das Vorkommen wahrer Pyroelectricität nachgewiesen wird, damit überhaupt die allgemeine Gültigkeit der Curie-Röntgen'schen Hypothese von der vollständigen Zurückführbarkeit der Pyroelectricität auf piëzoelectrische Erregungen umgestoßen ist. Dieselbe bleibt zwar unangefochten bei allen Krystallen ohne einzelne krystallographisch ausgezeichnete Richtungen, wo die Theorie schon allein ausreicht, sie zu beweisen. Bei den übrigen Krystallen ist aber die Berücksichtigung der directen Wirkung einer Temperaturänderung neben derjenigen der Deformationen erforderlich; die Entwickelung der Theorie auf dieser allgemeinsten Grundlage habe ich bereits vor vier Jahren gegeben[2]).

Bei allen Krystallen, die nur ein Paar einander entgegengesetzter einzigartiger Richtungen zeigen, ist die Complication, welche die Einführung der wahren Pyroelectricität verursacht, eine sehr geringfügige; sie besteht darin, daß in dem Ausdruck für das diëlectrische Moment nach der einen jener Richtungen zu den in den Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ linearen Gliedern noch ein

---

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 551 und 552.

2) W. Voigt Gött. Nachr. 1994, Nr. 4, p. 348.

in τ lineäres tritt. Zu diesen Krystallen gehört Turmalin; für ihn würde demgemäß bei Erregungen, welche die Temperatur ändern, an Stelle von (5) das folgende System zu setzen sein:

$$\text{19)}\quad \begin{gathered} a = \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \quad b = -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_z \\ c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z + \vartheta\tau, \end{gathered}$$

wobei ϑ den oben angegebenen Zahlenwerth besitzt. Aehnlich würde das System (7) übergehen in

$$\text{20)}\quad \begin{gathered} -a = \delta_{15} Z_x - 2\delta_{22} X_y, \quad -b = -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15} Y_z, \\ -c = \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z - \gamma\tau, \end{gathered}$$

wobei

$$\gamma = \vartheta + 2\alpha_1 \varepsilon_{31} + \alpha_3 \varepsilon_{33}$$

ist, falls α_1 und α_3 wieder die thermischen Dilatationscoefficienten bezeichnen. γ hat dabei wie früher die Bedeutung des Moduls der ganzen pyroelectrischen Erregung; denn bei einer Erwärmung unter constantem Druck sind alle Componenten $X_x, \ldots X_y$ gleich Null, und obiges System reducirt sich auf

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = \gamma\tau.$$

Resultate.

1) Die von Riecke und mir früher durchgeführte Vergleichung zwischen der piëzo- und der pyroelectrischen Erregung eines Turmalines hat ein unrichtiges Endresultat ergeben, weil die Pfaffschen Werthe für die thermischen Dilatationscoefficienten des Turmalines, auf den von uns benutzten Krystall angewandt, nicht der Wirklichkeit entsprechen.

2) Unter Zugrundelegung eines Zahlensystemes, das vollständig an einem und demselben Krystall bestimmt ist, ergiebt sich, daß von der durch eine Erwärmung unter Atmosphärendruck hervorgerufenen electrischen Erregung rund 80 % auf die Wirkung der die Erwärmung begleitenden Deformation, d. h. auf Piëzoelectricität zurückzuführen sind und sonach eine falsche Pyroelectricität bilden. Die übrigen 20 % stellen dagegen eine directe Wirkung der Erwärmung und somit wahre Pyroelectricität dar. Das gleiche Resultat liefern die früheren Beobachtungen von Riecke und mir bei Benutzung der neuen Werthe der thermischen Dilatationscoefficienten.

3) Hieraus ergiebt sich, daß bei allen Krystallen mit einzelnen krystallographisch ausgezeichneten Richtungen eine vollstän-

dige Zurückführung der Pyroelectricität auf piëzoelectrische Wirkungen nicht erwartet werden darf.

4) Dagegen zeigt die Theorie, daß bei allen Krystallen, die einzelner ausgezeichneter Richtungen entbehren, die Erwärmung nur in soweit electrisch wirksam ist, als sie Deformationen veranlaßt, daß bei ihnen also scheinbare Pyroelectricität sich stets und vollständig auf Piëzoelectricität zurückführen läßt.

Anhang.

Ein gepreßter Turmalin stellt eine Electricitätsquelle dar, die bestimmte Ladungsgrößen mit großer Sicherheit und Bequemlichkeit zu liefern vermag. Er bietet sonach ein vortreffliches Hülfsmittel dar, um Electrometer auf Ladungen zu aichen. So lassen sich z. B. die oben besprochenen Beobachtungen auffassen als Bestimmungen der pyroelectrisch erzeugten Ladungen mit Hülfe eines durch die Piëzoelectricität eines Turmalines geaichten Electrometers.

Zieht man noch ein galvanisches Element von bekannter electromotorischer Kraft heran, so kann man auch die Capacität des Electrometers leicht finden.

Der Zusammenhang zwischen den Ladungen E_1, E_2, E_3 und den Potentialen P_1, P_2, P_3 dreier in Wechselwirkung stehender Leiter 1, 2, 3 wird bekanntlich durch die Capacitätscoefficienten C_{hk} der Combination vermittelt gemäß den Formeln

$$E_1 = C_{11}P_1 + C_{12}P_2 + C_{13}P_3,$$
$$E_2 = C_{21}P_1 + C_{22}P_2 + C_{23}P_3,$$
$$E_3 = C_{31}P_1 + C_{32}P_2 + C_{33}P_3,$$

wobei $C_{hk} = C_{kh}$ ist.

Sind die Leiter 1 und 2 die Quadrantenpaare eines Electrometers inclusive gleicher mit jedem von ihnen verbundenen Leitersysteme, und steht die Nadel angenähert symmetrisch zu beiden, so kann man $C_{11} = C_{22}$ und $C_{13} = C_{23}$ setzen. Demgemäß wird

$$E_1 - E_2 = (C_{11} - C_{12})\,(P_1 - P_2),$$

und es läßt sich die Differenz $C_{11} - C_{12}$ als die Capacität C eines Quadrantenpaares des Electrometers auffassen.

Der Ausschlag σ der Nadel ist bei hinreichender Kleinheit

desselben mit $P_1 - P_2$, also auch mit $E_1 - E$ proportional; z. B. sei $\sigma = k(P_1 - P_2)$.

Ein axial mit 1 Kilo comprimirter Turmalin liefert nach S. 11 0,0567 absolute Electricitätseinheiten. Da die beiden Belege des Krystalles bei unsern Beobachtungen mit den beiden Quadrantenpaaren verbunden waren, so war dabei $E_1 - E_2 = \pm 0{,}1134$ Einheiten. Dem entsprach nach S. 24 der Ausschlag von 30,2 Theilen der Scala. Es war somit

$$0{,}1134 = 30{,}2\, C/k.$$

Waren dagegen die beiden Quadrantenpaare mit den Polen eines Cadmium-Elementes von der electromotorischen Kraft 1,024 Volt verbunden, so zeigte die Nadel nach S. 15 einen Ausschlag von 45,0 Scalentheilen.

Hier galt somit

$$45{,}0 = \frac{k \cdot 1{,}024 . 10^8}{3.10^{10}} = k \cdot 0{,}341.10^{-2}.$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln, so resultirt

$$C = \frac{0{,}1134 . 45}{30{,}2 . 0{,}341} \cdot 10^2 = 49{,}5.$$

Die Capacität jedes der Quadrantenpaare des Electrometers mit den angehängten Belegungen der Krystallpräparate k_1 und k_2 und den bezüglichen Drathleitungen ist somit gleich 49,5 cm. Durch besondere Versuche, deren Aufzählung hier unterbleiben kann, ließ sich auch das Verhältniß der Capacitäten der einzelnen Theile bestimmen, aus denen sich jener Werth zusammensetzt. Es fand sich für das Quadrantenpaar und die Leitung bis zur Verzweigungsstelle (s. Fig. 1) der Werth 32,6 cm, für einen Beleg des erwärmten Krystalles mit der entsprechenden Leitung 10,6 cm, für den des gepreßten Krystalles ebenso 6,3 cm.

Göttingen, Anfang Juni 1898.

Ueber den Reactionsdruck der Kathodenstrahlen.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung der Gesellschaft vom 25. Juni 1898.

Bei einem elektrischen Radiometer bezeichnen wir den Druck, welcher von den Kathodenstrahlen auf 1 qcm der Flügelfläche ausgeübt wird, durch p; die gesammte Fläche der Flügel durch Q, das Trägheitsmoment des Kreuzes durch $\mathfrak{M}$, den Abstand der Drehungsaxe von dem Mittelpunkt der Scheiben durch l. Ferner sei ϱ der Coefficient der Reibung und φ der Drehungswinkel. Die Bewegungsgleichung ist dann:

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\varrho\frac{d\varphi}{dt} = p\,Q\,l.$$

Ihr Integral ist:

$$\varphi = \frac{p\,Q\,l}{\varrho}t-\frac{p\,Q\,l}{\varrho}\cdot\frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\left(1-e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}\right).$$

Bezeichnen wir die konstante Geschwindigkeit, mit der sich das Radiometer schließlich herumdreht, durch α, so ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{p\,Q\,l}{\varrho}.$$

Mit Benützung dieses Werthes wird die Gleichung für den Drehungswinkel:

1) $$\varphi = \alpha t-\alpha\frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\left(1-e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}\right).$$

Für sehr große Werthe von t wird darnach:

$$\varphi = \alpha\,(t - \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}).$$

Es wird somit

$$2)\qquad \varphi = 0 \quad \text{für} \quad t_0 = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho},$$

und

$$3)\qquad t = 0 \quad \text{für} \quad \varphi_0 = -\alpha\frac{\mathfrak{M}}{\varrho}.$$

Ferner ergiebt sich aus der ersten Gleichung:

$$4)\qquad \varrho/\mathfrak{M} = \frac{1}{t}\ \text{log. nat.}\ \frac{\alpha\mathfrak{M}/\varrho}{\alpha\mathfrak{M}/\varrho + \varphi - \alpha t}.$$

Der Entladungsstrom, welcher durch das Radiometer fließt, werde unterbrochen; das Kreuz bewegt sich dann zunächst mit der erreichten Geschwindigkeit weiter, diese Geschwindigkeit wird aber durch die ihr entgegenwirkende Reibung mehr und mehr vermindert, und schließlich bleibt das Kreuz stehen. Berücksichtigen wir in diesem Falle außer der dynamischen auch noch eine statische Reibung P, so ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho\frac{d\varphi}{dt} + P = 0.$$

Daraus folgt:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}(\alpha + \frac{P}{\varrho})(1 - e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}) - \frac{P}{\varrho}t$$

Wenn P klein ist gegenüber ϱ, so kann man für nicht zu große Werthe von t an Stelle von dieser Gleichung die einfachere setzen:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\alpha\,(1 - e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}).$$

Bezeichnen wir den Werth, welchen der Winkel φ für $t = \infty$ erreicht, durch $\varphi\infty$, so ist:

$$5)\qquad \varphi\infty = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\alpha,$$

und

$$\varphi = \varphi_\infty (1 - e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}} t}).$$

Aus der letzteren Gleichung folgt:

6) $$\varrho / \mathfrak{M} = \frac{1}{t} \log \text{ nat. } \frac{\varphi_\infty}{\varphi_\infty - \varphi}.$$

Hat man α und $\varrho/\mathfrak{M}$ gefunden, so ergiebt sich für den Druck p der Kathodenstrahlen der Werth:

7) $$p = \alpha \cdot \frac{\varrho}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{Q l}.$$

Bei den Beobachtungen wurden die Zeiten der ganzen Umdrehungen des Radiometerkreuzes mit Hülfe eines Registrierapparates bestimmt.

Es mögen nun zunächst drei Beobachtungsreihen für die verschwindende Bewegung mitgetheilt werden, die unter ziemlich gleichen Verhältnissen angestellt waren. Die Columnen enthalten die Zeiten, zu welchen die aufeinanderfolgenden ganzen Umdrehungen des Radiometerkreuzes registriert wurden; die vierte Columne enthält die aus den beobachteten Werthen abgeleiteten Mittelwerthe:

Tag der Beobachtung

7./VI.	9./VI.	10./VI.	Mittel.
0	0	0	0
0.6	0.9	0.5	0.7
1.2	1.4	1.2	1.3
1.9	2.0	1.6	1.8
2.5	2.8	2.3	2.5
3.3	3.4	2.9	3.2
4.0	4.1	3.5	3.9
4.7	4.8	4.3	4.6
5.4	5.5	5.0	5.3
6.1	6.4	5.7	6.1
6.8	7.1	6.4	6.8
7.7	8.0	7.3	7.7
8.4	8.6	7.9	8.3
9.3	9.6	8.7	9.2
10.2	10.6	9.7	10.2
11.1	11.6	10.4	11.0
12.0	12.6	11.4	12.0
12.9	13.5	12.4	12.9

Tag der Beobachtung			
7./VI.	9./VI.	10./VI.	Mittel.
14.0	14.5	13.4	14.0
15.0	15.6	14.4	15.0
16.1	16.7	15.5	16.1
17.2	18.0	16.6	17.3
18.3	19.2	17.8	18.4
19.8	20.7	19.2	19.9
21.2	22.1	20.5	21.3
22.8	23.9	22.2	23.0
24.4	25.6	23.9	24.6
26.3	27.8	25.8	26.6
28.3	30.3	28.4	29.0
31.1	33.2	32.0	32.1

Die Mittelwerthe mit den ihnen entsprechenden Werthen der Umdrehungen wurden graphisch dargestellt; aus der Zeichnung wurde eine Reihe zusammengehöriger Werthe von t und von φ/π entnommen. Der Werth von φ_∞ wurde durch Probieren in passender Weise bestimmt, und dann nach Gleichung 6 die den einzelnen Werthpaaren von φ und t entsprechenden Werthe von $\varrho/\mathfrak{M}$ berechnet. Die auf diesem Wege erhaltenen Zahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

t	φ/π	$\frac{1}{t}$ log br. $\frac{\varphi_\infty}{\varphi_\infty - \varphi}$
2	6.3	0.0187
4	12.6	0.0198
6	18.1	0.0196
8	23.1	0.0197
10	27.9	0.0199
12	32.0	0.0198
16	39.6	0.0199
20	46.1	0.0211
24	51.3	0.0203
28	55.1	0.0200
36	59.9	0.0187
∞	76	

Im Mittel wird:

$$\varrho/\mathfrak{M} = 0{,}0198 \;.\; M = 0{,}0456.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit α ist bei den Beobachtungen vom 4. Juni gleich 2,956 π, bei den Beobachtungen vom 9. Juni gleich 3,121 π, bei denen vom 10. Juni gleich 3,520 π, somit im Mittel gleich 3,199 π. Aus Gleichung 5 folgt daher:

$$\varrho/\mathfrak{M} = \frac{3{,}199\ \pi}{76\ \pi} = 0{,}0421.$$

Die Bewegung des Kreuzes unter der Wirkung der elektrischen Repulsion erfolgte bei den Beobachtungen vom 7. und vom 9. Juni in ziemlich übereinstimmender Weise; auch diese beiden Beobachtungsreihen wurden daher durch Bildung der Mittelwerthe in eine einzige zusammengezogen. Die für die einzelnen aufeinanderfolgenden Umdrehungen des Kreuzes registrierten Zeiten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die dritte Kolumne enthält die Mittel der in beiden Reihen beobachteten Zeiten.

7./VI.	9./VI.	Mittel	7./VI.	9./VI.	Mittel
0.12	–0.01	0.06	42.22	43.11	42.66
13.42	13.00	13.21	43.01	43.80	43.40
16.20	16.02	16.11	43.80	44.52	44.16
18.50	18.32	18.41	44.60	45.28	44.94
20.32	20.30	20.31	45.41	46.00	45.70
21.98	22.12	22.05	46.04	46.80	46.42
23.47	23.71	23.59	46.73	47.54	47.13
24.81	25.10	24.95	47.50	48.28	47.89
26.12	26.50	26.31	48.27	49.00	48.63
27.34	27.70	27.52	48.96	49.71	49.33
28.41	29.02	28.71	49.69	50.41	50.05
29.63	30.18	29.90	50.42	51.12	50.77
30.61	31.42	31.01	51.10	51.82	51.46
31.69	32.37	32.03	51.83	52.57	52.20
32.64	33.30	32.97	52.51	53.24	52.87
33.63	34.31	33.97	53.20	53.93	53.56
34.60	35.31	34.95	53.86	54.60	54.23
35.42	36.24	35.83	54.52	55.28	54.90
36.40	37.17	36.78	55.21	55.89	55.55
37.31	38.09	37.70	55.85	56.50	56.17
38.20	38.93	38.56	56.51	57.16	56.83
39.02	39.79	39.40	57.11	57.81	57.46
39.84	40.64	40.24	57.80	58.46	58.13
40.60	41.49	41.04	58.42	59.08	58.75
41.40	42.30	41.85	59.05	59.71	59.38

7./VI.	9./VI.	Mittel	7./VI.	9/VI.	Mittel
59.69	60.37	60.03	62.77		
60.33	60.87	60.60	63.42		
60.90	61.31	61.10	64.02		
61.56			64.60		
62.17			65.17		

Die Mittelwerthe der vorhergehenden Tabelle wurden wiederum zusammen mit den zugehörigen Werthen des Drehungswinkels φ graphisch dargestellt. Aus der Zeichnung wurden für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Zeiten die entsprechenden Werthe des Drehungswinkels entnommen. Für $\frac{\alpha \mathfrak{M}}{\varrho}$ ergab sich aus Gleichung 3 der Werth 75,5; α ist im Mittel aus den Beobachtungen vom 7. und vom 9. Juni gleich 3,038 π. Nach Gleichung 4 wurden die den einzelnen Werthpaaren von φ und t entsprechenden Werthe von $\varrho/\mathfrak{M}$ berechnet; schließlich wurden mit Benutzung von Gleichung 1 die Werthe von φ zurückberechnet. Die Ergebnisse der Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

t	φ/π	$\frac{1}{t}$ log br. $\frac{\alpha\mathfrak{M}/\varrho}{\alpha\mathfrak{M}/\varrho + \varphi - \alpha t}$	φ/π berechn.
5	0.9	0.0182	−0.6
10	3.1	0.0195	+2.1
15	7.6	0.0203	7.4
20	14.0	0.0210	14.8
25	22.2	0.0217	23.7
30	32.3	0.0218	34.1
35	43.5	0.0220	45.4
40	56.2	0.0218	57.5
45	70.0	0.0208	70.3
50	84.5	0.0194	83.6
55	99.6	0.0177	97.3

Im Mittel ergiebt sich aus den Werthen dieser Tabelle:

$$\varrho/\mathfrak{M} = 0{,}0470.$$

Aus Gleichung 2 folgt:

$$\varrho/\mathfrak{M} = 0{,}0425.$$

Im Mittel ist:

$$\varrho/\mathfrak{M} = 0{,}0447.$$

In Verbindung mit Gleichung 3 ergiebt sich dann:

$$\alpha = 3{,}370 \times \pi.$$

Man sieht daß die Beobachtungen der Reaktionsbewegung zusammen mit denen über die verschwindende Drehung im Ganzen 4 verschiedene Werthe für $\varrho/\mathfrak{M}$ und zwei verschiedene Werthe für α liefern. Die ersten beruhen auf der Benutzung der Gleichungen 6, 5, 4 und 2; von den letzteren ist der eine unmittelbar aus der Beobachtung abgeleitet, der andere berechnet mit Hülfe der Gleichung 3. Die folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung der erhaltenen Werthe:

Tag der Beobachtung.	Werthe von $\varrho/\mathfrak{M}$ Gl. 6	Gl. 5	Gl. 4	Gl. 2	Werthe von α/π beob.	Gl. 3
23./V.	0.0543	0.0505	0.0548	0.0521	2.222	2.295
4./VI.	0.0488	0.0462	0.0410	0.0327	3.005	3.680
7./VI., 9./VI.	0.0456	0.0421	0.0470	0.0425	3.038	3.370
10./VI.	0.0456	0.0421	0.0341	0.0315	3.480	3.770
14./VI.	0.0474	0.0433	0.0490	0.0472	3.461	3.780
15./VI., 17./VI.	0.0430	0.0370	0.0499	0.0474	3.702	4.370

Zur Berechnung des Reaktionsdruckes p dient Gleichung 7, in der wir unter $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment eines Flügels, unter Q seine Fläche verstehen können.

Für das Trägheitsmoment eines Flügels ergiebt sich aus den Dimensionen und aus dem Gewichte des Kreuzes der Werth:

$$\mathfrak{M} = 0{,}09 \cdot g \times cm^2.$$

Die Fläche eines Flügels ist gleich 1,07 cm^2; die Länge l gleich 1,39 cm. Entnimmt man der vorhergehenden Tabelle die Mittelwerthe von $\varrho/\mathfrak{M}$ und von α/π, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung. In dieser ist außerdem noch die den einzelnen Beobachtungen entsprechende Stromstärke, in elektrostatischem Maaße, sowie die Spannungsdifferenz der Elektroden in Volt aufgenommen.

Tag der Beobachtung.	$\varrho/\mathfrak{M}$	α/π	p	$i \times 10^{-6}$	V	$p/i \times 10^{6}$
23./V.	0.0529	2.258	0.0226	3.14	400	0.0072
4./VI.	0.0422	3.342	0.0268	2.98	412	0.0090
7./VI., 9./VI.	0.0443	3.204	0.0269	3.00	417	0.0090
10./VI.	0.0383	3.625	0.0264	2.77	435	0.0095
14./VI.	0.0467	3.620	0.0320	3.65	447	0.0088
15./VI., 17./VI.	0.0443	4.036	0.0339	3.52	458	0.0096

An die vorhergehenden Resultate schließen wir noch eine Bemerkung von theoretischer Art. Durch eine Betrachtung, welche hier nicht ausgeführt werden soll, kommt man zu dem Satze, daß der Reaktionsdruck der emittierten negativ elektrischen Theilchen gleich ist der Bewegungsgröße, welche die in einer Sekunde von der Flächeneinheit der Kathode ausstrahlenden Theilchen schließlich erreichen. Bezeichnet man also durch N die Zahl der Theilchen, welche in 1 sec von 1 qcm der Kathode ausstrahlen, durch μ ihre ponderabele Masse, durch $\mathfrak{g}$ ihre Endgeschwindigkeit so ist:

$$p = \mu N \mathfrak{g}.$$

Drücken wir $\mathfrak{g}$ aus durch das Kathodengefälle V, so ergiebt sich:

$$p = \frac{\varepsilon N}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \cdot \sqrt{2 V}.$$

Hieraus folgt:

$$\varepsilon N = p \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{2V}}.$$

Setzen wir für p den aus der vorhergehenden Tabelle folgenden Mittelwerth, so erhalten wir:

$$\varepsilon N = 88 \times 10^{-10} \times i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{2V}}.$$

Nehmen wir an, daß für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ der Werth 53×10^{16} genommen werden darf, den Kaufmann für die in den Kathodenstrahlen bewegten Theilchen gefunden hat, und setzen wir für V den Werth $\frac{2}{3}$, so wird:

$$\varepsilon N = 6{,}05 \times i.$$

Die ganze Menge der negativen Elektricität, welche in einer Sekunde von der Oberfläche der Flügel ausgestrahlt wird, wäre hiernach:

$$4\,Q\,\varepsilon N = 25{,}8 \times i.$$

Die auf Grund unserer Annahmen sich ergebende Theorie führt also in Verbindung mit den Beobachtungen zu dem von vornherein nicht wahrscheinlichen Resultat, daß die Menge der negativen Elektricität, welche von der Kathode in einer Sekunde ausgestrahlt wird, größer ist, als die Menge der Elektricität, welche der Entladungsstrom in 1 sec durch den Querschnitt des Schließungskreises führt. Dabei ist aber zu beachten, daß unsere Rechnung in so fern eine durchaus hypothetische ist, als sie nur die Rückwirkung der emittierten elektrischen Theilchen in Betracht zieht, den Einfluß der allgemeinen elektrischen Vertheilung im Inneren des Entladungsgefäßes nicht berücksichtigt, ebensowenig die Möglichkeit, daß durch den Strom Vorgänge von der Art ausgelöst werden, wie sie die Drehung der Lichtmühle erzeugen.

Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen.

Fünfter Bericht.

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juni 1898.

Wie für die serösen Häute so steht auch für die Gelenke die Frage nach der Herkunft des Fibrins bei Entzündungen, besonders den tuberkulösen in der Besprechung; hie Exsudatfibrin — hie Degenerationsfibrin, so lautet auch hier das Feldgeschrei. Ich vertheidige die Ansicht, daß eine Ausschwitzung bei der Bildung des Faserstoffs im Gelenk eine große Rolle spielt und daß die bekannten Bilder von Keimgewebe mit Faserstoff auf der Oberfläche der Gelenkhäute und Gelenkknorpel und von dem Ineinanderliegen der beiden da, wo sie aneinander grenzen, nach dem Vorgange Königs nicht durch faserstoffige Entartung von Keimgewebe, sondern — mindestens zum guten Theil — durch Organisation von Exsudatfibrin entstanden sind. Das neugebildete Gewebe ersetzt nicht nur den Faserstoff, sondern bringt auch den Knorpel von der Gelenkfläche her mehr und mehr zum Schwund.

Auch bei dieser Frage kann man daran denken, daß nicht unwichtige Aufschlüsse durch Thierversuche zu erlangen sind, bei welchen Faserstoff in die Gelenke hineingebracht oder durch Einspritzung gerinnbarer, Fibringeneratoren enthaltender Flüssigkeiten die Entstehung von Exsudatfibrin nachgeahmt wird. Entsprechend den Verhältnissen bei Entzündungen, wo die Bildung des Gerinnsels nicht nur eine einmalige ist, wird man wiederholte Einspritzungen gerinnbarer Flüssigkeiten in dasselbe Gelenk vornehmen müssen. Ich habe veranlaßt, daß solcherlei Versuche angestellt

werden, und hoffe, daß über einen Erfolg derselben seiner Zeit von anderer Seite berichtet werden kann.

Ganz besonders erwünscht aber erscheinen solche Beobachtungen beim Menschen, bei welchen kein Zweifel darüber sein kann, daß von vornherein ein Gerinnungserzeugniß vorliegt. Einen solchen Fall glaube ich im Februar 1896 gefunden zu haben. Eine 81 Jahre alte Frau war 8 Wochen, nachdem sie auf eine nicht ganz aufgeklärte Weise sich einen Schenkelbruch zugezogen hatte, gestorben und zeigte bei der Section außer unwesentlichen Veränderungen eine eiterige Basilarmeningitis mit geringem Pyocephalus, einen linksseitigen, in Heilung begriffenen Oberschenkelbruch und im linken Kniegelenk Altersveränderungen sowie, meiner Annahme nach, in Organisation begriffene Blutgerinnsel auf den Gelenkflächen. Das Protokoll sagt darüber: „Im linken Kniegelenk befindet sich eine reichliche Menge (ca. 1 Theelöffel voll) goldgelber, fadenziehender Flüssigkeit; in den Weichtheilen des Gelenks mehrfach flache Blutungen; die Gelenkknorpel getrübt, sammetartig, an allen Gelenkflächen haften hie und da röthlichgrau aussehende, gerinnselartige Massen ziemlich fest der Oberfläche an (entfärbte Blutgerinnsel?)“.

Ich veranlaßte Herrn Dr. Dettmer, Volontär-Assistent am Institut, eine genauere Untersuchung vorzunehmen. Derselbe vervollständigte zunächst das Protokoll nach den Befunden an dem aufbewahrten Präparat: Größere, älteren Blutgerinnseln ähnelnde Auflagerungen, welche dem Knorpel bzw. den benachbarten Weichtheilen fest aufzuliegen scheinen, finden sich am Gelenktheil des Oberschenkels an einer Stelle dicht neben der vorderen Grenze der Fossa intercondyloidea; eine andere reicht von dem Ansatz der Weichtheile an der der Fossa intercondyl. zugekehrten Seite des medialen Condylus halbkreisförmig auf den vorderen unteren Abschnitt des betreffenden Condylus hinüber; endlich eine dritte, wieder etwas kleinere, auch einen Kreisabschnitt bildende findet sich an demselben Condylus, der letzterwähnten schräg gegenüber mehr nach hinten, vom Ansatz der Weichtheile aus sich einige Millimeter über den Knorpel ausbreitend. Einzelne kleine gelbbräunlich aussehende Gerinnselmassen haften noch an verschiedenen Stellen dem Knorpel fest an. Am wenigsten oder vielmehr gar nicht fest haftet ein großes Gerinnsel (2 cm in dem Quer-, 1,5 cm im Längs- und 3 mm im Dickendurchmesser), welches unmittelbar oberhalb der Gelenkfläche für die Patella gelegen ist. An fast allen anderen Stellen wird die Knorpeloberfläche durch feine Zöttchen dargestellt und erhält so ein sammtartiges Aus-

sehen. Rauher erscheint der Knorpel durch größere Zöttchen an dem unteren hinteren Abschnitt des medialen und ebenso an einer gleichen des lateralen Condylus, sowie am letzteren noch an einer Stelle am Uebergang der unteren in die vordere Fläche da, wo Femur- und Tibia-Gelenkflächen an einander reiben. Dieser letzten Stelle entspricht eine ganz ähnlich aussehende an dem Tibiaknorpel, der im übrigen auch ein sammetartiges Aussehen gewährt, aber frei von Blutungen oder gerinnselartigen Auflagerungen ist. Im Gewebe der Zwischenbandscheibe finden sich mehrfache kleinere Blutungen. Die als Blutgerinnsel angesprochenen Massen lassen sich an ihren Rändern durchweg etwas von der Unterlage abheben, haften sonst aber derselben fest an.

Die mikroskopische Untersuchung verschiedener Auflagerungen hat nun zunächst unzweifelhaft ergeben, daß sie wirklich blutige Gerinnsel sind; häufig sieht man an der Oberfläche eine körnig streifige Gerinnselmasse, in der Tiefe, nach dem Knorpel zu dicht gedrängte rothe Blutkörperchen, doch auch Stellen, wo erhaltene Blutkörperchen fast ganz fehlen, andere, wo sie die Hauptmasse ausmachen. Die tiefste Schicht wird vielfach (das große lose aufliegende Gerinnsel an der Patellarseite zeigt nichts derartiges) eingenommen von jungem Bindegewebe, welches in die Blutgerinnsel eingedrungen erscheint, so wie es von dem in Organisation begriffenen Thrombus bekannt ist. Seine Menge ist manchmal ganz gering, manchmal reichlicher, dann sind wohl auch Gefäße vorhanden und vielfach Ablagerungen von Pigment, wesentlich in Zellen. An allen Schnitten, in welchen Synovialhaut vorhanden ist, sieht man das Granulationsgewebe in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Synovialrand stehen.

Am bemerkenswerthesten ist das Aussehen der Knorpeloberfläche. Stellenweise zeigt sie auch unter dem jungen Bindegewebe die bekannte Auffaserung und sog. Mutterzellenbildung der chronischen Arthritis, wie solche auch an nicht bedeckten, besonders an den schon makroskopisch zerklüfteten Stellen hervortritt, doch findet sich diese Veränderung keineswegs überall an den bedeckten Stellen, insbesondere ist nicht überall eine Vermehrung der Zellen vorhanden. An zahlreichen Stellen, besonders wo das oberflächliche Granulationsgewebe dicker ist, sieht man nun von dem oberflächlichen Bindegewebe zellige Fortsätze in den Knorpel hineinreichen, welche an den senkrechten Durchschnitten die Gestalt eines mehr oder minder schlanken Dreiecks haben, dessen Basis oben, dessen Spitze in der Tiefe liegt. Vielfach kann man deutlich feststellen, daß diese Fortsätze zwischen je 2 Knorpelzellen-

haufen gelegen sind, und es sind die Bilder nicht selten, wo ein noch von Knorpelgrundsubstanz umgebener Haufen von Knorpelzellen zu beiden Seiten von zellig bindegewebigen Fortsätzen umfaßt, ja gelegentlich fast ganz umwachsen ist. Außer den größeren Fortsätzen und am Rande dieser sieht man einzelne lange Zellen, mit der Längsachse senkrecht zum Knorpel in der Grundsubstanz liegen, an der dann meist eine feine, dieselbe Richtung wie die Zellen einhaltende Streifung zu sehen ist. Selten sind die Bindegewebsfortsätze unmittelbar gegen einen Knorpelzellenhaufen gerichtet, sichere Beweise dafür, daß die Knorpelzellen sich ihrerseits in Fibroblasten umgewandelt hätten, konnten nicht gefunden werden, es muß deshalb wohl angenommen werden, daß überall das Granulationsgewebe ausschließlich von der Synovialis herstammt.

Das Vorhandensein einer offenbar älteren verbreiteten Veränderung des Knorpels mit Vermehrung der Zellen im Knorpel läßt den Fall als einen zusammengesetzten erscheinen, bei dem insbesondere über die Einwirkung der Oberflächenvorgänge auf den Knorpel ein sicherer Aufschluß nicht zu gewinnen ist, jedenfalls aber gestattet die Beobachtung den Schluß, daß Blutgerinnsel die auf der Knorpeloberfläche liegen, von der Synovialis aus organisirt werden können, indem Granulationsgewebe an der Knorpeloberfläche sich vorschiebt, daß aber auch durch dieses Gewebe eine Zerstörung der Knorpelsubstanz von oben her bewirkt werden kann: das Granulationsgewebe frißt gewissermaßen nach der einen Seite das Gerinnsel, nach der anderen den Knorpel auf; ob das letzte bloß, weil der Knorpel schon verändert war, bleibt durch andere Beobachtungen zu entscheiden.

Den ganzen Fall fasse ich also so auf, daß gleichzeitig mit dem Knochenbruch Blutungen in die Weichtheile wie in die Höhle des durch ältere Vorgänge schon erkrankten linken Kniegelenks zustande kamen, daß das frei ergossene Blut zum Theil gerann und an den von König festgestellten typischen Stellen des Knorpels haften blieb, wo es dann theilweise von der Synovialis aus eine Organisation in der Tiefe erfuhr, durch welche auch der Knorpel in Mitleidenschaft gezogen wurde. Vielleicht war bei der alten Frau eine schlechte Aufsaugung des Blutergusses bedingt, einmal durch die alte Gelenkveränderung und den Altersmarasmus überhaupt, dann durch die Ruhigstellung des Gelenkes infolge des Schenkelbruches. Daß es sich etwa bloß um eine pannusartige Wucherung der Synovialis infolge dieser Ruhigstellung gehandelt habe, dagegen spricht einmal die deutlich nachweisbare,

ausgedehnte Blutung mit der Pigmentirung eines Theiles der Bindegewebszellen, sowie die große Ausdehnung und doch Ungleichmäßigkeit, in der das Granulationsgewebe die Oberfläche des Knorpels überzieht. —

Da die noch umstrittene Frage, welche Bedeutung den Embolien für die Entstehung der hämorrhagischen Infarcte der Lungen zukommt, besonders in experimenteller Richtung noch ungenügend bearbeitet war, so habe ich schon seit Jahren den Plan, darüber arbeiten zu lassen, verfolgt, leider aber bin ich, wie das uns Institutsdirektoren leider nur zu häufig vorkommt, an Persönlichkeiten gerathen, welche nicht die Ausdauer hatten, eine einmal in Angriff genommene Aufgabe mit Energie zu Ende zu führen, so daß ich mich endlich entschloß mit Unterstützung meines Assistenten Dr. Jenckel selbst eine Anzahl Experimente auszuführen. Es wurde zunächst versucht durch Pfröpfe, welche zugleich Träger besonderer chemischer Substanzen waren, Infarcte zu erzeugen und ich konnte auf der Naturforscherversammlung in Braunschweig im September 1897 (Verhandlungen II, 2, S. 7: Orth, Ueber künstliche Erzeugung des haemorrhagischen Lungeninfarcts) über positive Resultate berichten. Da ich beabsichtige über diese Arbeit demnächst eine besondere Mittheilung zu machen, so begnüge ich mich hier mit diesem Hinweis. —

Immer noch ist die Frage unentschieden, ob das zweifellos häufige Vorkommen von Eiter im Mittelohr ganz junger Kinder als eine physiologische Erscheinung oder als Zeichen einer eitrigen Entzündung anzusehen ist. Für Säuglinge und ältere Kinder ist besonders durch Hartmann, die entzündliche Natur der Vorgänge unzweifelhaft gemacht, aber gibt es auch eine Otitis media neonatorum? Diese Frage suchte der 1. Assistent am Institute, Privatdozent Dr. Aschoff (Otitis media neonatorum, Ztschr. f. Ohrenhlk. XXXI) an dem ziemlich reichen Material des Institutes — er konnte 85 Früchte untersuchen — zur Entscheidung zu bringen. Wegen der gegebenen äußeren Verhältnisse — die Früchte stammten größtentheils von auswärts — mußte auf eine bakterielle Untersuchung verzichtet werden, da Fäulnißbakterien sich in reicher Menge eingestellt hatten, ehe untersucht werden konnte, aber auch die mikroskopische Untersuchung des Inhalts und der Schleimhaut der Paukenhöhle, die meistens an beiden Ohren, zuweilen aber auch nur an einem vorgenommen wurde, gab zur Entscheidung der Frage genügende Anhaltspunkte.

Der Inhalt der Paukenhöhlen erwies sich als ein sehr wech-

selnder, selbst in beiden Ohren derselben Frucht kann er verschieden sein. Luft oder klare, wässerig-schleimige Flüssigkeit oder eine Mischung beider wurde in 39 Ohren gefunden, mehr oder weniger trübe, dünne Flüssigkeit, in welcher kleine gelbe Flocken schwammen (Leukocytenhaufen) in 12, eine zähschleimige, leicht getrübte oder mit dichteren gelben Flocken, die aus Leukocyten und Körnchenzellen bestanden, durchsetzte Masse in 13, mehr oder weniger zähe, größere Eiterpfröpfe in 20 Ohren. (Darunter allerdings 12 Fälle, in welchen die Kinder länger als 24 Stunden gelebt hatten, aber doch 8[1]), bei welchen der Tod vor Ablauf von 24 Stunden eingetreten war), Fruchtwasserbestandtheile (Vernix, Meconium) in 27 Ohren. Also in der Paukenhöhle neugeborener Kinder findet sich, soweit nicht eine völlige Verdrängung durch Luft bei extrauteriner Athmung stattgehabt hat, eine Flüssigkeit als Inhalt, welche in allen Schattierungen von dem Aussehen klaren Wassers bis zum zähschleimigen Eiterpfropf schwankt. In einer großen Zahl von Fällen sind dem Inhalte Fruchtwasserbestandtheile in größerer Quantität beigemengt. Der Umstand, ob das Kind todtgeboren oder erst nach der Geburt abgestorben ist, übt keinen Einfluß auf die Beschaffenheit des Ohrinhaltes aus, dagegen ist es bemerkenswerth, daß unter 33 Ohren mit Eiter 19, unter 39 mit unveränderter Paukenhöhle nur 2 Fruchtwasserbestandtheile enthielten.

Aber nicht nur bei ganz oder fast ausgetragenen Früchten, sondern auch bei Föten (es wurden 9 untersucht) bis zum 4. Monat herab wurden gelapptkernige Eiterzellen in der Paukenhöhle gefunden, die, wie aus dem Befunde zu erschließen war, der Schleimhaut entstammten. Freilich waren sie nicht in allen Fällen vorhanden und wo sie sich zeigten, waren ihrer nicht gleich viele, aber wo ihre Anzahl größer war, da fehlten auch nie Plattenepithelien mit großen ovalen oder geschrumpften Kernen, oder selbst ohne solche. Genau solche Zellen finden sich auch im Fruchtwasser vom 4.—5. Monat ab, deshalb nimmt A. an, daß Fruchtwasser beim Verschlucken in die Mittelohren dieser jungen Früchte gekommen ist.

Sonach ist die Eiterbildung im Ohr der Neugeborenen keine physiologische Erscheinung, denn sie findet sich nicht bei allen Früchten, vielmehr muß sie als die Folge einer oft schon frühzeitig (vom 4. Monat des Fruchtlebens an) stattfindenden Verun-

1) 9 im Original ist Druckfehler.

reinigung der Paukenhöhle mit Fruchtwasserbestandtheilen angesehen werden. Diese erreicht ihren höchsten Grad durch das Eindringen gröberer Massen von Vernix und Meconium und kann dann auch die stärkste Eiterbildung, ja eine vollständige Ausfüllung der Paukenhöhle mit Eiter zur Folge haben. Diejenigen Fälle, wo trotz Anwesenheit von Vernix und Meconium kein Eiter gefunden wurde, können so erklärt werden, daß das Eindringen erst kurz vor dem Tode stattfand, so daß zur Eiterabsonderung keine Zeit mehr war.

Was die Schleimhaut betrifft, so zeigt sie beim Neugeborenen eine verschieden starke zellige Infiltration, welche entsprechend der Stärke des Reizes, den die geringeren oder größeren Mengen von Fruchtwasserbestandtheilen, Vernix oder Meconium, ausüben, wächst, aber nie solche Grade erreicht, wie bei den schweren Fällen der infectiösen Otitis media. Wohl aber kann sie ganz das Bild einer leichten Entzündung darbieten, wenn dasselbe noch durch eine auf Erstickung zurückzuführende Hyperämie und Hämorrhagie vervollständigt wird.

Die Frage, ob es sich bei dem Eiterbefund im Ohre von Neugeborenen um einen infectiösen Prozeß handelt, beantwortet der Verf. dementsprechend dahin, daß es eine infectiöse Otitis media neonati nicht gibt, daß die gefundene Eiterung vielmehr nur eine Fremdkörpereiterung ist, die aber immerhin eine Disposition für bacterielle Infection geben mag.

In Bezug auf einige Nebenfragen wird noch bemerkt, daß die gröberen Mengen von Fruchtwasserbestandtheilen nicht wohl durch Schluckbewegungen, sondern nur durch intrauterine Athembewegungen in die Paukenhöhle gekommen sein können, wofür auch die häufige gleichzeitige Anwesenheit von Fruchtwasserbestandtheilen in den Lungen spricht. In gerichtsärztlicher Beziehung würde danach der Befund von gröberen Fruchtwasserbestandtheilen auf stattgehabte intrauterine Athmung schließen lassen, wenn eine Ertränkung in Fruchtwasser nach der Geburt auszuschließen ist. Luft in Mittelohr einer frischen Leiche beweist stattgehabte Athmung, doch gibt der Befund über die Länge des Lebens und die Dauer der Lungenathmung keine Anhaltspunkte. Insbesondere erlaubt die Weite der Höhle durchaus keinen Rückschluß auf eine vor oder nach der Geburt stattgehabte Athmung, da die bereits intrauterin beginnende Rückbildung des fötalen Gallertgewebes der Paukenhöhle nach uns unbekannten Wachsthumsgesetzen, aber jedenfalls nicht in Folge grobmechanischer Einflüsse geschieht.

Bei den Untersuchungen über die Otitis war dem Verf. aufgefallen, daß sowohl in Gewebszellen der Paukenhöhlenschleimhaut wie in gelapptkernigen Leukocyten in der Schleimhaut sowohl als auch innerhalb der Blutgefäße feinkörniges Fett vorhanden war. Dies veranlaßte ihn eine genauere Untersuchung der fötalen Gewebe auf ihren Fettgehalt vorzunehmen (Aschoff, über den Fettgehalt fötaler Gewebe, Verhdl. d. Ges. D. Naturforsch. u. Aerzte, 69. Vers. zu Braunschweig, II, 2, S. 17). An Flemming-Praeparaten konnte feinkörniges Fett in den Epithelzellen der Nieren und Leber wie im Herzmuskel nachgewiesen werden entsprechend den Angaben früherer Untersucher, außerdem aber auch in den basalen Epithelzellen der Haut, in Bindegewebszellen der Haut und der großen Drüsen, in den Epithelien des Darms, im Bindegewebsgerüst der Zotten, in den glatten Muskeln des Darms und der Gefäße. Zu diesen Fettablagerungen gehören wohl auch die so äußerst reichlichen Fetttröpfchenbildungen in den Gliazellen des Centralnervensystems; vereinzelt fanden sich Fettkörnchen auch in den Ependym- und Ganglienzellen. Am regelmäßigsten ist aber der Befund bei den weißen Blutkörperchen: fast sämmtliche gelapptkernigen (nicht aber die rundkernigen) Leukocyten enthalten vereinzelte oder auch zahlreichere Fetttröpfen. Schon bei einem Fötus von 25 cm Länge konnten solche Fettkörnchen in geringer Zahl nachgewiesen werden; bei einem Mäuseembryo fanden sie sich sehr reichlich im Herzmuskel. Aus allem erschließt der Verf., daß diese Fettbildung eine physiologische ist. Für den naheliegenden Gedanken, daß die Leukocyten die Fetttröpfchen in der Placenta aus dem fettreichen Syncytium aufgenommen hätten, ließ sich ein Beweis nicht erbringen. —

Vor kurzem hat Herr Dr. Aschoff eine kurze Uebersichtstabelle zur Geschichte der Medicin, die zunächst nur als Manuskript gedruckt war, in den Buchhandel gegeben. Sie wird Manchem zur schnellen Orientirung sehr erwünscht sein.

Schon in meinem 3. Bericht (diese Nachrichten 1896 Hft. 3) habe ich von Untersuchungen Mittheilung gemacht, welche mein damaliger Assistent Herr Dr. Ophüls über die Bildung zapfenförmiger Fortsätze des Kleinhirns in den Wirbelkanal im Anschluß an eine Veröffentlichung Chiari's gemacht hatte. Ich schloß meinen damaligen Bericht mit der Bemerkung, daß zapfenartige Verlängerung besonders der Tonsillen des Kleinhirns wenigstens andeutungsweise auch bei unverändertem Gehirn vorkommt, vielleicht in bestimmtem Zusammenhang mit besonderer

Gestaltung der Schädelbasis, worüber Herr Ophüls später Weiteres berichten wird.

Diese ausführlichere Mittheilung ist nunmehr in Virchow's Archiv, Bd. 151, nebst 2 Tafeln Abbildungen erschienen. Ophüls weist nach, daß für die Gestaltung der Unterfläche des kleinen Gehirns von maßgebender Bedeutung ist der Raum, welcher sich lateral und dorsal zwischen Medulla und der Wand des oberen Theils des Wirbelkanals befindet, der nicht nur bei verschiedenen Menschen an Größe wechselt, sondern auch bei demselben Menschen eine asymmetrische Ausbildung zu besitzen pflegt. Durch Ausgießen dieses Hohlraums mit Paraffin vor der Schädeleröffnung in Verbindung mit Gipsausgüssen des Wirbelkanaleingangs nach der Herausnahme des Gehirns und des verlängerten Marks suchte der Verf. sich eine körperliche Anschauung dieses Raumes zu verschaffen.

Die Gestaltung des Anfangstheils des Wirbelkanals ist bedingt durch die (genauer auseinandergesetzten) Verhältnisse der Dura und der Knochen, insbesondere auch durch einen Knochenwall, der oft leistenartig vorragt und seitlich von dem großen Hinterhauptsloch an der Innenseite des Hinterhauptbeins von hinten innen nach vorn außen verläuft. Derselbe entspringt vom unteren Ende der Crista occipitalis interna und begleitet den seitlichen Rand des Hinterhauptsloches etwa bis zu seiner Mitte. Dieser Knochenwall und nicht etwa das Tuberculum jugulare bewirkt die als Impressio jugularis bekannte Furche, welche diejenigen Kleinhirntheile, welche über dem am Eingang in den Wirbelkanal liegenden, vorher erwähnten Hohlraum liegen (manchmal nur die Tonsille, gewöhnlich aber auch der innere Theil des lobus posterior inferior), von den übrigen Abschnitten des Kleinhirns sondert. Da diese Theile schon regelmäßiger Weise etwas in den oberen Abschnitt des Wirbelkanals hineinhängen, so stellen also die Zapfenbildungen, bei denen dieselben Theile noch weiter nach unten treten, nicht etwas durchaus von den normalen Verhältnissen Verschiedenes dar, sondern nur eine Modification der Norm. In der That kann man auch häufig genug Fälle finden, wo es schwer zu entscheiden ist, ob man noch normale Verhältnisse vor sich hat oder ob man schon von einer Zapfenbildung sprechen soll.

Besonders deutlich tritt die Abhängigkeit der Zapfenbildung von der Gestaltung der Umgebung des Hinterhauptloches an einem neuerlich beobachteten Falle hervor, bei welchem eine Asymmetrie des Hinterhauptsloches bestand und ein großer Fortsatz nur auf

der rechten, der größeren Hälfte des Loches entsprechenden Seite bestand. In diesem Falle fehlte jede Spur von Hydrocephalus, dagegen waren große alte Hämatome der Dura mater der Convexität auf beiden Seiten vorhanden. Es lag also auch hier eine Erhöhung des Binnendrucks in der Schädelhöhle vor, die, von seltenen Ausnahmen, wo vielleicht bei besonders günstigen Verhältnissen am Eingang in den Wirbelkanal auch ohne besonders auffallende Druckwirkung eine Zapfenbildung entstehen kann, abgesehen, für die Entstehung der größeren Fortsätze nothwendig ist. Sie allein genügt allerdings nicht, wie die tägliche Erfahrung und besonders auch die Beobachtung Chiari's, daß selbst bei hochgradigem Hydrocephalus congenitus häufig keine Zapfenbildung vorhanden war, beweisen.

So kommt also Ophüls zu dem Schluß, daß die Entstehung der zapfenförmigen Fortsätze an der unteren Fläche des Kleinhirns bedingt wird durch das Zusammentreffen von Steigerung des intracraniellen Drucks einer- und einer besonderen Weite des Eingangs in den Wirbelkanal andererseits. Entstehen dieselben beim Erwachsenen, so handelt es sich sicherlich um eine rein passive Verdrängung der betreffenden Theile aus der Schädelhöhle in den Wirbelkanal, während bei der Entstehung in der Periode des Gehirnwachsthums neben der passiven Verdrängung wohl auch ein aktives Hineinwachsen der betreffenden Theile in den Wirbelkanal, wie solches Chiari für seine Fälle angenommen hat, statthaben kann. Ja man muß vielleicht auch noch an die Möglichkeit denken, daß, wenn erst bei einem noch wachsenden Individuum eine Zapfenbildung vorhanden ist, durch dieselbe ein stärkeres Wachsthum der begrenzenden Knochenwand angeregt wird, wodurch dann wieder die Möglichkeit einer Vergrößerung des Zapfens gegeben wäre. So würde sich das relativ häufige Vorkommen von großen Fortsätzen beim congenitalen Hydrocephalus erklären lassen.

Nachdem so die große Bedeutung der Weite des Foramen magnum für die Gestalt der Unterfläche des Kleinhirns festgestellt war, ging Verf. noch durch Messung von 150 Schädeln der Frage nach, ob sich ein Zusammenhang zwischen der Gestaltung des Hinterhauptloches und derjenigen des Schädeldaches nachweisen ließe. Aus der mitgetheilten Tabelle ergiebt sich, daß entsprechend der alten Angabe Virchow's, daß unter allen Theilen des Schädelgerüstes der Grund und zwar vornehmlich der Wirbelkörper des Grundbeines die größte Selbständigkeit der Entwicklung und des Wachsthums besitzen, ein solcher regelmäßiger Zu-

sammenhang nicht besteht, so daß man also aus der äußeren Betrachtung des Schädels keinen unmittelbaren Schluß auf die Größe des Hinterhauptsloches machen und demnach auch bei vorhandener Druckerhöhung im Schädel für die wahrscheinliche An- oder Abwesenheit von zapfenförmigen Fortsätzen einen Anhaltspunkt nicht gewinnen kann.

Es folgt der Bericht über 4 Dissertationsarbeiten.

Herr Wiebrecht, Ueber die Ectasien des Oesophagus, 1897, beschreibt einige neue Fälle von selteneren Formen der Erweiterung der Speiseröhre, 2 von allgemeiner Erweiterung, einen von ungewöhnlich starker Ausdehnung des oberhalb einer Verengerung gelegenen Abschnittes.

1. 18 jähr. Mann, klagt seit Jahren über Brechbewegungen, äußerst abgemagert; die Sondirung ergab keinen Anhaltspunkt für Stenose oder Spasmus. Bei der Sektion fand sich der Oesophagus vom unteren Rande der Cartilago cricoidea bis zur Cardia 26 cm lang; sein Umfang betrug am Eingang 3,6 cm, in einer Entfernung von der cart. cric. von 4,5 cm = 7,5 cm, von 9—11 cm = 5 cm, von 13 cm = 6 cm, von 19,5 cm = 6,5 cm, von 26 cm = 2,8 cm, die Röhre war also am Eingang und Ausgang wohl etwas enger als normal, ohne stenotisch zu sein, im übrigen erweitert, aber nicht wie gewöhnlich in solchen Fällen einfach spindelförmig, sondern doppelt; die obere Erweiterung war die stärkste, die verhältnismäßig enge Stelle zwischen beiden Ausbuchtungen hatte immer noch 5 cm Umfang war also auch noch erweitert. Die Muskulatur der Speiseröhre hatte eine Dicke bis zu 2 mm, war also hypertrophisch. Mikroskopisch fanden sich geringe Entzündungserscheinungen, besonders in dem unteren Abschnitt, fast gar nicht in der stärkeren oberen Ausbuchtung, keine degenerativen Veränderungen an der Muskulatur. Von sonstigen Befunden ist noch bemerkenswerth ein schmaler, senkrecht gestellter Magen, kleines Herz und enge arterielle Gefäße, Blutungen in die Darmhöhle.

2. Altes Präparat der früher Braunschweiger Sammlung, welches, soweit festgestellt werden konnte, noch nicht beschrieben ist. Einfache spindelförmige Ausbuchtung, welche 20 cm unterhalb des Ringknorpels mit 15,5 cm ihre größte Ausdehnung erreicht, 3 cm oberhalb der Cardia noch 12,5 cm beträgt, während der Umfang der Röhre an der Cardia selbst 3,5 cm mißt. Die Muskelschicht ist oben 2, in der Mitte 2,5, unten fast 3 cm dick. Es fanden sich keine Narbenverengerung am unteren Ende, keine

wesentlichen entzündlichen Veränderungen, keine Degeneration der Muskeln.

Verfasser kommt zu dem Schluß, daß wegen des Fehlens aller sonstigen Ursachen, wegen der Muskelverdickung und im 1. Falle auch wegen der senkrechten Stellung des Magens, nur die Annahme einer congenitalen Entwicklungsstörung übrig bleibe.

Der 3. Fall betraf einen Mann, welcher eine krebsige Verengerung am Anfang des unteren Drittels der Speiseröhre trug, deren oberer Abschnitt bis zu einem Umfang von 12 cm erweitert war, bei 2,5 cm Muskeldicke. Die stärkste Ausbuchtung befand sich unterhalb der Mitte des erweiterten Theiles, die Muskulatur war nicht entartet. Es bestand eine Phlegmone des Oesophagus und des umgebenden Bindegewebes bis um die Trachea und großen Bronchien herum, mit mehrfachen Oeffnungen an der Oesophagusschleimhaut, Gangrän der Pleura, Pleuritis. Der Krebs war außerdem in den linken Vorhof bis gegen das Endocard hin eingewachsen.

Im Hinblick auf die vorhandene Perforation der Speiseröhre wird noch ein Fall von secundärer Perforation (mit mehreren kleinen Oeffnungen) eines prävertebralen, vermuthlich tuberkulösen Abscesses in den Oesophagus eines Kindes mitgetheilt, bei dem in der Umgebung der Durchbruchstellen weder Tuberkel noch Bacillen gefunden werden konnten. —

Herr W. Bensen hat Beiträge zur Kenntniß von den heteroplastischen Knochenbildungen, Diss. 1898, geliefert, indem er eine Beschreibung gab von je einem Fall von Knochenbildung 1) in der Pia mater cerebralis, 2) in der P. m. spinalis, 3) in Schlagadern der Unterschenkel bei Diabetes mit Gangrän infolge von Arterienverschluß, 4) in der Luftröhre bei Aortenaneurysma, 5) in der Luftröhre bei chronischer Entzündung, 6) in der Lunge um einen Lungenstein herum.

1. und 2. Im ersten Fall fand sich eine größere oberflächliche Knochenplatte, an welcher eine über halbkugelige spongiöse Knochenmasse sich ansetzte, welche in der Pia lag, aber deren Gewebe nicht zur Seite gedrängt, sondern einfach ersetzt hatte. Auch im zweiten Falle bestanden die sog. Knochenplättchen aus spongiösem Gewebe, welches an Stelle von Pia-gewebe getreten war. In keinem der beiden Fälle fand Verf. irgendwo in der Pia Knorpel, sondern Bilder, welche auf eine direkte Verknöcherung des Bindegewebes hinwiesen, nur in dem 2. Falle waren an der Oberfläche von Knochenbälkchen stellenweise Osteoblasten zu sehen.

3. Es bestand eine ausgedehnte produktive Arteriitis der

Arterien des Unterschenkels. Knochen fand sich in mehreren Stücken in der Media eines ganz verschlossenen Gefäßes, fehlte aber in einem dicht daneben liegenden, noch etwas durchgängigen. Stets schloß sich der Knochen an verkalkte Stellen an, deren beide Pole (sie waren im Sinne der Querschnittsbegrenzung länglich gestaltet) er kappenartig umgab oder die er wohl auch ringförmig umhüllte. Nirgendwo zeigten sich als Osteoblasten zu deutende Zellen, wohl aber an einer Stelle zwischen dem ringförmigen Knochen und dem Kalk vielkernige Riesenzellen.

4. Das Aneurysma war gegen die Luftröhre vorgedrungen und hatte an der untersuchten Stelle den Knorpelring so stark zerstört, daß derselbe stellenweise nur die halbe normale Dicke besaß. Grade hier zeigten sich an der äußeren Seite schmale Knochenspangen, welche aber nirgends mit dem Knorpel genetisch zusammenhingen, meistens sogar durch eine schmale Schicht von Granulationsgewebe von ihm getrennt waren. Außerdem wurde aber auch jenseits d. h. nach innen vom Knorpel Knochen gefunden, der ebenfalls unabhängig vom Knorpel war und bei dessen Bildung das Aneurysma nicht direkt mitgewirkt haben konnte. Nirgends fand sich vorgängige Verkalkung, nirgends Osteoblasten, sondern alle Bilder wiesen auf direkte Bindegewebsverknöcherung hin.

5. Ein 80 jähriger Mann, der an einem Herzfehler nebst Folgen gelitten hatte und schließlich an einer frischen Lungenentzündung zu Grunde gegangen war, ergab folgenden Befund an der Luftröhre: dieselbe zeigte eine sehr unebene Innenfläche, zum Theil bedingt durch zahlreiche kleinste, an den Trachealringen (anscheinend!) entspringende harte Höckerchen, zum Theil auch durch narbenartig verstrickte vorspringende Schleimhautleisten, zwischen denen die Schleimhaut grubenartig vertieft war. Mikroskopisch zeigten sich ausgedehnte Knochenspangen in der Schleimhaut und Submucosa, auch einzelne Knorpelherdchen daselbst sowie vereinzelte Knorpelauswüchse an den Trachealringen. Es lag nahe, an eine engere Beziehung der Knochenspangen zu Ecchondrosen zu denken, aber es waren solche nicht nachzuweisen, vielmehr mußte eine unabhängige Bildung derselben aus Bindegewebe angenommen werden. Auch hier waren keine Osteoblasten vorhanden, keine vorgängige Verkalkung, während im Innern der Trachealknorpel stellenweise nach vorausgegangener Verkalkung Knochen sich gebildet hatte. Ursächliches konnte nicht festgestellt werden.

6. Ein kleiner Kalkstein aus der Lunge war von Knochen-

spangen umgeben, die theils unmittelbar der Kalkmasse anlagen, so daß keine scharfe Grenze zwischen ihnen wahrnehmbar war, theils einzelne Ringe bildend in das umgebende Lungengewebe hineinragten. Osteoblasten konnten nicht gefunden werden.

Also nur in 1 Fall wurden neben deutlich auf Bindegewebsbildung hinweisenden Bildern Osteoblasten gesehen, in 2 Fällen hatte sich die Knochenbildung zu Kalkablagerung hinzugesellt, sonst war unabhängig von solcher eine Knochenbildung aus Bindegewebe vorhanden. —

Die Grundlage der Dissertation des Herrn M. Sauer, Ueber compensatorische Hypertrophie des Nierenparenchyms bei Hydronephrose durch spitzwinkeligen Abgang des Ureters, 1898, bilden einige Fälle von lange bestehender intermittirender Hydronephrose.

In dem 1. Falle war einem 24 jährigen Mädchen die linke hydronephrotische Niere entfernt worden, nachdem schon seit dem 8. Jahre anfallsweise Schmerzen und Druckgefühl in der Nierengegend beobachtet worden waren. Nach dem Aufhören der Schmerzen war jedesmal eine sehr erhebliche Vermehrung der Harnabgabe eingetreten. Zuletzt bestanden seit 5 Wochen anhaltende Schmerzen und eine äußerlich bemerkbare Anschwellung in der Gegend der linken Niere. Urin immer klar, keine Steine. Bei der Operation wurde eine starke Senkung der Niere festgestellt.

An der stark hydronephrotisch veränderten Niere ist die sehr ungleichmäßige Dicke des Parenchyms auffallend; an der dünnsten Stelle nur 4 mm messend, beträgt sie an anderen 8—10—15—20—25 mm. Nirgends ist makroskopisch Mark und Rinde deutlich von einander zu unterscheiden, wohl aber mikroskopisch an den dickeren Stellen. An den dünnern Abschnitten zeigt sich starke Schrumpfung, an den dickeren auch schon zellige Infiltration des Zwischengewebes. Während dort die Malp. Körperchen im Mittel 171 μ Durchmesser haben, messen sie hier im Mittel 185 μ mit dem Maximum von 232 μ; die Kanälchen haben Durchmesser von 61 bzw. 75 μ.

Im 2. Falle waren beide Nieren verändert und bei der Section des 26 jährigen Mannes gewonnen worden. Schon als Kind angeblich nierenleidend trat er zuerst 1895 in Behandlung wegen Nierenkolik und Blutharnen, nachdem wiederholt derartige Anfälle vorausgegangen waren. Damals wurde eine faustgroße Geschwulst in der rechten Nierengegend festgestellt, die nach einigen Tagen unter Auftreten von Blutharn verschwand. In der Folgezeit wiederholt heftige Kolikanfälle mit und ohne Blutab-

gang, Erscheinungen von umschriebener Bauchfellentzündung in der Blinddarmgegend, Ascites, der bei 2 maliger Punktion das erste Mal 13 l klarer wässeriger Flüssigkeit, das zweite Mal stark blutiges Exsudat ergab. Nach einigen Tagen trat der Tod ein. Es fanden sich bei der Obduktion außer alten Verwachsungen blutige Auflagerungen und Cruormassen in der Bauchhöhle, eine große mit blutig gefärbter Flüssigkeit und sulzigen, vielfach netzförmig angeordneten Massen erfüllte Höhle hinter dem rechten Leberlappen, der ausgehöhlt und nach links verdrängt war. In diese Höhle mündete mit einer mehrere mm weiten Oeffnung das stark hydronephrotisch ausgedehnte rechte Nierenbecken. Auch die linke Niere war hydronephrotisch, obwohl sich seitens derselben bei Lebzeiten niemals Erscheinungen davon kundgegeben hatten.

Am stärksten verändert zeigte sich die rechte Niere. Auch bei ihr fiel wie bei derjenigen des vorigen Falles die ungleichmäßige Dicke des vorhandenen Nierengewebes auf, welches stellenweise förmliche Knollen bildete, die von außen fast wie Geschwülste sich anfühlten. Hier wurden Dickendurchmesser von 1,5; 2; 2,5; 3—4 cm gemessen, während die dünnste Stelle bloß 2 mm dick war. Marksubstanz ist an den dicksten Stellen auch makroskopisch sehr deutlich zu erkennen, selbst noch, wenn auch abgeflachte, Papillen. Mikroskopisch erwiesen sich an den dicksten Stellen die Malp. Körperchen 228—247 μ breit, die Rindenkanälchen 76 μ; die graden 45—53 μ, das Epithel der gewundenen Kanäle 7—11 μ hoch, die Kerne gut färbbar, im übrigen war nur eine geringe Verbreiterung des Zwischengewebes vorhanden, in dem hie und da ein paar kleine Blutungen bemerkt wurden. An Stellen mittlerer Dicke des Gewebes ergaben die Malp. Körperchen 152 μ im Mittel, es waren schon deutliche Schrumpfungserscheinungen am Gewebe vorhanden, die um so stärker waren, je geringer der Durchmesser des Gewebes. Links zeigten sich ähnliche Verhältnisse, nur war sowohl die ganze Niere kleiner, wie auch der Durchschnittsdurchmesser des Gewebes, der 3 cm nicht überschritt.

Im 3. Falle handelte es sich um eine einseitige Hydronephrose mit ungleichmäßigem Verhalten des Parenchyms, dessen Dickendurchmesser 0,1—0,2 cm und 1,7—1,8 cm betrugen. Mikroskopisch traten überall die Zeichen interstitieller und parenchymatöser Veränderungen hervor, die Malp. Körperchen waren 133—152 μ breit, während sie in der anderen Niere 171—201 μ maßen, mit dem Maximum von 266 μ.

Danach ist in Fall 1 und 2 der Durchmesser der Malp. Kör-

perchen in den knolligen dickeren Stellen vergrößert, desgleichen derjenige der Kanälchen, im Fall 3 nicht in der hydronephrotischen, wohl aber in der anderen, die als secundär hypertrophisch zu betrachten ist.

Bei der Beurtheilung der Beobachtungen ist davon auszugehen, daß es sich, wenigstens in den beiden ersten Fällen, um eine schon in frühester Kindheit hervorgetretene intermittirende Hydronephrose im Anschluß an einen spitzwinkeligen Abgang des Ureters handelt, die danach also als eine angeborene zu betrachten ist. Es wechselten Zeiten von Harnstauung mit längeren Perioden, wo keine Störungen hervortraten, ab. Sonach war die Möglichkeit gegeben, daß die durch die Stauung weniger geschädigten Theile sich wieder erholten, ja es konnte schließlich sogar zu einer über die Norm hinausgehenden Vergrößerung der Malp. Körperchen wie der Harnkanälchen kommen, zu einer wirklichen partiellen compensatorischen Hypertrophie, wodurch diese Abschnitte förmlich wie Geschwülste aus ihrer atrophischen Umgebung heraustraten. Es schließen sich also diese Fälle an die schon länger bekannten von partieller compensatorischer Hypertrophie in chronisch entzündeten und ungleichmäßig geschrumpften Nieren an; einen den hier beschriebenen einigermaßen ähnlichen Fall hat Verf. nur in einer Marburger Dissertation von Willecke (1890) erwähnt gefunden, es fehlen aber bei demselben mikrometrische Messungen.

Schon vor Jahren hatte ich eine Reihe von Experimenten begonnen, um festzustellen, in wie weit sich mikroskopisch Neubildungsvorgänge am Nierengewebe nachweisen ließen, wenn eine Harnstauung wieder verschwindet. Ich hatte festgestellt, daß unter solchen Verhältnissen wohl Mitosen an Kanalepithelien sowohl im Mark wie in der Rinde vorkommen, aber zu genaueren Resultaten war ich nicht gekommen. Ich habe diese Versuche durch den Verf. wieder aufnehmen lassen, aber derselbe mußte sich aus äußeren Gründen auch damit begnügen, Aehnliches festgestellt zu haben. Besonders bei einem Kaninchen, welchem eine durch Unterbindung des Ureters entstandene Hydronephrose von 221 tägiger Dauer mittelst Anlegung einer Ureterfistel beseitigt wurde, fanden sich 11 Tage nach der Wiedereröffnung des Harnleiters eine Anzahl von Kerntheilungsfiguren an Epithelzellen, besonders der Marksubstanz. Bradford hat nach einer kurzen Angabe in dem Brit. med. Journal vom 11. XII. 97 bei Hunden bessere Resultate erzielt, doch fehlten in der Mittheilung genauere Angaben über den mikroskopischen Befund. —

Ein zur Sektion gekommener Fall von Morbus Addisonii mit seltenerem Befund gab den Anstoß zu der Dissertationsarbeit des Herrn E. Baucke, Ein Beitrag zur Pathologie der Nebennieren mit besonderer Berücksichtigung des Morbus Addisonii. Es sind, außer den von mir in den Arbeiten aus dem path. Inst., Festschr. f. Virchow, 1893 schon veröffentlichten, 53 Fälle von Nebennierenerkrankungen aus den Institutsprotokollen berücksichtigt worden, 20 Fälle von Tuberkulose, 20 von Geschwulstbildung, 5 von Blutungen, 4 von Atrophie, 2 von Amyloid, je 1 mit Abscess und mit Cyste. Der Verf. hat eine Anzahl dieser Fälle selbst untersucht und darüber Bericht erstattet. Unter den 20 Tuberkulosefällen war bei der Hälfte eine doppelseitige Veränderung vorhanden, 7 mal mit totaler Zerstörung der beiden Nebennieren, aber nur 1 mal war klinisch Morb. Add. diagnosticirt worden. Die 10 einseitigen Tuberkulosen betrafen ohne Ausnahme die rechte Seite. Unter 20 Geschwulstfällen, war in 4 Fällen einseitige Strumabildung, 1 mal ein maligner primärer Tumor (Betheiligung beider Nebennieren) vorhanden, ferner 5 doppelseitige (2 mit totaler Zerstörung der Nieren) und 7 einseitige metastatische Krebse, 1 einseitiges secundäres Sarkom, 1 doppelseitiges sec. Lymphom (von retroperitonealen Lymphdrüsen ausgegangen), 1 Tumor ohne nähere Bestimmung. Blutungen (5) saßen 3 mal einseitig, 2 mal doppelseitig, und in 1 der letzten Fälle hatten sie einen hämatomartigen Charakter. Dabei war Blutung in dem Organ wie um dasselbe herum, die Centralvene und ihre Aeste enthielten Thromben. Von den 4 Atrophien waren 2 Hypoplasien, von denen 1 einen Acranius, 1 eine Herzmißbildung mit kleinen Nebennieren und auffällig kleinem Thymus betrafen, einmal handelte es sich um einseitige Druckatrophie durch einen secundären gegen die linke Nebenniere vorgewachsenen Sarcomknoten, einmal um eine doppelseitige Atrophie bei Morb. Addisonii mit Bronzehaut. In diesem Falle waren die übrigen Sectionsbefunde durchaus nebensächlicher Art, an den Nebennieren betraf die Atrophie wesentlich die Rinde, welche an mehreren Stellen so völlig verschwunden war, daß die Marksubstanz an der Oberfläche frei vorlag. Mikroskopisch fand sich als bemerkenswerth eine fleckweise kleinzellige Infiltration. An den Splanchnici konnten keine pathologischen Veränderungen entdeckt werden, dagegen fanden sich in dem linken Gangl. coeliacum einzelne knötchenförmige Gebilde mit centraler Riesenzelle, die nur als Tuberkel gedeutet werden konnten, wenn auch sonst im Körper nur noch geringe Schrumpfung in den Lungenspitzen, die mög-

licherweise auf geheilte Tuberkulose zu beziehen sein könnte, gefunden worden war.

Bei der Verarbeitung seiner Fälle für die Pathologie des Morb. Addisonii weist der Verf., nachdem er festgestellt, daß die Bronzehaut kein nothwendiges Symptom sei, zunächst darauf hin, daß in denjenigen Fällen, wo anscheinend bei doppelseitiger schwerer Nebennierenveränderung kein Morb. Addis. vorhanden war, die schweren sonstigen Organerkrankungen die richtige Auffassung der Krankheitssymptome hinderten. Durch Vergleich der Sektionsbefunde und Krankengeschichten gelangt er bei 4 Fällen von Tuberkulose und 2 von Krebs zu dem Resultat, daß in der That, wenn auch die Bronzefärbung ganz fehlte oder nur angedeutet war, doch die übrigen Erscheinungen des M. A. (nervöse Symptome, Anämie, Adynamie, Störungen seitens des Verdauungskanals) vorhanden waren, so daß also doch Morb. Add. nicht fehlte.

Weiter werden 3 Fälle mitgetheilt, bei welchen im Anschluß an Operationen der Tod in unerwarteter Weise schnell eintrat, wofür eine sonstige zureichende Erklärung als bestehender Morb. Addis. fehlte; in allen waren beide Nebennieren schwer erkrankt, 2 mal an Tuberkulose, 1 mal an Krebs.

In denjenigen Fällen, wo wirklich die Erscheinungen des Morb. Addis. fehlen trotz Erkrankung der Nieren kann das davon abhängen, daß doch noch functionirendes Gewebe in genügender Menge vorhanden ist, wofür 3 Fälle angeführt werden, bei welchen noch erhaltenes Nebennierenparenchym nachgewiesen werden konnte, und ein 4. Fall von primärer Nebennierengeschwulst, für den man die Erklärung geben könnte, daß Geschwulstzellen noch imstande waren die Funktion ihrer Mutterzellen auszuüben.

Verf. faßt schließlich seine Betrachtungen in folgende Sätze zusammen: 1. Die Bronzefärbung ist zwar ein Symptom von großer diagnostischer Bedeutung bei M. A., kann aber als ein integrirender Bestandtheil des Krankheitsbildes nicht angesehen werden. 2. Die zur Erklärung der Symptome der Addison-Krankheit aufgestellte Sympathikustheorie erweist sich als nicht ausreichend. 3. Die Nebennierenerkrankung ruft in allen Fällen, in denen die Funktion dieser Organe aufgehoben ist, Addison'sche Symptome hervor und umgekehrt kann typischer Morb. Add. nur hervorgerufen werden, wenn die Funktion der Nebennieren gestört bezw. gehemmt ist. 4. Nebennierenveränderung und Bronzefärbung stehen nicht im einfachen Verhältniß von Ursache und Wirkung; die Pigmentation bei M. A. verdankt derselben Ursache ihren Ursprung, wie die sonstigen pathologischen und physiologischen Haut-

verfärbungen, nämlich einer Innervationsstörung im Bereich des Sympathicus. 5. Bei Atrophie der Nebennieren mit Morb. Addis., welche durch einen primären pathologischen Prozeß im sympathischen Nervensystem hervorgerufen wird, muß stets Bronzefärbung auftreten.

Die klimatologischen Elemente Göttingens in den Jahren 1887—96.

Nach dem Beobachtungsmaterial des Kgl. Preuß. meteorol. Instituts, Station II. Ordnung Göttingen, bearbeitet

von

G. Kümmell.

Mit XII Tabellen und 4 Tafeln.

Vorgelegt von Eduard Riecke in der Sitzung vom 14. Mai 1898.

Ueber das Göttinger Klima giebt es außer verschiedenen kleinen Abhandlungen, die zum Teil bis in das vorige Jahrhundert zurückgehen, eine größere Arbeit von Hugo Meyer[1]), betitelt: „Ueber die Witterungsverhältnisse Göttingens". In dieser Abhandlung hat der Verfasser auf Grund der 25 jährigen Periode 1857—81 die meisten Mittelwerte abgeleitet, sodaß hier wenig zu thun übrig bleibt. Wenn ich trotzdem im folgenden den Versuch mache, die Mittelwerte aus der 10 jährigen Periode 1887/96 nochmals abzuleiten, so geschieht dies nur in der Absicht, um im Vergleich mit der obengenannten Arbeit zu zeigen, in wie fern sich in diesem Zeitraum die Normalelemente verändert haben. Es wäre vielleicht besser gewesen, die Untersuchung zeitlich gleich an die Arbeit Meyers anzuschließen, da aber die Jahre 1881—86 öfters Lücken enthalten, beschränke ich mich auf die lückenlose Periode der letzten 10 Jahre.

Meine Untersuchung erstreckt sich auf Luftdruck und Winde, Temperatur, absolute und relative Feuchtigkeit, sowie Niederschläge, über die mir eine fortlaufende Beobachtungsreihe in den

---

1) Hugo Meyer, über die Witterungsverhältnisse Göttingens. Gött. Nachr. 1883 No. 11 u. 1886 No. 12.

Beobachtungen des kgl. preuß. meteor. Instituts zur Verfügung stand.

Meine Abhandlung habe ich genau nach dem Vorbild einer Untersuchung von Dr. Ziegler und Prof. König, über das Klima von Frankfurt a. M.[1]) verfaßt, deren Gedankengang sowie Einrichtung der Tabellen ich mir zum Muster zu nehmen erlaubte.

Aufstellung der Apparate.

Die Apparate sind im physikalischen Institut d. U. aufgestellt, dessen Lage 51° 32′ n. Br. und 9° 56′ E. L. v. Gr. ist, in einer Höhe von 150 m über dem Spiegel der Nordsee.

Als Barometer kam in den ersten Jahren ein Heberbarometer von Greiner sen. u. Sohn, Berlin, zur Verwendung, am 1. September 1890 wurde es jedoch durch ein Gefäßbarometer von Fueß, Berlin, ersetzt. Der Aufstellungsort blieb der gleiche, in einem Zimmer des 1. Stockes, 149,8 m über Normalnull.

Von Thermometern wurden benutzt, anfangs trockenes und feuchtes von Greiner jun. Berlin, in Réaumur-Grade geteilt, ein Maximum-Thermometer von Fueß, Berlin, in Celsius-Graden, sowie ein Minimumthermometer unbekannter Herkunft, auch in Réaumur-Grade geteilt. Am 1. December 1887 wurden sämmtliche in Réaumur-Grade geteilte Thermometer durch hundertteilige aus der Werkstätte von Fueß, Berlin, ersetzt. Alle diese Instrumente waren aufgestellt außen an der Nordseite des ersten Stockwerkes, durch Bretter- und Blechschutzwände gegen Regen und Sonnenstrahlung geschützt, 7 m über dem Erdboden. Nachdem am 15. Juni 1890 im Garten des physik. Instituts eine englische Thermometerhütte, 1.82 m über dem Erdboden, fertig gestellt war, wurde dieselbe mit 4 neuen Thermometern, trockenem und feuchtem, Maximum- und Minimum-Thermometer von Fueß Berlin, ausgestattet, welche Instrumente noch heute abgelesen werden.

Zur Bestimmung der relativen Feuchtigkeit wurde auch noch ein Haar-Hygrometer von Usteri-Reinacher, Zürich, beobachtet.

Die Messung der Niederschlagsmenge geschah bis zum 1. December 1887 mit einem Regenmesser von unbekannter Herkunft von 0.16 □m Auffangfläche, der 1.85 m über dem Erdboden aufgestellt war. Dann wurde er durch einen Regenmesser von Krönings Söhne, Magdeburg, ersetzt, der 1/20 □m Auffangfläche

---

1) Dr. Julius Ziegler und Prof. Dr. Walter König, das Klima von Frankfurt a. M. Frankfurt a. M., C. Naumann's Druckerei 1896.

hatte und 1.3 m über dem Erdboden stand. Dieser war bis zum 1. Juli 1891 in Gebrauch, von da an wurden die Messungen mit einem Regenmesser, System Hellmann, mit 1/50 □m Auffangfläche ausgeführt, der seine Aufstellung 1 m über dem Erdboden hatte.

Die Windrichtungen wurden an einer Windfahne auf dem Dache des phys. Instituts beobachtet. Es ist dies kein besonders günstiger Aufstellungspunkt zu nennen, in sofern als das Dach des im Süden gegenüberliegenden Bibliotheksgebäudes ein wenig höher ist, sodaß also der freie Zutritt des Südwindes gehemmt wird.

Alle Beobachtungen geschahen um 7 Uhr vormittags, um 2 Uhr nachmittags und um 9 Uhr abends; Beobachter waren Dr. Hugo Meyer bis zum 1. März 1890, von da an A. Spörhase, der Wärter des physik. Instituts.

Die Ergebnisse aus der Berechnung der Beobachtungszahlen habe ich in den beigelegten Tabellen zusammengestellt, ich will im folgenden kurz die einzelnen Resultate besprechen.

Luftdruck und Winde.

Das Jahresmittel des Luftdruckes berechnet sich zu 747.8 mm. Das Mittel für den Januar zu 749.6, für den Juli zu 747.0 mm. Meyer[1]) fand 747.7 für das Jahr, 748.9 für Januar, 748.1 für Juli. Diese Zahlen sind auf 0°, aber nicht auf Meeresniveau reduciert. Soll dies geschehen, so müssen wir zunächst die Mitteltemperatur kennen, während die Höhe über Normalnull = 149.8 m gegeben ist. Wir finden damit — die Mitteltemperaturen erwähne ich später — den Wert dieser Correction für das Jahr zu + 13.7, für Januar 14.2, für Juli 13.2 mm. Zu weiterem Vergleich ist noch die Reduction auf 45° D. u. Br. notwendig; diese Correction, die sogenannte Schwerecorrection beträgt für Göttingen + 0.4 mm, ohne erhebliche Verschiedenheit für Januar und Juli. Damit werden also die Mittelwerte des Luftdruckes:

Jahr 761.9 Januar 764.2 Juli 760.6.

Nach Ferrel[2]) berechnen sich die Werte für den Göttinger Parallelkreis:

Jahr 760.9 Januar 761.8 Juli 757.0.

Die Mittelwerte siud also für Göttingen für das

Jahr 1.0 für Januar 2.4 für Juli 1.6 mm

höher als dem des Parallelkreises entspricht.

---

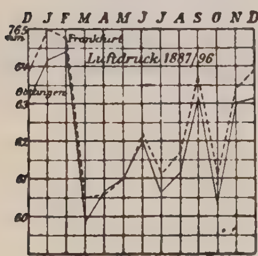
1) Meyer l. c.

2) Ferrel, Recent advances in meteorology, Washington 1886.

Die einzelnen Werte für den Luftdruck im Laufe des Jahres finden sich in Tabelle I und II. Tabelle I giebt die Uebersicht über den Gang des Luftdrucks von Pentade zu Pentade, die Tafel 1 stellt dies graphisch dar. Wir finden, daß die Curve einen ziemlich verwickelten Verlauf zeigt: Das Hauptmaximum fällt auf den 14.—19. Februar, ein zweites, kleineres, auf den 12.—17. September. Das niedrigste Minimum liegt vom 6.—16. März, zwei weitere von weniger ausgesprochenem Character im Mai und October. Am deutlichsten wird der große Absturz im Frühjahr, dem ein langsamer Aufstieg im Winter gegenüber steht.

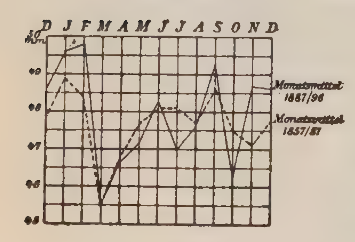
Die Monatsmittel sind berechnet in Tabelle II. Da ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Prof. König die Frankfurter Monatsmittel für denselben Zeitraum verdanke, will ich dieselben in beistehender Figur 1 graphisch mit denen von Göttingen zusammenstellen. Beide Zahlenreihen sind natürlich, um den Vergleich zu ermöglichen, auf Normalnull reducirt. Wie man sieht, verlaufen die Curven sehr nahe neben einander, in einem mittleren Abstand von 0.3 mm, während Ferrels Rechnung 0.2 mm verlangt.

Figur 1.



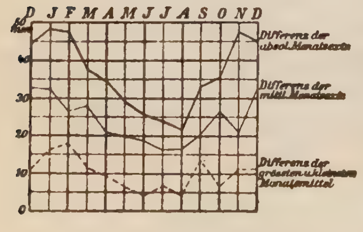
Einen Vergleich mit der älteren Beobachtungsperiode 1857/81 bietet Figur 2. Die Curven gehen zum Teil recht weit auseinander. Zusammen fallen nur die beiden Minima im März, die Maxima im Winter und im September haben ähnliche Lage. Offenbar war also in den letzten 10 Jahren die Luftdruckverteilung eine andere.

Figur 2.



Zur Darstellung der Größe der Luftdruckschwankung bilden wir die Differenzen der absoluten Monatsextreme, der mittleren Monatsextreme und der größten und kleinsten Monatsmittel. Figur 3 stellt den Verlauf graphisch dar. Sie zeigt die Luftdruckschwankung am größten im Winter, am kleinsten im Sommer. Die Ursache ist darin zu suchen, daß sowohl Cyclone, wie Anticyclone ihre tiefste, bezw. ihre höchste Ausbildung im Winter haben.

Figur 3.



Hervorheben will ich noch einige besonders auffallende Maxima und Minima:

768.6 mm	am 29. I. 96	768.5 mm	am 29. XII. 93
767.8 „	„ 20. XI. 90	767.7 „	„ 24. II. 87
719.8 „	„ 9. II. 89	720.3 „	„ 23. I. 90
720.5 „	„ 30. XII. 94.		

Wie man sieht fallen auch diese ausnahmslos in den Winter.

Die Windverhältnisse finden sich in Tabelle III berechnet, graphisch dargestellt in Form von Windrosen in Tafel 2. In diesen Zeichnungen bezeichnen die Längen der Strahlen die Häufigkeit der betreffenden Windrichtung, 1 % = ½ mm; der Radius des kleinen Kreises in der Mitte giebt die Häufigkeit der Windstillen im gleichen Maaß an. Ich konnte die Winde nur für die letzten 8 Jahre berechnen, da die Beobachtungen 1887/88 den offenbaren Stempel der Unzuverlässigkeit an sich trugen.

Betrachten wir die Tafel, und zwar die Windrose für das Jahr zuerst, so fällt vor allem die außerordentlich geringe Häufigkeit des Ostwindes auf, wie auch Süd-, West- und Nordwind weniger sich vorfinden, als die dazwischen liegenden Richtungen. Die geringe Häufigkeit des Ostwindes mag wohl ihren Grund in dem im Osten Göttingens vorgelagerten Hainberg haben, während den Südwind, wie schon erwähnt, das Dach des Bibliotheksgebäudes abhält. Für Nord und Westwind scheinen solch äußere Ursachen nicht vorzuliegen, wir müssen also wohl annehmen, daß sie für Göttingen in ihrer geringen Häufigkeit typisch sind. Was die anderen Winde anbetrifft, so überwiegt bei weitem der S.W.-Wind, der fast den 3. Teil aller Winde ausmacht.

Für die einzelnen Jahreszeiten verteilen sich die Winde so, daß im Winter, neben auch hier immerhin ziemlich häufigem S.W.Winde, die S.E.Winde die Oberhand haben, im Frühjahr ist die Häufigkeit der N.W- und S.W.Winde ziemlich gleich groß, im Sommer und Herbst herrschen entschieden S.W.Winde vor, während im Sommer an zweiter Stelle N.W.- und im Herbst S.E.Wind hervortritt.

Monatsweise betrachtet sehen wir, daß im Februar, März, Juli, August, September, October am häufigsten S.W.Winde wehen, im November und December S.E.Winde, im Januar S.E. und S.W. gleich häufig sind, während von April bis Juni N.W.Winde vorherrschen.

Ueber die Häufigkeit der Windstillen ist nur zu sagen, daß sie ein Maximum im März, ein Minimum im December zu haben scheinen.

Sturmtage kommen am häufigsten im Februar, am wenigsten im Juni vor.

Die Berechnung der Windstärke habe ich außer Betracht gelassen; dieselbe ist, da kein Anemometer vorhanden ist, zu sehr von der Individualität des Beobachters abhängig, als daß es lohnend erscheinen könnte, näher darauf einzugehen.

Lufttemperatur.

Die mittlere Temperatur berechnet sich aus dieser Periode zu + 8.21 für das Jahr, − 1.7° für den Januar, + 17.0 für den Juli, während Meyer für das Jahr 8.5, für den Januar − 0.1, für den Juli + 17.7 fand. Es ist auch hier möglich, einen Vergleich mit dem theoretischen Wert des Göttinger Parallelkreises anzustellen, wenn wir nach Hann berücksichtigen, daß die Temperatur mit 100 m abnimmt im Jahr um 0.58, Januar 0.33, Juli 0.71°. Damit werden die oben genannten Werte zu

Jahr + 9.05° Januar − 1.2° Juli 18.7°.

Nach Spitaler[1]) berechnen sich die Werte für den Göttinger Parallelkreis:

Jahr + 4.6° Januar − 8.3° Juli 17.4°.

Göttingen wäre also im Jahr um 4.4°, im Januar um 7.1°, im Juli um 0.7° wärmer, als der Mittelwert eines Parallelkreises; die Erklärung dieser Abweichung finden wir, wenn wir auf die Windverteilung zurückblicken. Bei weitem haben südwestliche Winde das Uebergewicht, und da diese warme oceanische Luft zuführen, kommt es auch in der kälteren Jahreszeit nur selten, und dann auch nur vorübergehend, zu extrem niedrigen Temperaturen.

Die einzelnen Mittelwerte der Temperaturen sind in Tabelle IV—VII znsammengestellt.

Von den Mittelwerten kann der Tageskalender, in dem dieselben für jeden Tag berechnet sind, nur historischen Wert beanspruchen, da die Periode zu kurz war, als daß Normalwerte dafür abgeleitet werden könnten. Nur zur Berechnung sowohl der Pentaden- als auch der Monatsmittel waren die Zahlen des Tageskalenders unumgänglich nötig, ich will jedoch aus den oben genannten Gründen hier auf die Wiedergabe desselben verzichten, stelle aber in Tafel 3 in graphischer Darstellung den Gang der Jahreskurven für Tagesmittel, mittleres Tagesmaximum und mittleres Tagesminimum dar; die recht bewegten Curven, — bei einem

---

1) R. Spitaler, die Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche. Denkschriften der kaiserl. Akad. in Wien. Band LI.

Zeitraum von nur 10 Jahren ist ja kein gleichmäßiger Gang zu erwarten — zeigen parallelen Gang; das Tagesmittel schwankt von -5^0 am 2. Januar bis $+18{,}7^0$ am 9. Juli; das mittlere Tagesmaximum von -2.2^0 am 2. Januar bis $+25{,}1^0$ am 28. Juni, das mittlere Tagesminimum von -8.1 am 3. Januar bis $+13.3^0$ am 4. Juli. Das Tagesmittel liegt im Winter näher am Maximum, im Sommer näher am Minimum.

Von extremen Temperaturen wären zu nennen:

Absolute Maxima:	36.3^0 am 17. VIII. 92; 34.8^0 am 28. V. 92; 33.5^0 am 24. VII. 94; 33.1^0 am 4. IX. 92.
Absolute Minima:	-25.5^0 am 16. I. 93; -24.0 am 7. II. 95.
Größte Tagesmittel:	$+25.7^0$ am 17. VIII. 92; $+25.1$ am 25. VII. 94; $+25.0$ am 28. V. 92.
Kleinste Tagesmittel:	-19.6^0 am 18. I. 93; -18.6 am 7. II. 95.

Von allgemeinerem Interesse sind die Pentadenmittel. Sie sind zusammengestellt in Tabelle V, graphisch aufgezeichnet in Tafel 1, wo zum Vergleich die Pentadenmittel der Periode 1857/81, veranschaulicht durch die gestrichelt gezogene Linie, beigefügt sind. Die kälteste Pentade ist die vom 1.—5. Januar mit -4.2^0, während ein geringeres Minimum von -2.7 sich in der Zeit vom 11.—20. Januar vorfindet. Von da an steigt die Temperatur mehr oder minder regelmäßig bis zu 18.0^0 in der Pentade vom 24.—29. Juni. Ein zweites, nur wenig geringeres Maximum von 17.7^0 fällt in die Pentade vom 24.—29. Juli. Die Periode 1857/81 zeigt ein Minimum von -0.8 zwischen dem 10.—15. Januar, annähernd mit dem zweiten oben erwähnten Minimum der letzten Periode gleichzeitig, das Maximum von 18.4^0 fällt in die Zeit vom 14.—19. Juli. Im übrigen befolgen die Curven ziemlich den gleichen Gang.

Wenn wir, dem Beispiel der Abhandlung über das Klima zu Frankfurt a. M. folgend, die Zeit mit Temperaturen unter 5^0 als Winter, von $5—15^0$ als Frühling bezw. Herbst, über 15^0 als Sommer bezeichnen, so haben wir in Göttingen

vom 6. November	bis 6. März	unter 5^0,	Winter
„ 7. März	„ 30. Mai	$5—15^0$,	Frühling
„ 31. Mai	„ 2. September	über 15^0,	Sommer
„ 3. September	„ 5. November	$15^0—5^0$,	Herbst.

Frühling und Sommer entsprechen etwa den meteorologischen Jahreszeiten, dagegen kommt der Herbst zu Gunsten des Winters entschieden zu kurz.

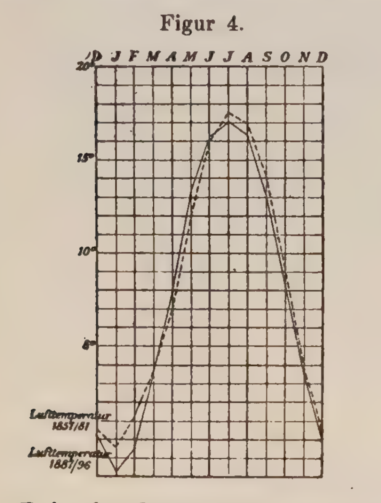
Von besonderem Interesse sind die Kälte- und Wärmerückfälle. Wir finden:

Kälterückfälle	Wärmerückfälle
4.—19. Februar	18.—23. August
11.—15. März	27.—31. October
10.—15. April	1.—6. December.
15.—20. Mai	
9.—19. Juni	
1.—8. August.	

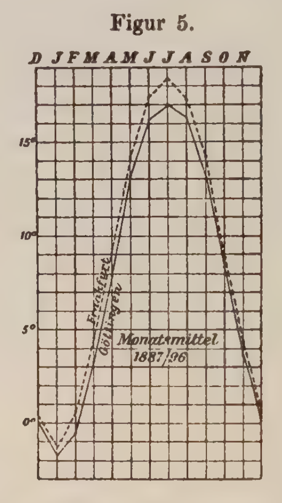
Von diesen fallen die Kälterückfälle im Februar, April, Juni sowie August gleichzeitig mit solchen der Periode 57/81. Sie sind, wie Hellmann[1]) nachgewiesen hat, charakteristisch für Norddeutschland, die übrigen, sowie die Wärmerückfälle können dagegen auf allgemeine Gültigkeit keinen Anspruch machen.

Wenn schon der Verlauf der Curve der Pentadenmittel für 1857/81 und 1887/96 viel Aehnlichkeit zeigt, so ist dies in viel höherem Grade der Fall, wenn wir die Monatsmittel der beiden Beobachtungsperioden heranziehen.

Figur 4.



Figur 5.



Beistehende Figur 4 veranschaulicht den Gang derselben. Wie man sieht, fallen die Curven sehr nahe zusammen, auch die Amplitude ist fast dieselbe, nur scheint die Curve der früheren Periode gegen die spätere ein wenig nach den positiven Zahlen hin verschoben. Auch hier will ich zum Vergleich die Monatsmittel zu Frankfurt von 1887/96, die ich ebenfalls der Liebenswürdigkeit des Herrn Prof. König verdanke, heranziehen. Einen Vergleich zwischen beiden bietet Figur 5. Beide Curven zeigen ganz pa-

1) G. Hellmann, Ueber den jährl. Gang der Lufttemperatur in Norddeutschland. Zeitsch. d. Kgl. Preuß. Stat. Bureaus, Jahrgang 1883.

rallelen Gang, mit einer mittleren Differenz von 0.8°, während 1.2° der theoretische Wert ist.

Wenn in Figur 4 die Zusammenstellung der beiden Göttinger Beobachtungsreihen 1857/81 und 1887/96 auch eine sehr große Uebereinstimmung zeigte, so lassen die Curven doch erkennen, wie ja auch das Jahresmittel angiebt, daß die Periode 1887/96 kälter war als die 1857/81. Naturgemäß drängt sich nun hier die Frage auf, hatte dieser Temperaturabfall einen mehr allgemeineren Charakter oder war er nur für Göttingen vorhanden und durch lokale Ursachen bedingt? Zur Entscheidung ziehe ich für beide Perioden wieder die Frankfurter Reihen und außerdem die Mittelwerte für Bremen, dem Deutschen Meteor. Jahrbuch[1]) entnommen, heran. Wir erhalten da folgende Zahlen:

Göttingen:

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Jahr
1887/96	— 1.8	— 0.5	+ 3.3	7.9	13.2	16.2	17.0	16.3	13.2	8.4	3.6	0.2	8.2
. 1857/81	— 0.4	+ 1.2	+ 3.5	8.1	12.1	16.1	17.7	16.9	14.0	9.0	3.5	0.5	8.5
ifferenz I—II	— 1.4	— 1.7	— 0.2	— 0.2	+ 1.1	+ 0.1	— 0.7	— 0.6	— 0.8	— 0.6	+ 0.1	— 0.3	— 0.3

Bremen:

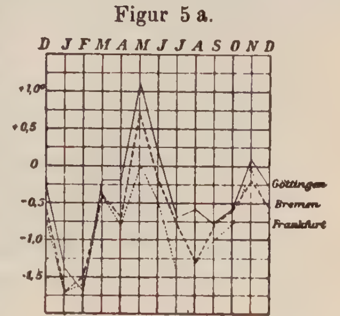
	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Jahr
. 1887/96	— 1.0	+ 0.3	3.4	7.3	12.5	15.7	16.6	15.8	13.1	8.5	3.9	1.0	8.1
[. 1857/81	+ 0.7	1.8	3.8	8.0	11.8	15.9	17.4	17.1	13.9	9.1	4.1	1.6	8.8
)ifferenz I—II	— 1.7	— 1.5	— 0.4	— 0.7	+ 0.7	— 0.2	— 0.8	— 1.3	— 0.8	— 0.6	— 0.2	— 0.6	— 0.7

Frankfurt a. M.:

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Jahr
. 1887/96	— 1.3	+ 0.7	4.6	9.2	14.1	17.4	18.2	17.3	14.2	8.8	4.4	0.4	9.0
I. 1857/81	+ 0.4	2.3	5.0	10.0	14.1	17.9	19.6	18.6	15.2	9.6	4.4	1.1	9.9
)ifferenz I—II	— 1.7	— 1.6	— 0.4	— 0.8	0.0	— 0.5	— 1.4	— 1.3	— 1.0	— 0.8	0.0	— 0.7	— 0.9

Die Zahlenreihen lassen den gleichen Rückgang der Temperatur auf allen 3 Stationen erkennen. Wie groß die Uebereinstimmung ist, sehen wir noch deutlicher, wenn wir die jedesmaligen Differenzen graphisch aufzeichnen. Beistehende Figur 5a giebt ein anschauliches Bild von dem Gang dieser Differenzen während der Jahresperiode, sie zeigt, daß derselbe bei allen 3 Stationen ganz der gleiche war.

Figur 5 a.



Jedenfalls war also dieser Temperaturrückgang kein nur in Göttingen

1) Ergebnisse der met. Beobachtung. Jahrgang I—VII, herausgegeben von Dr. P. Bergholz. Deutsches Meteor. Jahrbuch, Freie Hansestadt Bremen. 1891—97.

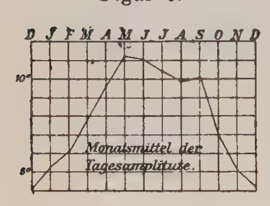
beobachteter, sondern wohl auf ganz Mitteleuropa ausgedehnt[1]). Die Ursachen desselben zu bestimmen, wenn überhaupt eine solche Möglichkeit vorhanden ist, überschreitet jedenfalls die Grenzen dieser Abhandlung.

Es erscheint vielleicht noch von Interesse, die beiden Göttinger Beobachtungsreihen zur Berechnung der Mittelwerte für die Gesammtdauer beider Perioden zusammenzufassen.

Mittelwerte der Temperatur für die Periode 1857/96:

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Jahr
— 0.8	+ 0.7	3.4	8.0	12.4	16.1	17.5	16.7	13.8	8.8	3.5	0.4	8.4

Figur 6.

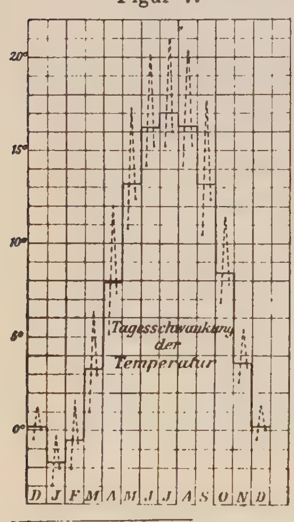


Den jährlichen Gang der Tagesamplitude zeigt Figur 6. Das Maximum liegt im Mai, das Minimum im December. Die Tagesamplitude ist abhängig von der Sonnenstrahlung, diese aber steht außer mit der Tagesdauer auch im Zusammenhang mit der Bewölkung, sodaß also an heiteren Tagen die Aplitude am größten, an gänzlich bedeckten am kleinsten ist. Es liegt nicht im Zweck dieser Abhandlung, näher hierauf einzugehen, um so weniger, als die Zahlen über die Bewölkung viele Lücken aufweisen, auch wären für die Berechnung einigermaßen sicherer Werte mindestens stündliche Beobachtungen nötig.

Als besonders große Tagesamplituden waren zu nennen:

22.7° am 1. IV. 93 22.5° am 25. VII. 92.

Figur 7.

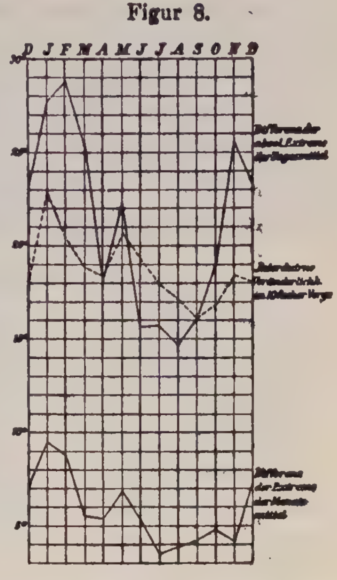


Hierher gehört auch die Periode der Tagesschwankung, wie sie sich durch Vergleich der einzelnen Terminbeobachtungen ergiebt. In Figur 7 soll diese im Vergleich zu den Mittelwerten für die einzelnen Monate erläutert werden. Die wagrechten Striche bedeuten die Monatsmittel, die gestrichelt gezeichneten verbinden die 3 Terminbeobachtungen, indem 7 h. a. links unten, 2 h. p. an der Spitze, 9 h. p. rechts unten liegt. Die Schwankung ist am größten im September, am kleinsten im Dezember, wo sich auch der Mittelwert am meisten der Beobachtung um 9 h. p. nähert.

1) E. Brückner weist in seiner Abhandlung über Klimaschwankungen

Ich komme nun zur Betrachtung der unregelmäßigen Temperaturschwankung. Zu diesem Zweck bilden wir die Differenz der absoluten Extreme der Tagesmittel, die interdiurne Veränderlichkeit und die Differenz der Extreme der Monatsmittel. Die Werte finden sich in Tabelle IV, beistehende Figur 8 stellt graphisch den Verlauf während des Jahres dar. Wie wir sehen, liegt das Maximum bei allen Curven, die einen ziemlich ähnlichen Gang zeigen, im Winter, ein zweites kleineres im Mai und das Minimum in den Monaten Juli bis September. Die Ursachen sind leicht verständlich, wenn wir auf die Veränderlichkeit des Luftdrucks, wie sie in Figur 3dargestellt ist, zurückgreifen. Auch hier lag das Maximum im Winter, das Minimum im Sommer. Und natürlich müssen die im Winter rasch wechselnden Cyclone und Anticyclone auf die Schwankung der Temperatur den größten Einfluß haben.

Figur 8.



Die Bestimmung der in jedem Monat am häufigsten vorkommenden Temperaturgruppe, des sogenannten Scheitelwertes findet sich in Tabelle VI. Dort sind die Tagesmittel in Gruppen von je 1° zusammengefaßt und in Promille umgerechnet worden. Anschaulich soll dies Tafel 4 machen; dort geben die Temperaturen die Abscissen, die Häufigkeit die Ordinaten an, während die kleinen Kreise die Lage des arithmetischen Monatsmittels bezeichnen. Ein Vergleich des Monatsmittels mit dem Scheitelwert ergiebt die Zahlen:

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.
Scheitelwert	+ 2.45	+ 0.45	+ 4.45	+ 9.45	+ 11.45	+ 15.45	+ 15.45	+ 14.45
Monatsmittel	— 1.7	— 0.5	+ 3.3	+ 7.9	+ 13.2	+ 16.2	+ 17.0	+ 16.3

	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Scheitelwert	+ 14.45	+ 10.45	+ 5.45	+ 1.45
Monatsmittel	+ 13.2	+ 8.4	+ 3.6	+ 0.2

In keinem Monat fallen die Mittelwerte in die häufigste Temperaturgruppe, im Januar, Februar, März, April, September, Ok-

(Wien 1890; E. Hölzel) eine etwa 35 jährige Periode nach. Wenn wir mit ihm annehmen, daß ungefähr um 1880 ein allgemeines Temperaturminimum herrschte, so erklärt dies die Allgemeinheit des Temperaturrückganges in der benachbarten Periode.

tober, November, Dezember liegt der Mittelwert tiefer, im Mai, Juni, Juli, August höher als der Scheitelwert.

Was die Verteilung der Häufigkeitszahlen unter einander anbetrifft, so sehen wir, daß von Oktober bis März der Abfall nach der Seite der niedrigeren Temperatur ein sehr viel flacherer ist als nach der der höheren, während von Mai bis August das Umgekehrte stattfindet, oder mit anderen Worten: die am häufigsten vorkommenden Temperaturen fallen in der kälteren Jahreszeit nach der wärmeren, im Sommer nach der kälteren Seite.

Figur 9.

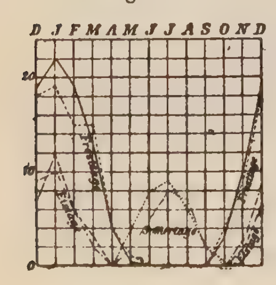


Von der Verteilung der Häufigkeitszahlen des Scheitelwertes über die einzelnen Monate giebt Figur 9 ein Bild. Darnach hat der Scheitelwert ein Maximum seiner Häufigkeit im Juli, ein Minimum im Januar. Wenn wir auf die interdiurne Veränderlichkeit in Figur 8 zurückblicken, so sehen wir, daß dieselbe beinahe den umgekehrten Verlauf zeigt: je häufiger in einem Monat dieselbe Temperaturgruppe vorkommt, um so geringer ist die Aenderung von Tag zu Tag.

Die Frost- Eis- und Sommertage, wie sie in Tabelle VII zusammengestellt, geben uns ein anschauliches Bild der Verteilung der Jahreszeiten.

Darnach tritt der erste Frost durchschnittlich am 26. Oktober, der letzte am 14. April ein. Das Maximum sinkt zuerst unter 0^{0} im Mittel am 26. November, zuletzt am 2. März; der erste Sommertag fällt durchschnittlich auf den 22. Mai, der letzte auf den 8. September. Die Dauer der Jahreszeiten, wenn wir vom ersten bis zum letzten Frosttag Winter, vom ersten bis zum letzten Sommertag Sommer annehmen wollen, stimmt annähernd mit der Seite 229 berechneten überein; der Winter würde noch größere Ausdehnung gewinnen.

Fig. 10.



Ein Bild der Verteilung der Frost-, Eis- und Sommertage auf die einzelnen Monate giebt Figur 10. Zum Vergleich sind die Zahlen aus der Periode 1857/81 beigefügt, und zwar bedeuten die kräftig ausgezogenen Linien die Periode 1887/96, die schwächeren die Periode 1857/81. Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung eine gute.

Von verfrühten, bezw. verspäteten Frost-, Eis- und Sommertagen will ich noch nennen:

	zu früh	zu spät
Frosttage	15. X. 87; 18. X. 91.	8. V. 92.
Eistage	6. XI. 88.	20. III. 88.
Sommertage	11. V. 91.	1. X. 91 und 95.

Absolute und relative Feuchtigkeit.

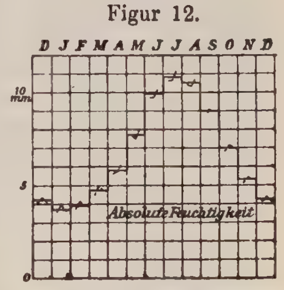
Die absolute Feuchtigkeit oder der Druck des in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampfes, ist in Tabelle IX zusammengestellt.

Das Jahresmittel beträgt 6.83 mm Quecksilber gegen 7.15 in der Periode 1857/81.

Figur 11.

Figur 11 zeigt den Gang der absoluten Feuchtigkeit während des Jahres und giebt zugleich einen Vergleich mit dem der Periode 1857/81. Ein Blick auf die Temperaturcurve in Figur 4 zeigt, daß die absolute Feuchtigkeit genau dem Gang der Temperatur folgt, mit der sie auf das innigste zusammenhängt. Beide Curven zeigen die entsprechenden Differenzen, die bereits dort hervorgehoben worden sind.

Figur 12.



Ein Bild der täglichen Periode giebt für die einzelnen Monate Figur 12. Die horizontalen Striche bedeuten hier wieder die Monatsmittel, die beiden sich kreuzenden Linien stellen mit ihrem Schnittpunkt die Monatsmittel der Beobachtungen um 2 h. p., mit ihren Endpunkten die der Beobachtungen um 7 h. a. und 9 h. p. dar. Das Maximum fällt in der kälteren Jahreszeit auf die Mittags-, in der wärmeren auf die Abendbeobachtung. Das Minimum liegt im Januar bis April, Juli, September bis Oktober am Morgen, Mai, Juni, August am Mittag.

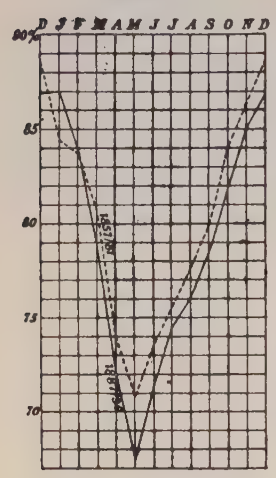
Besonders erwähnenswerte Zahlen der absoluten Feuchtigkeit sind:

Maxima: 23.6 am 10. VI. 89; 21.4 am 9. VIII. 88.
Minima: 0.6 am 15. I. 93 und am 8. II. 95.

Die relative Feuchtigkeit spielt im menschlichen Empfinden eine größere Rolle als die absolute. Wenn wir die Luft trocken oder feucht nennen, so verstehen wir darunter die größere oder geringere Fähigkeit derselben, Wasserdampf aufzunehmen, das sogenannte Sättigungsdeficit der relativen Feuchtigkeit. Sie

stimmt natürlich nicht mit der absoluten überein, indem eine feuchte Luft im Winter einen verhältnismäßig kleinen und eine trockene Luft im Sommer einen großen Dunstdruck haben kann.

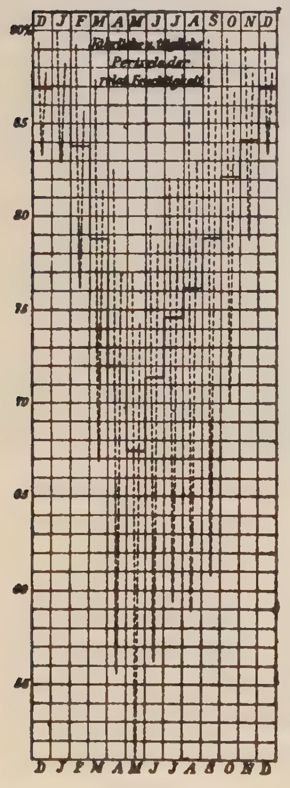
Figur 13.



Das Jahresmittel der relativen Feuchtigkeit beträgt 86.0 % gegen 79.0 % der Periode 1857/81. Eine Uebersicht über die relative Feuchtigkeit findet sich mit der absoluten zusammen in Tabelle IX.

Ein Bild des jährlichen Verlaufes der relativen Feuchtigkeit giebt Figur 13, die auch zum Vergleich die Werte von 1857/81 graphisch darstellt. Das Maximum fällt in den Winter, das Minimum in den Mai. Die ältere Periode zeigt eine Verschiebung nach den größeren Zahlen hin, indem sowohl Maximum und Minimum höher liegen.

Figur 14.



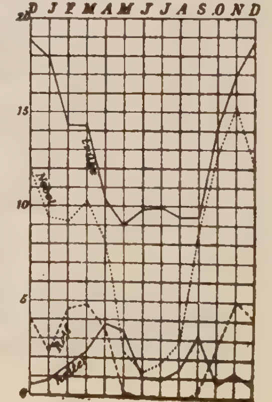
Das Verhältnis der 3 Terminbeobachtungen ist in Figur 14 veranschaulicht. Vergleichen wir die Figur mit Figur 7, der Darstellung der täglichen Temperaturschwankung, so sehen wir, daß die Tagesschwankung der relativen Feuchtigkeit sich aufs engste an die der Temperatur anschließt. Demgemäß finden wir auch hier die größte Amplitude im September, die kleinste im Dezember.

Als besonders trockene Tage will ich noch erwähnen:

20 % am 28. V. 92. 21 % am 28. III. 93.

An die Besprechung der Feuchtigkeit füge ich, als damit in Zusammenhang stehend, die der heiteren, trüben, nebligen und Tage mit Reif. Sie sind zusammengestellt in Tabelle III. Figur 15 giebt eine Darstellung des jährlichen Verlaufes.

Figur 15.



Die heiteren Tage haben ihr Maximum im April, ein zweites im September, denen 2 Minima, im Dezember und in den Sommermonaten gegenüberstehen. Die trüben Tage sind am zahlreichsten im Dezember, am seltensten im Sommer. Reif hat ein Maximum im Herbst und Frühling, Nebel, der in Göttingen überhaupt ziemlich häufig ist, findet sich am meisten im November.

Für das Jahr berechnet sich die mittlere Zahl

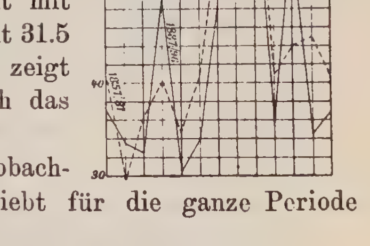
	heiter	trüb	Reif	Nebel
1887/96	21	155	27	94 Tage
1857/81	24	156	—	— „

Niederschläge.

Die Niederschläge lassen sich von 3 Gesichtspunkten betrachten: Niederschlagshöhe, Zahl der Niederschlagstage und Art der Niederschläge.

Die mittlere Niederschlagshöhe beträgt in der Periode 1887/96 532.7 mm, während H. Meyer für die Periode 1857/81 die wenig verschiedene Zahl 542.1 berechnete. Einen Ueberblick über die Verteilung der Niederschlagshöhe auf die Monate und Jahreszeiten giebt Tabelle X, beistehende Figur 16 soll den jährlichen Gang anschaulich machen und auch einen Vergleich mit der Periode 1857/81 bieten. Das Maximum der Niederschlagshöhe fällt mit 77.0 mm in den Juli, das Minimum mit 31.5 in den April. Die Periode 1857/81 zeigt ziemlich denselben Gang, wenn auch das Minimum hier auf den Januar fällt.

Figur 16.



Die Verbindung der beiden Beobachtungsreihen 1857/81 und 1887/96 ergiebt für die ganze Periode 1857/96 die Mittelwerte:

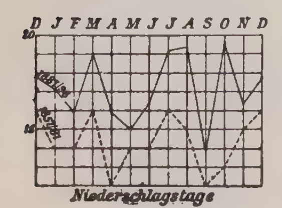
Mittlere Niederschlagshöhe 1857/96

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Jahressumme
30.8	36.0	42.7	33.8	38.8	54.3	69.9	65.5	39.4	47.3	41.8	39.3	539.4

Niederschlagstage pflegt man nach ihrer Höhe in solche ohne untere Grenze und solche über 0.2 mm zu trennen. Angegeben finden sich die Niederschlagstage ohne untere Grenze von Pentade zu Pentade in Tabelle XI, den Gang derselben während des Jahres zeigt Tafel 1. Es ist hier neueren Ansichten gegen-

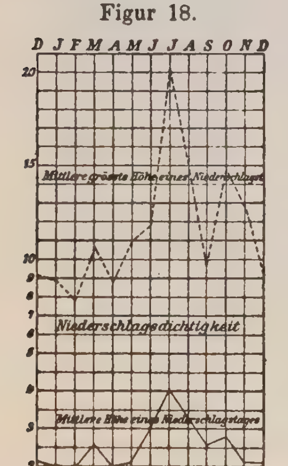
über einigermaßen von Interesse zu sehen, wie die Zahl der Niederschlagstage in enger Beziehung steht zum Luftdruck. Dem Maximum des Luftdrucks im Februar entspricht eine geringe Anzahl Niederschlagstage, dem Minimum des Luftdrucks im März das Maximum der Niederschlagstage; im Mai fallen hoher Luftdruck mit geringer Zahl der Niederschlagstage gleichzeitig zusammen und umgekehrt, im September entspricht ebenfalls hohem Luftdruck eine geringe Zahl der Niederschlagstage. Es scheint also zufällig die alte Regel, nach der hoher Barometerstand schönes, tiefer regnerisches Wetter bedeute, hier ihre Geltung bewahren zu wollen.

Figur 17.



Die Verteilung der Niederschlagstage auf Monate und Jahreszeiten findet sich berechnet in Tabelle X, beistehende Figur stellt den Jahresverlauf dar. Zum Vergleich ist der jährliche Gang während der Periode 1857/81 beigefügt. Die Periode 1887/96 zeigt Maxima im März, Sommer und Oktober, Minima im April und September. Die beiden Perioden zeigen ziemlich den gleichen Gang, jedoch ist in der letzten Periode überall die Zahl der Niederschlagstage größer, im Jahr 205 gegen 171 der früheren Periode.

Figur 18.



Ein sichereres Urteil, als die bloße Zahl der Niederschlagstage ergiebt, bekommen wir über die Verteilung der Niederschläge, wenn wir die mittlere Höhe eines Niederschlagstages überhaupt, die sogenannte Niederschlagsdichtigkeit und die mittlere größte Höhe eines Niederschlagstages betrachten. In Figur 18 sind beide in ihrem jährlichen Gang aufgezeichnet. Sie zeigen einen ganz parallelen Gang und haben beide ihr Maximum im Juli, ihr Minimum im Winter.

Ein genaues Bild über die Verteilung der Niederschlagstage nach ihrer Höhe giebt Tabelle XII. In derselben sind für jeden Monat die Niederschläge nach ihrer Höhe geordnet und in Procente umgerechnet worden. Wir finden daraus, daß in allen Monaten außer November die Niederschlagshöhe eines Tages zwischen 1.1 und 5.0 mm die häufigste ist. Tage von über 30 mm finden sich nur im Juni, August, November, am

häufigsten aber im Juli, keinen Tag über 20 mm haben Januar, Februar und April.

Zu erwähnen wären noch einige besonders hohe Niederschlagsmengen:

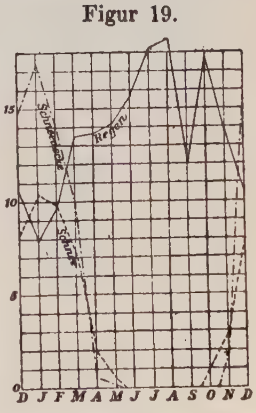
44.0 am 24. XI. 90 Landregen den ganzen Tag.
38.3 „ 16. VII. 87 Gewitterregen.
33.3 „ 17. VI. 96 Gewitterregen.

Fassen wir alles über die Niederschläge oben gesagte zusammen, so sehen wir, daß sowohl nach Häufigkeit, Menge und Dichtigkeit die Niederschläge ihr Maximum im Sommer haben, während ein ausgesprochenes Minimum nicht vorhanden ist.

Von aufeinander folgenden trockenen Tagen will ich noch nennen:

eine Periode von 26 trockenen Tagen vom 18. III. bis 12. IV. 94,
2 Perioden von 22 bezw. 23 trockenen Tagen vom 22. III. bis 12. IV. 93 und vom 28. XII. 88 bis 19. I. 89.
Eine längere Regenperiode kam nur einmal vor, 21 Tage vom 7. VIII. bis 27. VIII. 94.

Figur 19.



Die Einteilung der Niederschlagstage nach der Art des Niederschlags findet sich auf Tabelle XII. Sie möge veranschaulicht werden durch Figur 19, auf der gleichzeitig auch die Tage mit Schneedecke vermerkt sind.

Regen hat sein Maximum im August, sein Minimum im Januar, Schnee und Schneedecke haben beide ein Maximum im Januar. Die mittleren Jahresmittel sind:
Regen 162, Schnee 42, Schneedecke 59 Tage und 1857/81 Regen 149, Schnee 35 Tage.

Bei Schneedecke wäre noch zu bemerken, daß im Winter 94/95 vom 28. Dezember bis 22. März ununterbrochen Schnee lag.

Hagel, zu dem ich die Graupeln nicht zugerechnet habe, ist nur 5 mal gefallen, darunter 3 mal im Jahre 1894, im April, August und September.

Eine Uebersicht über die vorgekommenen Gewitter, insgesammt 208, findet sich in Tabelle XI nach Pentaden geordnet. Auch sind sie auf Tafel 1 graphisch dargestellt. Eine Monats- und Jahresübersicht giebt Tabelle X. Darnach waren gewitterfrei die Monate Februar, November, Dezember. Am häufigsten sind

die Gewitter im Juli; im Januar, März, Oktober fand nur je eins statt. Der eine Gewittertag vom 6. Januar 1894 hat zugleich einen Barometerstand von 729.7, es war also ein Wirbelgewitter; alle übrigen dürften Wärmegewitter gewesen sein.

Werfen wir zum Schluß noch einmal einen Rückblick auf die Gesammtheit der gefundenen Resultate und sehen in wie weit Uebereinstimmung mit der früheren Beobachtungsperiode 1857/81 vorhanden ist. Dieser Vergleich konnte sich freilich nur auf die Hauptelemente erstrecken, da die Meyer'sche Arbeit, obwohl einen längeren Zeitraum begreifend, sich nur auf deren Ableitung beschränkt; hierbei sind erhebliche Differenzen nicht aufgetreten. Der einzige Punkt, bei dem sich nennenswerte Abweichung zeigt, die Temperatur und mit ihr die Luftfeuchtigkeit, findet, wie oben nachzuweisen versucht wird, seine Erklärung in einer auf ganz Mitteleuropa ausgedehnten Temperaturabnahme während der letzten Periode.

Jedenfalls ist die Möglichkeit, auch aus einer 10 jährigen Beobachtungsreihe einigermaßen das Klima charakterisierende Mittelwerte abzuleiten, sofern man den Zeitraum, für den der Wert gelten soll, nicht gar zu knapp nimmt, durch meine Zahlen mit einiger Sicherheit nachgewiesen worden.

Tabelle I.

Luftdruck. — Pentadenübersicht.

Barometerstände in mm auf 0° C. reduzirt.

Pentade		Pentadenmittel 1887/96			
		mittleres	größtes	kleinstes	Differenz
1	Jan. 1.—5. Jan.	750.1	761.2 (89)	739.3 (95)	21.9
2	„ 6.—10. „	48.4	62.5 (96)	33.5 (92)	29.0
3	„ 11.—15. „	49.5	62.9 (88)	36.9 (95)	26.0
4	„ 16.—20. „	50.6	62.4 (88)	39.3 (95)	23.1
5	„ 21.—25. „	47.5	59.3 (87)	33.4 (95)	25.9
6	„ 26.—30. „	51.1	62.0 (96)	42.5 (88)	19.5
7	Jan. 31.—4. Febr.	50.3	63.6 (96)	37.0 (92)	26.6
8	Febr. 5.—9. „	51.1	63.8 (87)	36.3 (89)	27.5
9	„ 10.—14. „	47.7	57.3 (87)	38.7 (93)	18.6
10	„ 15.—19. „	51.8	63.0 (91)	36.0 (92)	27.0
11	„ 20.—24. „	48.8	61.4 (91)	31.1 (93)	30.3
12	„ 25.—1. März	49.2	61.2 (87)	38.9 (93)	22.3
13	März 2.—6. März	47.1	57.7 (87)	33.2 (96)	24.5
14	„ 7.—11. „	44.2	51.1 (93)	37.4 (91)	13.7
15	„ 12.—16. „	44.0	52.5 (89)	34.9 (88)	17.6
16	„ 17.—21. „	46.5	58.9 (92)	35.0 (90)	23.9
17	„ 22.—26. „	46.4	56.9 (93)	37.9 (95)	19.0
18	„ 27.—31. „	44.5	51.0 (93)	32.4 (88)	18.6
19	April 1.—5. April	46.8	53.0 (92)	39.7 (89)	13.3
20	„ 6.—10. „	46.6	56.7 (93)	36.5 (89)	20.2
21	„ 11.—15. „	45.8	52.3 (93)	38.8 (89)	13.5
22	„ 16.—20. „	47.9	55.8 (87)	39.2 (90)	16.6
23	„ 21.—25. „	47.0	51.8 (93)	42.6 (87)	9.2
24	„ 26.—30. „	45.9	48.4 (87)	43.1 (91)	5.3
25	Mai 1.—5. Mai	47.7	56.3 (95)	41.4 (92)	14.9
26	„ 6.—10. „	49.2	54.3 (88)	39.6 (90)	14.7
27	„ 11.—15. „	47.9	52.1 (92)	39.8 (90)	12.3
28	„ 16.—20. „	44.5	47.7 (96)	35.1 (95)	12.6
29	„ 21.—25. „	47.2	53.9 (88)	40.7 (91)	13.2
30	„ 26.—30. „	46.8	53.4 (95)	39.0 (94)	14.4
31	Mai 31.—4. Juni	46.7	49.0 (90)	41.1 (88)	7.9
32	Juni 5.—9. „	48.3	54.2 (93)	42.3 (96)	11.9
33	„ 10.—14. „	47.2	53.0 (87)	42.1 (94)	10.9
34	„ 15.—19. „	49.2	54.9 (87)	46.2 (88,95)	8.7
35	„ 20.—24. „	49.1	54.4 (95)	40.3 (93)	14.1
36	„ 25.—29. „	48.4	53.3 (94)	44.3 (88)	9.0

Pentade		Pentadenmittel 1887/96			
		mittleres	größtes	kleinstes	Differenz
37	Juni 30.—4. Juli	748.6	753.2 (87)	742.1 (88)	11.1
38	Juli 5.—9. „	47.5	52.1 (95)	43.0 (90)	9.1
39	„ 10.—14. „	46.5	51.8 (96)	40.3 (94)	11.5
40	„ 15.—19. „	45.9	51.0 (87)	39.1 (88)	11.9
41	„ 20.—24. „	47.6	51.1 (87)	45.1 (95)	6.0
42	„ 25.—29. „	47.3	52.5 (92)	42.9 (89)	9.6
43	Juli 30.—3. Aug.	47.2	51.9 (87)	44.5 (91)	7.4
44	Aug. 4.—8. „	47.7	53.7 (87)	40.0 (95)	13.7
45	„ 9.—13. „	47.5	51.6 (93)	43.1 (89)	8.5
46	„ 14.—18. „	47.8	51.8 (93)	44.3 (87)	7.5
47	„ 19.—23. „	46.5	50.4 (95)	41.5 (89)	8.9
48	„ 24.—28. „	47.2	50.8 (95)	40.8 (90)	10.0
49	„ 29.—2. Sept.	49.2	52.6 (89)	45.0 (87)	7.6
50	Sept. 3.—7. Sept.	49.5	55.6 (90)	43.9 (87)	11.7
51	„ 8.—12. „	50.6	54.6 (88)	45.5 (96)	9.1
52	„ 13.—17. „	51.3	55.2 (88)	46.1 (96)	9.1
53	„ 18.—22. „	48.5	55.1 (88)	39.9 (93)	15.2
54	„ 23.—27. „	48.6	56.2 (95)	39.3 (96)	16.9
55	„ 28.—2. Okt.	46.2	54.2 (94)	39.8 (88)	14.4
56	Okt. 3.—7. Okt.	45.1	50.9 (90)	37.4 (93)	13.5
57	„ 8.—12. „	45.8	56.4 (90)	38.4 (87)	18.0
58	„ 13.—17. „	46.9	50.5 (95)	42.6 (92)	7.9
59	„ 18.—22. „	47.3	58.2 (88)	35.2 (96)	23.0
60	„ 23.—27. „	45.8	55.2 (88)	37.1 (95)	18.1
61	„ 28.—1. Nov.	47.3	58.9 (91)	41.1 (96)	17.8
62	Nov. 2.—6. Nov.	45.9	58.7 (91)	27.1 (90)	31.6
63	„ 7.—11. „	47.3	56.1 (89)	30.0 (90)	26.1
64	„ 12.—16. „	48.4	61.3 (89)	37.6 (91)	23.7
65	„ 17.—21. „	48.5	57.2 (94)	38.1 (93)	19.1
66	„ 22.—26. „	48.7	61.7 (96)	27.0 (90)	34.7
67	„ 27.—1. Dez.	49.1	54.9 (94)	39.6 (88)	15.3
68	Dez. 2.—6. Dez.	48.9	61.7 (89)	40.4 (96)	21.3
69	„ 7.—11. „	46.2	54.1 (90)	41.1 (91)	13.0
70	„ 12.—16. „	47.3	59.0 (88)	36.2 (95)	22.8
71	„ 17.—21. „	47.8	62.7 (91)	35.8 (87)	26.9
72	„ 22.—26. „	50.3	57.4 (91)	41.4 (88)	16.0
73	„ 27.—31. „	50.8	62.6 (93)	38.1 (94)	24.5

Tabelle II.

Luftdruck. — Monats- und Jahres-Uebersicht.

Barometerstände in mm auf 0° C. reduzirt.

Monatsmittel.

	1887/96			
	mittleres	grösstes	kleinstes	Differenz
Januar	749.6	755.8 (96)	739.7 (95)	16.1
Februar	49.8	59.5 (91)	41.6 (89)	17.9
März	45.5	50.5 (93)	38.9 (88)	11.6
April	46.7	51.8 (93)	42.3 (89)	9.5
Mai	47.2	50.3 (96)	43.9 (91)	6.4
Juni	48.3	51.3 (87)	47.2 (88)	4.1
Juli	47.0	49.8 (87)	43.4 (88)	6.4
August	47.6	49.9 (88)	45.9 (91)	4.0
September	49.3	53.3 (90)	44.9 (96)	13.4
Oktober	46.3	49.6 (88)	43.1 (92)	6.5
November	48.7	54.4 (89)	43.3 (87)	11.1
Dezember	48.6	54.7 (89)	43.6 (95)	11.1

Monatsextreme.

	1887/96					
	Mittel der monatlichen höchsten u. niedrigsten Luftdruckwerthe		Differenz	Höchster	Niedrigster	Differenz
				beob. Luftdruck		
Januar	762.4	730.0	32.4	768.6 (29/96)	720.3 (23/90)	48.3
Februar	61.7	35.3	26.4	67.7 (24/87)	19.8 (9/89)	47.9
März	58.4	30.4	28.0	63.0 (1/87)	25.6 (29/88)	37.4
April	56.9	36.1	20.8	64.6 (17/87)	29.7 (25/90)	34.9
Mai	55.8	36.0	19.8	58.9 (5/93)	29.0 (13/90)	29.0
Juni	56.9	37.9	19.0	59.9 (7/93)	34.0 (23/93)	25.9
Juli	53.9	37.3	16.6	57.4 (1/94)	33.1 (11/94)	24.3
August	54.8	38.2	16.6	56.7 (5/87)	34.8 (4/95)	21.9
September	58.7	38.1	20.6	61.9 (13/88)	29.1 (25/96)	32.8
Oktober	59.2	31.6	27.6	64.1 (31/91)	29.0 (10/87)	35.1
November	51.6	31.8	20.8	67.8 (20/89)	20.5 (24/90)	47.3
Dezember	62.7	30.1	32.6	68.5 (29.93)	23.8 (30/94)	44.7

Mittel der Jahreszeiten.

	1887/96			
	mittleres	größtes	kleinstes	Differenz
Winter	749.5	753.4	745.0	8.4
Frühling	47.0	50.4	44.1	6.3
Sommer	47.6	49.8	46.5	3.3
Herbst	47.0	49.8	46.3	3.5

Extreme der Jahreszeiten.

	1887/96					
	Mittel des					
	höchsten	niedrigsten	Differenz	höchster	niedrigster	Differenz
	Luftdruckwerthes			Luftdruckwerth		
Winter	765.6	725.4	30.2	768.6 29. I. 96	719.8 9. II. 89	48.8
Frühling	59.6	30.3	29.3	764.6 17. IV. 87	725.6 29. III. 88	39.0
Sommer	57.0	35.7	21.3	759.9 7. VI. 93	733.1 11. VII. 94	26.8
Herbst	62.4	29.2	33.2	767.8 20. XI. 89	720.5 24. XI. 90	47.3

Jahresübersicht.

	1887/96	
Mtttleres Jahresmittel	747.8	
Größtes Jahresmittel	748.8	(87)
Kleinstes Jahresmittel	746.6	(95)
Differenz	2.2	
Größtes Monatsmittel	759.5	(II. 91)
Kleinstes Monatsmittel	738.9	(III. 88)
Differenz	20.6	
Größtes Pentadenmittel	763.8	5—9. II. 87
Kleinstes Pentadenmittel	727.0	22—26. XI. 90
Differenz	36.8	
Größtes Tagesmittel	767.8	29. XII. 93
Kleinstes Tagesmittel	721.9	9. II. 89
Differenz	45.9	
Höchster beobachteter Luftdruck	768.6	29. I. 96
Niedrigster beobachteter Luftdruck	719.8	9. II. 89
Differenz	48.8	
Mittel der jährlichen höchsten Barometerstände	765.7	
Mittel der jährlichen niedrigsten Barometerstände	724.2	
Differenz	41.5	

Tabelle III.

Bewölkung. Reif und Nebel. Winde.

Bewölkung.

	Zahl der heiteren Tage			Zahl der trüben Tage		
	mittl.	größte	kleinste	mittl.	größte	kleinste
Januar	0.8	3 (89)	0 oft	17.8	23 (88, 96)	13 (89, 94)
Februar	1.6	5 (90)	0 oft	14.3	18 (93)	10 (90)
März	2.3	7 (94)	0 oft	14.3	21 (88)	7 (92)
April	3.8	12 (93)	0 (88, 96)	11.3	19 (96)	2 (93)
Mai	3.4	7 (89, 92)	0 (87)	9.0	21 (87)	4 (88)
Juni	1.0	6 (89)	0 oft	9.8	16 (91, 94)	2 (89)
Juli	0.9	4 (90)	0 oft	9.9	14 (94, 95)	4 (88)
August	1.4	4 (93)	0 (94, 96)	9.4	21 (94)	4 (88)
September	3.3	10 (88)	0 (96)	9.4	15 (87)	6 oft
Oktober	0.8	3 (91)	0 oft	14.3	21 (94)	9 (90)
November	1.2	3 (89, 96)	0 oft	17.0	22 (93)	11 (88)
Dezember	0.6	3 (88)	0 oft	18.8	28 (95)	9 (88)
Winter	3.0	8 (89/90)	0 (93/94 94/95)	50.9	62 (87/88)	39 (88/89)
Frühling	9.5	19 (92)	1 (88)	34.6	56 (87)	21 (92)
Sommer	3.3	8 (89)	1 (91)	29.1	43 (96)	12 (88)
Herbst	5.3	13 (88)	1 (92, 94)	40.7	55 (87)	30 (89, 95)
Jahr	21.1	29 (93)	9 (87)	155.3	194 (87)	130 (88)

Reif und Nebel.

	Zahl der Tage mit Reif			Zahl der Tage mit Nebel		
	mittl.	größte	kleinste	mittl.	größte	kleinste
Januar	2.3	6 (87)	0 oft	9.4	18 (89, 92)	2 (95)
Februar	4.6	13 (96)	0 (89, 90)	9.2	21 (91)	1 (95)
März	4.8	12 (94)	0 (88)	10.3	23 (89)	4 (95)
April	3.3	12 (93)	1 oft	8.0	23 (89)	1 (87)
Mai	0.1	1 (96)	0 oft	2.3	9 (90)	0 oft
Juni	—	—	—	1.3	3 (89)	0 oft
Juli	—	—	—	1.8	5 (93)	0 (90)
August	—	—	—	2.9	11 (88)	0 (93, 95)
September	0.4	3 (93)	0 oft	8.6	23 (88)	3 (87, 93)
Oktober	2.4	6 (95)	0 oft	12.8	26 (88)	1 (93)
November	5.0	13 (96)	1 (88)	15.3	29 (89)	4 (95)
Dezember	4.0	9 (94)	0 (91)	11.9	22 (90)	3 (95)
Winter	10.9	21 (95/96)	1 (91)	30.5	56 (90/91)	12 (93)
Frühling	8.2	23 (93)	1 (88)	20.6	50 (89)	9 (96)
Sommer	—	—	—	6.0	13 (88)	2 (93)
Herbst	7.8	13 (96)	3 (90)	36.7	70 (88)	9 (93, 96)
Jahr	26.9	51 (93)	10 (90)	93.8	156 (89)	39 (95)

Winde.

Häufigkeit der Winde in Procenten. 1889/96.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Stille	Zahl der Sturmtage 1887/96		
										mittl.	größte	kleinste
Januar	7.3	5.9	1.5	30.4	3.9	30.4	3.4	13.8	3.5	0.7	5 (91)	0 oft
Februar	6.8	10.9	3.5	24.7	2.6	27.8	5.3	15.9	2.2	1.6	5 (95)	0 (87, 90)
März	5.6	10.2	2.6	16.5	4.2	32.4	6.5	18.1	3.9	1.1	5 (91)	0 oft
April	8.1	18.2	3.9	11.5	2.1	22.9	4.9	25.8	2.6	0.4	4 (88)	0 oft
Mai	8.3	20.7	3.8	14.9	2.6	19.1	4.2	25.1	1.3	0.6	5 (88)	0 oft
Juni	4.4	12.5	2.6	11.8	1.4	26.5	8.2	29.7	2.8	0.2	2 (88)	0 oft
Juli	4.7	6.3	2.2	12.2	3.8	37.6	5.9	25.7	1.6	0.5	2 (88, 95)	0 oft
August	2.3	4.4	1.6	12.2	3.4	49.6	5.5	17.6	3.4	0.6	4 (89)	0 oft
September	4.3	9.2	1.3	18.5	4.3	35.3	5.1	18.9	3.2	0.4	2 (96)	0 oft
Oktober	3.8	4.3	2.0	30.9	4.7	36.4	3.0	12.5	2.4	1.0	3 (87, 93)	0 oft
November	4.0	9.2	3.9	31.2	5.1	27.5	2.9	14.0	2.1	0.5	2 (88)	0 oft
Dezember	2.7	11.8	3.4	32.4	4.4	25.8	3.9	14.8	0.8	1.4	9 (91)	0 oft
Winter	5.6	9.5	2.8	29.2	3.6	28.0	4.2	14.8	2.2	3.7	16 (91/92)	0 (96)
Frühling	7.3	16.4	3.4	14.3	3.0	24.8	5.2	23.0	2.6	2.1	9 (88)	0 oft
Sommer	3.8	7.7	2.1	12.1	2.9	37.9	6.5	24.3	2.6	1.3	5 (88)	0 oft
Herbst	4.0	7.6	2.4	26.9	4.7	33.1	3.7	15.1	2.6	1.9	4 (92)	0 (90, 93)
Jahr	5.2	10.3	2.7	20.6	3.5	30.9	4.9	19.3	2.5	9.0	18 (88)	3 (87, 90)

Tabelle IV.

Lufttemperatur. — Monats- und Jahresübersicht.

° C.

Monatsmittel.

	1887/96						
	7 h. a.	2 h. p.	9 h. p.	mittl.	größtes	kleinstes	Differenz
Januar	— 3.0	— 0.3	— 2.1	— 1.7	+ 2.9 (90)	— 6.6 (93)	9.5
Februar	— 2.1	+ 1.7	— 0.7	— 0.5	+ 2.8 (94)	— 6.0 (95)	8.8
März	+ 0.9	+ 6.5	+ 2.9	+ 3.3	+ 6.6 (96)	+ 1.1 (89)	5.5
April	+ 5.1	+ 12.1	+ 7.3	+ 7.9	+ 11.1 (94)	+ 5.7 (91)	5.4
Mai	+ 10.8	+ 17.4	+ 12.3	+ 13.2	+ 17.2 (89)	+ 10.4 (87)	6.8
Juni	+ 14.2	+ 20.2	+ 15.2	+ 16.2	+ 19.9 (89)	+ 14.7 (90)	5.2
Juli	+ 15.2	+ 21.0	+ 16.0	+ 17.0	+ 18.9 (87)	+ 15.4 (88)	3.5
August	+ 14.1	+ 20.4	+ 15.2	+ 16.3	+ 18.4 (92)	+ 14.6 (96)	3.8
September	+ 10.4	+ 17.6	+ 12.3	+ 13.2	+ 15.3 (95)	+ 11.1 (94)	4.2
Oktober	+ 6.8	+ 11.4	+ 7.7	+ 8.4	+ 10.6 (91)	+ 5.8 (87)	4.8
November	+ 2.5	+ 5.4	+ 3.3	+ 3.6	+ 5.9 (95)	+ 1.8 (96)	4.1
Dezember	— 0.5	+ 1.3	+ 0.0	+ 0.2	+ 2.7 (90)	— 4.6 (89)	7.3

Monatsextreme.

	1887/96					
	Mittel der monatlichen höchsten Temperaturen	Mittel der monatlichen niedrigsten Temperaturen	Differenz	Höchste Temperatur	Niedrigste Temperatur	Differenz
Januar	+ 7.2	— 15.8	23.0	+ 10.3 (25. 90)	— 25.5 (16. 93)	35.8
Februar	+ 9.0	— 13.4	22.4	+ 12.1 (16. 93)	— 24.0 (7. 95)	36.1
März	+ 15.9	— 10.3	26.2	+ 22.3 (22. 96)	— 17.4 (6. 95)	39.7
April	+ 21.7	— 2.3	24.0	+ 24.5 (4 92)	— 4.6 (14. 93)	29.1
Mai	+ 27.4	+ 2.4	25.0	+ 34.8 (28. 92)	— 1.4 (8. 92)	32.4
Juni	+ 29.5	+ 4.6	24.9	+ 31.1 (19. 93)	+ 2.7 (16. 92)	28.4
Juli	+ 30.8	+ 7.2	23.6	+ 33.5 (24. 94)	+ 5.3 (13. 90)	28.2
August	+ 30.0	+ 6.1	23.9	+ 36.3 (17. 92)	+ 4.4 (6. 94)	31.9
September	+ 26.2	+ 2.1	24.1	+ 33.1 (4. 95)	+ 0.3 (16. 89)	32.8
Oktober	+ 21.0	— 1.6	22.6	+ 25.1 (1. 91)	— 5.6 (27. 87)	30.7
November	+ 12.8	— 7.1	19.9	+ 17.4 (16. 95)	— 13.9 (27. 90)	31.3
Dezember	+ 8.5	— 9.9	18.4	+ 13.2 (5. 91)	— 17.8 (30. 90)	31.0

Monatsmittel der interdiurnen Veränderlichkeit.

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
2.29	2.04	1.89	1.84	2.07	1.92	1.79	1.71	1.61	1.68	1.84	1.80

Mittel der monatlichen größten positiven und negativen Werte der interdiurnen Veränderlichkeit.

+ 7.37	+ 5.50	+ 5.50	+ 5.13	+ 5.14	+ 4.50	+ 4.79	+ 4.53	+ 3.68	+ 4.69	+ 4.42	+ 5.21
— 6.81	— 5.47	— 5.52	— 4.52	— 5.87	— 5.74	— 5.36	— 4.63	— 5.04	— 5.15	— 5.12	— 5.37
± 7.1	± 5.5	± 5.4	± 4.8	± 5.5	± 5.1	± 5.1	± 4.6	± 4.4	± 4.9	± 4.8	± 5.3

Mittel der Jahreszeiten.

	1887/96					
	7 h. a.	2 h. p.	9 h. p.	mittleres	größtes	kleinstes
Winter	— 1.9	+ 0.9	— 0.9	— 0.65	+ 1.10	— 2.39
Frühling	+ 5.9	+ 12.0	+ 7.5	+ 8.22	+ 12.05	+ 6.43
Sommer	+ 14.3	20.5	15.5	+ 16.50	+ 17.54	15.75
Herbst	+ 6.6	11.5	7.8	+ 8.41	9.52	6.85

Extreme der Jahreszeiten.

	Mittel der höchsten Temperaturen	Mittel der niedrigsten Temperaturen	Differenz	1887/96 Höchste Temperatur	1887/96 Niedrigste Temperatur
Winter	+ 10.5	— 17.5	28.0	+ 13.2 (5. XII. 89)	— 25.5 (16. I. 93)
Frühling	+ 27.5	— 10.4	37.9	+ 34.8 (28. V. 92)	— 17.4 (6. III. 95)
Sommer	+ 32.2	+ 4.5	27.7	+ 36.3 (16. I. 93)	+ 2.7 (16. VI. 92)
Herbst	+ 26.2	— 7.1	33.3	+ 33.4 (4. IX 95)	— 13.9 (27. XI. 90)

Jahresübersicht.

	1887/96
Mittleres Jahresmittel	+ 8.21
Größtes Jahresmittel	+ 8.90 (94)
Kleinstes „	+ 7.19 (87)
Differenz	1.71
Grösstes Monatsmittel	+ 19.9 (VI. 89)
Kleinstes „	— 6.6 (I. 93)
Differenz	26.5
Größtes Pentadenmittel	+ 22.3 (26.—30. V. 92)
Kleinstes „	— 15.2 (16.—20. I. 93)
Differenz	37.5
Größtes Tagesmittel	+ 25.7 (17. VIII. 92)
Kleinstes „	— 19.6 (18. I. 93)
Differenz	45.3
Höchste beobachtete Lufttemperatur	36.3 (17. VIII. 92)
Niedrigste „ „	— 25.5 (16. I. 93)
Differenz	61.8
Mittel der höchsten Sommertemperaturen	+ 32.2
„ „ niedrigsten Wintertemperaturen	— 17.5
Differenz	49.8
Jahresmittel der interdiurnen Veränderlichkeit	1.87
Mittel der jährlich größten positiven und negativen Werte der interdiurnen Veränderlichkeit	+ 8.44 — 9.11
Größte Werte der interdiurnen Veränderlichkeit	+ 11.5 (29/30. I. 95) — 17.0 (14/15. I. 93)

Tabelle V.

Lufttemperatur. — Pentadenübersicht.

° C.

	Pentade	Pentadenmittel 1887/96 mittleres	größtes	kleinstes	Differenz	Interd. Veränderlichkeit 1887/96
1	Jan. 1.—5. Jan.	— 4.2	+ 2.3 (92)	— 9.7 (93)	12.0	2.4
2	„ 6.—10. „	— 1.9	+ 4.7 (90)	— 9.8 (91)	14.5	2.3
3	„ 11.—15. „	— 2.6	+ 4.2 (90)	— 10.0 (93)	14.2	2.6
4	„ 16.—20. „	— 2.7	+ 4.9 (90, 94)	— 15.2 (93)	20.1	2.2
5	„ 21.—25. „	+ 0.7	+ 4.3 (90)	— 2.6 (93)	6.9	2.3
6	„ 26.—30. „	+ 0.1	+ 4.7 (92)	— 10.5 (95)	15.2	1.9
7	Jan. 31.—4. Febr.	+ 0.3	+ 5.1 (94)	— 7.0 (88)	12.1	2.4
8	Febr. 5.—9. „	— 0.8	+ 6.6 (94)	— 13.6 (95)	20.2	2.3
9	„ 10.—14. „	— 1.0	+ 4.2 (96)	— 11.6 (95)	15.8	2.3
10	„ 15.—19. „	— 1.0	+ 5.7 (93)	— 6.1 (92)	11.8	1.8
11	„ 20.—24. „	— 0.5	+ 3.1 (93)	— 5.6 (88)	8.7	1.7
12	„ 25.—1. März	+ 0.6	+ 6.2 (94)	— 5.9 (88)	12.1	1.8
13	März 2.—6. März	— 0.2	+ 6.5 (91)	— 8.1 (89)	14.6	2.1
14	„ 7.—11. „	+ 3.2	+ 6.7 (94)	— 3.4 (92)	10.1	2.1
15	„ 12.—16. „	+ 2.7	+ 10.1 (93)	+ 3.0 (87)	13.1	1.8
16	„ 17.—21. „	+ 3.3	+ 10.9 (96)	+ 3.4 (88)	14.3	2.0
17	„ 22.—26. „	+ 5.6	+ 12.7 (96)	+ 0.4 (91)	12.3	1.7
18	„ 27.—31. „	+ 5.8	+ 11.2 (90)	+ 0.9 (91)	10.3	1.7
19	April 1.—5. April	+ 6.1	+ 10.7 (92)	+ 2.2 (88)	8.5	1.5
20	„ 6.—10. „	+ 7.5	+ 12.7 (94)	+ 1.1 (88)	11.6	1.5
21	„ 11.—15. „	+ 5.9	+ 10.2 (94)	+ 3.6 (91)	6.6	1.9
22	„ 16.—20. „	+ 8.1	+ 12.6 (95)	+ 4.6 (91)	8.0	1.9
23	„ 21.—25. „	+ 10.0	+ 14.2 (95)	+ 6.5 (91)	7.7	2.1
24	„ 26.—30. „	+ 10.1	+ 12.4 (95)	+ 6.7 (92)	5.7	2.2
25	Mai 1.—5. Mai	+ 10.9	+ 15.8 (89)	+ 7.5 (92)	8.3	2.3
26	„ 6.—10. „	+ 12.9	+ 17.5 (89)	+ 8.9 (92)	8.6	2.1
27	„ 11.—15. „	+ 13.5	+ 16.2 (89)	+ 8.2 (87)	8.0	1.9
28	„ 16.—20. „	+ 13.3	+ 19.3 (88)	+ 7.0 (95)	12.3	2.2
29	„ 21.—25. „	+ 13.8	+ 19.6 (89)	+ 7.2 (87)	12.4	1.9
30	„ 26.—30. „	+ 14.0	+ 22.3 (92)	+ 10.8 (94)	11.5	1.9
31	Mai 31.—4. Juni	+ 15.8	+ 21.8 (89)	+ 11.8 (93)	10.0	2.2
32	Juni 5.—9. „	+ 16.1	+ 21.6 (89)	+ 13.7 (91)	7.9	1.9
33	„ 10.—14. „	+ 15.1	+ 19.9 (89)	+ 10.7 (91)	9.2	2.2
34	„ 15.—19. „	+ 15.3	+ 20.8 (93)	+ 11.6 (91)	9.2	1.6
35	„ 20.—24. „	+ 16.3	+ 19.4 (88)	+ 14.2 (92)	5.2	1.9
36	„ 25.—29. „	+ 18.0	+ 21.2 (89)	+ 15.0 (96)	6.2	2.0
37	Juni 30.—4. Juli	+ 17.1	+ 20.3 (91)	+ 13.1 (96)	7.2	2.0
38	Juli 5.—9. „	+ 17.3	+ 21.3 (93)	+ 14.4 (90)	6.9	1.9
39	„ 10.—14. „	+ 16.7	+ 21.0 (87)	+ 11.8 (88)	9.2	2.0
40	„ 15.—19. „	+ 16.4	+ 19.4 (90)	+ 13.1 (92)	6.3	1.6
41	„ 20.—24. „	+ 17.0	+ 20.0 (93)	+ 14.1 (92)	5.9	1.6
42	„ 25.—29. „	+ 17.7	+ 21.6 (95)	+ 15.2 (89)	6.4	1.8

	Pentade	Pentadenmittel 1887/96 mittleres	größtes	kleinstes	Differenz	Interd. Veränderlichkeit 1887/96
43	Juli 30.—3. Aug.	+ 16.6	+ 19.9 (90)	+ 14.6 (93)	5.3	1.5
44	Aug. 4.—8. „	+ 16.1	+ 18.8 (94)	+ 12.9 (88)	5.9	1.7
45	„ 9.—13. „	+ 16.6	+ 21.6 (88)	+ 13.9 (87)	7.7	1.6
46	„ 14.—18. „	+ 16.2	+ 22.4 (92)	+ 12.3 (87)	10.1	1.7
47	„ 19.—23. „	+ 16.8	+ 22.7 (92)	+ 12.3 (87)	10.4	1.6
48	„ 24.—28. „	+ 15.8	+ 17.9 (88, 94)	+ 12.7 (89)	5.2	2.1
49	„ 29.—2. Sept.	+ 15.3	+ 18.6 (87)	+ 11.5 (91)	7.1	1.6
50	Sept. 3.—7. Sept.	+ 14.7	+ 20.9 (95)	+ 10.4 (94)	6.5	1.5
51	„ 8.—12. „	+ 13.3	+ 15.3 (89)	+ 9.6 (94)	5.7	1.4
52	„ 13.—17. „	+ 13.4	+ 15.9 (92)	+ 9.7 (89)	6.2	1.7
53	„ 18.—22. „	+ 12.9	+ 15.8 (90)	+ 8.0 (89)	7.8	1.7
54	„ 23.—27. „	+ 11.7	+ 15.0 (90)	+ 9.5 (87)	5.5	1.7
55	„ 28.—2. Okt.	+ 11.3	+ 14.1 (95)	+ 7.7 (94)	6.4	1.9
56	Okt. 3.—7. Okt.	+ 11.0	+ 13.0 (90)	+ 6.5 (88)	6.5	1.6
57	„ 8.—12. „	+ 10.3	+ 13.6 (93)	+ 6.6 (88)	7.0	1.5
58	„ 13.—17. „	+ 8.4	+ 12.6 (93, 91)	+ 3.2 (87)	9.4	1.8
59	„ 18.—22. „	+ 6.4	+ 11.8 (91)	+ 3.3 (92)	8.5	1.7
60	„ 23.—27. „	+ 6.3	+ 10.6 (91)	+ 0.8 (87)	9.8	1.4
61	„ 28.—1. Nov.	+ 6.5	+ 11.3 (92)	+ 2.0 (91)	9.3	1.8
62	Nov. 2.—6. Nov.	+ 5.6	+ 9.2 (94, 95)	+ 0.4 (91)	8.8	1.7
63	„ 7.—11. „	+ 4.4	+ 12.1 (95)	— 2.2 (88)	14.3	1.7
64	„ 12.—16. „	+ 4.3	+ 10.3 (95)	— 0.6 (87)	10.9	2.0
65	„ 17.—21. „	+ 4.1	+ 7.9 (91)	— 0.9 (87)	8.8	2.0
66	„ 22.—26. „	+ 1.7	+ 7.9 (88)	— 2.8 (92)	10.7	1.7
67	„ 27.—1. Dez.	+ 1.0	+ 6.3 (88)	— 6.7 (90)	13.0	1.9
68	Dez. 2.—6. Dez.	+ 1.8	+ 8.2 (91)	— 2.5 (89)	10.7	1.8
69	„ 7.—11. „	+ 0.9	+ 5.8 (91)	— 3.7 (90)	9.5	1.7
70	„ 12.—16. „	+ 0.4	+ 4.8 (91)	— 7.9 (90)	12.7	2.2
71	„ 17.—21. „	— 0.2	+ 3.3 (92)	— 4.7 (91)	8.0	1.9
72	„ 22.—26. „	— 0.7	+ 4.4 (89)	— 6.2 (92)	10.6	1.6
73	„ 27.—31. „	— 1.9	+ 4.3 (91)	— 9.3 (90)	13.6	1.8

Tabelle VI.

Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Temperaturgruppen.

Lufttemperatur.

Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Temperaturen nach Gruppen in Promille. 1887/96.

Temperaturgruppe	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Von + 25.9 bis + 25.0					3		3	6				
" 24.9 " 24.0					3	3	3	10				
" 23.9 " 23.0					0	23	25	10				
" 22.9 " 22.0					13	26	39	36	3			
" 21.9 " 21.0					6	80	45	36	3			
" 20.9 " 20.0					19	33	61	48	7			
" 19.9 " 19.0					29	43	81	71	13			
" 18.9 " 18.0					48	93	106	58	27			
" 17.9 " 17.0				3	74	106	106	90	40	3		
" 16.9 " 16.0				3	71	86	110	123	107	6		
" 15.9 " 15.0			3	3	68	130	149	123	83	19		
" 14.9 " 14.0			0	37	77	86	113	132	143	42		
" 13.9 " 13.0			16	47	84	116	97	106	127	52	10	
" 12.9 " 12.0			10	50	84	70	36	106	90	55	17	
" 11.9 " 11.0			16	87	123	46	19	45	117	84	7	
" 10.9 " 10.0		4	16	73	81	36	3		63	113	10	6
" 9.9 " 9.0		0	35	113	74	13	3		100	100	60	3
" 8.9 " 8.0	3	11	32	97	45				33	103	50	10
" 7.9 " 7.0	13	21	55	87	29				33	90	83	10
" 6.9 " 6.0	22	21	97	73	39				10	81	83	16
" 5.9 " 5.0	35	53	100	87	16					55	107	36
" 4.9 " 4.0	45	39	113	77	6					39	70	74
" 3.9 " 3.0	61	64	110	77	3					52	63	90
" 2.9 " 2.0	100	106	97	40	3					58	90	97
" 1.9 " 1.0	90	85	45	43						29	100	119
" 0.9 " 0.0	61	120	58	20						13	50	107
Von — 0.1 bis — 1.0	64	88	22	3						0	77	113
" 1.1 " 2.0	84	74	25							0	43	58
" 2.1 " 3.0	55	56	22							6	27	61
" 3.1 " 4.0	52	78	29								20	58
" 4.1 " 5.0	48	56	22								10	39
" 5.1 " 6.0	68	32	25								3	29
" 6.1 " 7.0	39	11	16								3	19
" 7.1 " 8.0	25	25	8								7	16
" 8.1 " 9.0	36	18	19								0	6
" 9.1 " 10.0	25	4	10								0	16
" 10.1 " 11.0	13	7									7	10
" 11.1 " 12.0	13	14									3	3
" 12.1 " 13.0	10	4										3
" 13.1 " 14.0	10	4										
" 14.1 " 15.0	6	4										
" 15.1 " 16.0	3	0										
" 16.1 " 17.0	6	0										
" 17.1 " 18.0	0	7										
" 18.1 " 19.0	3											
" 19.1 " 20.0	6											

Tabelle VII.

Lufttemperatur. — Frost-, Eis- und Sommertage.

Mittel und Extreme 1887/96.

	Zahl der Frosttage			Zahl der Eistage			Zahl der Sommertage		
	mittlere	größte	kleinste	mittlere	größte	kleinste	mittlere	größte	kleinste
Januar	22	29 (87)	7 (90)	12	22 (94)	2 (90)	—	—	—
Februar	19	28 (95)	9 (93)	6	18 (95)	1 (93)	—	—	—
März	13	23 (92)	3 (96)	3	7 (89, 92)	0 häufig	—	—	—
April	4	8 (91)	1 (94)	—	—	—	—	—	—
Mai	0.3	3 (92)	0 öfter	—	—	—	4	9 (89)	0 öfter
Juni	—	—	—	—	—	—	8	19 (89)	2 (94)
Juli	—	—	—	—	—	—	9	17 (87)	1 (88)
August	—	—	—	—	—	—	6	14 (92)	0 (96)
September	—	—	—	—	—	—	2	12 (95)	0 öfter
Oktober	3	5 (95)	0 öfter	—	—	—	0.2	1 (91, 95)	0 öfter
November	10	15 (93)	4 (94)	2	5 (90)	0 öfter	—	—	—
Dezember	19	29 (90)	10 (91)	7	24 (90)	1 (94)	—	—	—
Winter	60	75 (90/91)	42 (91/92)	25	42 (90/91)	13 (95/96)	—	—	—
Frühling	17	31 (92)	4 (96)	3	7 (89, 92)	0 öfter	3.6	9 (89)	0 (87, 9
Sommer	—	—	—	—	—	—	23.2	34 (95)	14 (91, 9
Herbst	13	18 (87)	4 (94)	2	5 (90)	0 öfter	2.4	12 (95)	0 oft
Jahr	90.7	111 (87, 95)	59 (94)	29.8	44 (95)	11 (94)	29.2	49 (95)	18 (94)

Tabelle VIII.

Trockene und nasse Perioden.

Häufigkeit des Vorkommens in den Jahren 1887/96.

Gesammtzahl der Perioden von	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 Tagen
ohne Niederschlag	275	108	69	49	23	24	13	8	6	2	4
mit Niederschlag	213	124	71	47	36	28	16	19	7	8	6

Gesammtzahl der Perioden von	12	13	14	15	16	17	18	19	21	23	26 Tagen
ohne Niederschlag	5	3	1	1	—	1	—	—	—	2	1
mit Niederschlag	6	6	3	—	4	2	1	0	1	—	—

Sommer- und Winter-Grenzen 1887/96.

Periode mit	Beginn der Periode			Ende der Periode		
	mittlerer	frühester	spätester	mittleres	frühestes	spätestes
Sommertagen	22. V.	11. V. 91	13. VI. 87	8. IX.	28. VII. 96	1. X. 91, 95
Frosttagen	26. X.	15. X. 89	26. XI. 94	14. IV.	2. IV. 94	8. V. 92
Eistagen	26. XI.	6. XI. 89	17. XII. 91	2. III.	4. II. 93	20. III. 88
Reif	16. X.	11. IX. 94	4. XI. 96	15. IV.	2. IV. 94	6. V. 96
Schnee	7. IX.	14. X. 87	27. XI. 96	18. IV.	21. III. 90	7. V. 93

Periode mit	Dauer der Periode in Tagen			Zahl der Tage	
	mittlere	größte	kleinste	nach Tab.	in Procenten der Periodendauer
Sommertagen	110	144 (91)	57 (96)	29.2	26.5 %
Frosttagen	172	202 (88/89)	140 (94/95)	90.7	52.8 %
Eistagen	96	130 (88/89)	73 (92/93)	29.8	31 %
Reif	181	211 (89/90)	165 (90/91)	26.9	14.8 %
Schnee	166	202 (92/93)	116 (89/90)	41.8	24 %

	Zahl der Tage mit Gewitter		
	Insges.	mittlere	größte
Januar	1	0.1	1 (92)
Februar	—	—	—
März	1	0.1	1 (96)
April	5	0.5	3 (90)
Mai	31	3.1	9 (90)
Juni	45	4.5	8 (89, 91)
Juli	66	6.6	9 (81, 89, 91)
August	47	4.7	9 (90)
September	11	1.1	3 (91)
Oktober	1	0.1	1 (92)
November	—	—	—
Dezember	—	—	—
Winter	1	0.1	1 (92)
Frühling	37	3.7	12 (90)
Sommer	158	15.8	24 (91)
Herbst	12	1.2	3 (91)
Jahr	208	20.8	30 (91)

Tabelle IX.

Absolute und relative Feuchtigkeit.

Absolute Feuchtigkeit.

Dampfspannung in mm Quecksilber. 1887/96.

	Mittel					
	7 h. a.	2 h. p.	9 h. p.	mittl.	größtes	kleinstes
Januar	3.6	3.9	3.7	3.7	5.0 (90)	2.7 (92)
Februar	3.7	4.1	3.9	3.9	4.7 (93)	2.7 (95)
März	4.4	4.9	4.8	4.7	5.5 (96)	3.9 (92)
April	5.6	5.7	6.0	5.8	6.7 (94)	5.2 (87, 93)
Mai	7.6	7.5	8.0	7.7	9.8 (89)	6.8 (96)
Juni	9.7	9.7	10.1	9.9	11.7 (89)	9.0 (93, 94)
Juli	10.6	10.7	11.2	10.8	11.8 (87)	9.5 (92)
August	10.4	10.3	10.7	10.5	11.3 (90)	9.4 (87)
September	8.6	9.1	9.3	9.0	9.6 (96)	8.3 (87, 94)
Oktober	6.8	7.1	7.0	7.0	8.1 (91)	5.8 (87)
November	5.1	5.4	5.3	5.3	5.9 (94, 95)	4.6 (96)
Dezember	4.1	4.3	4.1	4.2	4.9 (91)	2.9 (90)
Winter	3.8	4.1	3.9	4.1	4.4 (91/92)	3.4 (90/91)
Frühling	5.9	6.0	6.3	6.0	6.8 (89)	5.4 (92)
Sommer	10.2	10.2	10.7	10.4	10.7 (96)	10.0 (92)
Herbst	6.8	7.2	7.2	7.1	7.6 (91)	6.3 (87)
Jahr	6.68	6.99	7.01	6.83	7.05 (94)	6.06 (87)

	Extreme			
	mittlere		absolute	
	Max.	Min.	Max.	Min.
Januar	6.4	1.3	7.4 (29. 92)	0.6 (15. 93)
Februar	6.3	1.5	7.8 (1. 89)	0.6 (8. 95)
März	8.4	2.0	9.7 (28. 90)	1.1 (1. 90, 6. 95)
April	9.2	3.0	10.2 (25. 95)	2.0 (16. 87)
Mai	12.3	4.4	13.7 (15. 89)	3.1 (7. 92)
Juni	15.2	5.7	23.6 (10. 89)	3.4 (2. 88)
Juli	16.0	7.2	18.0 (25. 88)	6.2 (6. 87)
August	16.0	6.8	21.4 (9. 88)	5.6 (17. 95)
September	13.4	5.3	15.1 (3. 91)	4.2 (24. 87)
Oktober	11.0	3.8	13.2 (9. 93)	2.8 (27. 87)
November	8.6	2.5	11.3 (7. 95)	1.3 (26. 90)
Dezember	6.9	2.1	9.3 (5. 91)	1.1 (16. 90)
Winter	7.6	1.1	9.3 (5. XII. 91)	0.6 (15. I. 93, 8. II. 95)
Frühling	12.3	2.0	13.7 (15. III. 89)	1.1 (1. III. 90, 6. III. 95)
Sommer	17.6	5.5	23.6 (10. VI. 89)	3.4 (2. VI. 88)
Herbst	13.7	2.5	15.1 (3. IX. 91)	1.3 (26. XI. 90)
Jahr	17.6	1.1	23.6 (10. VI. 89)	0.6 (15. I. 93, 8. II. 95)

Relative Feuchtigkeit.

1887/96.

	Mittel					
	7 h. a.	2 h. p.	9 h. p.	mittl.	größtes	kleinstes
Januar	90.0	82.9	88.2	87.0	91.5 (88)	80.8 (94)
Februar	89.3	76.1	85.7	83.8	88.2 (88)	78.6 (96)
März	87.4	66.8	82.4	78.8	86.7 (88)	72.1 (93)
April	83.5	55.5	77.0	72.0	77.3 (89, 91)	61.4 (93)
Mai	76.9	51.2	74.3	67.4	74.4 (87)	61.6 (92)
Juni	79.5	56.2	78.5	71.4	78.2 (91)	66.0 (93)
Juli	82.1	59.4	82.1	74.6	79.2 (88)	69.5 (93)
August	85.7	58.9	83.0	76.1	83.3 (96)	69.1 (92)
September	89.5	60.7	86.2	78.8	83.7 (94)	74.7 (95)
Oktober	89.6	70.1	86.7	82.1	83.9 (94)	78.7 (92)
November	89.1	78.7	87.7	85.1	88.2 (93)	79.6 (95)
Dezember	89.4	83.3	87.7	86.9	90.4 (87)	82.8 (91)
Winter	89.6	80.8	87.2	86.0	91.1 (87)	81.7 (93)
Frühling	82.6	57.8	77.9	72.8	76.4 (89)	66.4 (93)
Sommer	82.4	58.2	81.2	74.1	78.2 (96)	70.5 (92)
Herbst	89.5	69.8	86.9	82.1	83.9 (94)	79.3 (95)
Jahr	86.0	66.2	83.3	78.7	81.1 (88)	75.6 (93)

	Extreme			
	mittlere		Absolute	
	Max.	Min.	Max.	Min.
Januar	99.4	58.5	100 oft	26 (21. 87)
Februar	99.6	53.8	100 oft	41 (11. 87)
März	99.3	40.2	100 oft	21 (28. 93)
April	97.8	31.6	100 oft	25 (20/26. 93)
Mai	95.8	29.6	100 (11. 89)	20 (28. 92)
Juni	96.9	32.9	99 (7. 88, 23. 93)	28 (26. 89, 2. 96)
Juli	97.5	34.2	100 (16. 89, 29. 93)	24 (7. 93)
August	98.2	36.4	100 (18. 93, 27. 94)	24 (17. 92)
September	98.1	38.8	100 oft	28 (10. 95)
Oktober	99.3	47.1	100 oft	41 (1. 90)
November	99.6	51.9	100 oft	42 (25. 90)
Dezember	99.7	61.2	100 oft	47 (11. 91)
Winter	100	49.7	100 oft	26 (21. I. 87)
Frühling	99.5	27.2	100 oft	20 (28. V. 92)
Sommer	98.5	29.8	100 oft	24 (17. VIII. 92, 7. VII. 93)
Herbst	100	37.9	100 oft	28 (10. IX. 95)
Jahr	100	26.0	100 oft	20 (28. V. 92)

Tabelle X.
Niederschläge.
Niederschlagshöhe.

	mittlere Summe eines Monats	größte eines Monats	kleinste eines Monats	Größte Höhe eines Tages 1887/96 mittlere	Größte Höhe eines Tages 1887/96 absolute
Januar	33.4	81.5 (90)	2.6 (87)	8.9	19.8 (29. 90)
Februar	32.4	80.6 (93)	5.1 (90)	7.9	20.0 (12. 93)
März	49.3	118.3 (88)	22.8 (94)	10.6	21.6 (9. 88)
April	31.5	50.9 (96)	1.6 (93)	8.8	15.3 (29. 95)
Mai	34.1	54.6 (89)	15.6 (94)	11.0	22.5 (22. 90)
Juni	49.2	127.8 (91)	20.2 (87)	11.8	33.3 (17. 96)
Juli	77.0	135.0 (94)	31.2 (92)	20.2	38.3 (16. 87)
August	63.2	121.2 (94)	27.8 (93)	14.8	31.4 (28. 94)
September	35.5	49.4 (94)	1.7 (90)	9.6	16.4 (11. 96)
Oktober	55.8	83.4 (95)	27.5 (87)	14.7	22.0 (2. 93)
November	34.4	102.6 (90)	9.3 (92)	12.7	44.0 (24. 90)
Dezember	36.9	79.5 (91)	5.9 (90)	9.1	27.0 (6. 95)
	mittlere Summe der Jahreszeit	größte Summe der Jahreszeit	kleinste Summe der Jahreszeit		
Winter	102.7	159.1 (91/92)	59.5 (90/91)	8.7	27.0 (6. XII. 95)
Frühling	114.9	171.5 (88)	60.5 (93)	10.1	22.5 (22. V. 90)
Sommer	189.4	305.6 (94)	104.1 (92)	15.6	38.3 (16. VII. 87)
Herbst	125.8	172.4 (94)	89.3 (91)	12.3	44.0 (24. XI. 90)
	Jahresmittel	größtes	kleinstes		
Jahressumme	532.70	658.3 (94)	367.4 (92)	11.7	44.0 (24. XI. 90)

Zahl der Niederschlagstage und Niederschlagsdichtigkeit.

	Zahl der Tage mit Niederschlag ohne untere Grenze mittlere	ohne untere Grenze größte	ohne untere Grenze kleinste	mehr als 0.2 mm mittlere	mehr als 0.2 mm größte	mehr als 0.2 mm kleinste	Mittlere Höhe eines Niederschlagstages
Januar	17.1	27 (95)	4 (87)	11.3	20 (95)	4 (87)	2.0
Februar	15.9	27 (89)	6 (90)	11.4	22 (89)	3 (93)	2.0
März	19.0	28 (88)	13 (92, 94)	14.9	25 (88)	9 (94)	2.6
April	15.9	24 (91)	3 (93)	11.7	19 (96)	2 (93)	2.0
Mai	15.0	21 (87)	10 (88)	9.9	20 (87)	4 (94)	2.1
Juni	16.4	23 (90)	8 (87)	12.7	18 (91)	5 (87)	3.0
Juli	19.1	27 (88)	11 (92)	15.3	23 (88)	10 (87)	4.0
August	19.3	26 (94)	11 (87)	16.1	25 (94)	10 (87)	3.3
September	13.8	18 (89, 92)	7 (95)	10.1	15 (96)	1 (90)	2.6
Oktober	19.5	22 (87, 89)	15 (91)	13.1	18 (89)	6 (96)	2.8
November	16.3	23 (90)	8 (92)	11.2	19 (90)	4 (92)	2.1
Dezember	17.8	24 (95)	10 (90)	12.3	18 (87, 95)	5 (90)	2.1
Winter	50.8	65 (94/95)	44 (90/91)	35.0	51 (94/95)	24 (90/91)	2.0
Frühling	49.9	62 (91)	34 (93)	36.5	48 (87)	21 (94)	2.3
Sommer	54.8	70 (90, 94)	33 (87)	44.1	57 (94)	25 (87)	3.5
Herbst	49.6	57 (93)	39 (95)	34.4	44 (93)	24 (92)	2.5
Jahr	205.1	231 (91)	174 (87)	150.0	165 (95)	126 (92)	2.63

Tabelle XI.

Niederschläge und Gewitter. — Pentadenübersicht.

1887/96.

	Pentade	Mittlere Zahl der Tage mit Niederschlag	Mittlere Zahl der Tage mit Gewitter		Pentade	Mittlere Zahl der Tage mit Niederschlag	Mittlere Zahl der Tage mit Gewitter
1	Jan. 1.—5. Jan.	2.6	0	37	Juni 30.—4. Juli	3.1	1.0
2	„ 6.—10. „	2.4	0.1	38	Juli 5.—9. „	3.0	1.2
3	„ 11.—15. „	2 6	0	39	„ 10.—14. „	3.8	1.1
4	„ 16.—20. „	2.5	0	40	„ 15.—19. „	3.6	0.9
5	„ 21.—25 „	3.7	0	41	„ 20.—24. „	3.5	1.7
6	„ 26.—30. „	3.5	0	42	„ 35.—29. „	2.8	0.9
7	Jan. 31.—4. Febr.	3.3	0	43	Juli 30.—3. Aug.	3.4	0.8
8	Febr. 5.—9. „	3.0	0	44	Aug. 4.—8. „	3.3	1.0
9	„ 10.—14. „	3.3	0	45	„ 9.—13. „	3.0	1.0
10	„ 15.—19. „	3.3	0	46	„ 14.—18. „	3.5	0.8
11	„ 20.—24. „	2.2	0	47	„ 19.—23. „	3.3	0.8
12	„ 25.—1. März	2.8	0	48	„ 24.—28. „	3.3	0.6
				49	„ 29.—2. Sept.	1.6	0.1
13	März 2.—6. März	3.4	0				
14	„ 7.—11. „	3.9	0.1	50	Sept. 3.—7. Sept.	2.7	0.4
15	„ 12.—16. „	2.6	0	51	„ 8.—12. „	2.5	0.2
16	„ 17.—21. „	3.2	0	52	„ 13.—17. „	2.0	0.2
17	„ 22.—26. „	3.0	0	53	„ 18.—22. „	2.0	0.2
18	„ 27.—31. „	3.2	0	54	„ 23.—27. „	1.9	0
				55	„ 28.—2. Okt.	2.4	0.1
19	April 1.—5. April	2.0	0.1				
20	„ 6.—10. „	1.8	0	56	Okt. 3.—7. Okt.	3.3	0
21	„ 11.—15. „	3.2	0.1	57	„ 8.—12. „	2.7	0.1
22	„ 16.—20. „	3.2	0.2	58	„ 13.—17. „	3.3	0
23	„ 21.—25. „	3.0	0.1	59	„ 18.—22. „	3.8	0
24	„ 26.—30. „	3.4	0.3	60	„ 23.—27. „	3.4	0
				61	„ 28.—1. Nov.	3.2	0
25	Mai 1.—5. Mai	2.9	0.6				
26	„ 6.—10. „	2.2	0 1	62	Nov. 2.—6. Nov.	3.0	0
27	„ 11.—15. „	1.9	0.1	63	„ 7.—11. „	2.7	0
28	„ 16.—20. „	3.7	0.9	64	„ 12.—16. „	2.4	0
29	„ 21.—25. „	2.3	1.0	65	„ 17.—21. „	3.4	0
30	„ 26.—30. „	2.6	0.4	66	„ 22.—26. „	2.4	0
				67	„ 27.—1. Dez.	2.7	0
31	Mai 31.—4. Juni	2.7	0.9				
32	Juni 5.—9. „	3.1	1.1	68	Dez. 2.—6. Dez.	3.5	0
33	„ 10.—14. „	3.3	0.6	69	„ 7.—11. „	3.3	0
34	„ 15.—19. „	3.3	0.4	70	„ 12.—16. „	2.6	0
35	„ 20.—24. „	3.1	1.1	71	„ 17.—21. „	2.6	0
36	„ 25.—29. „	2.5	0.7	72	„ 22.—26. „	3.3	0
				73	„ 27.—31. „	3.1	0

Tabelle XII.

Verteilung der Niederschlagstage nach der Höhe. Regen, Schnee, Schneedecke und Hagel.

Verteilung der Niederschlagstage nach der Menge.

	0.0	0.1—0.2	0.3—1.0	1.1—5.0	5.1—10.0	10.1—15.0	15.1—20.0	20.1—25.0	25.1—30.0	> 30 mm
Januar	11.6	21.4	20.8	38.7	2.9	3.5	1.2	—	—	—
Februar	7.3	17.2	21.1	44.4	6.6	1.3	1.3	—	—	—
März	9.2	9.2	24.5	38.6	14.7	2.7	0.5	0.5	—	—
April	3.6	11.5	28.8	44.6	7.2	3.6	0.7	—	—	—
Mai	3.9	16.5	25.2	37.8	12.6	1.6	1.6	0.8	—	—
Juni	5.3	9.3	20.0	44.0	15.3	4.0	0.7	0.7	—	0.7
Juli	2.8	11.8	20.8	36.5	18.5	3.9	1.1	2.8	—	1.7
August	2.9	8.6	27.4	38.3	15.4	5.1	0.6	1.1	—	0.6
September	7.5	13.5	17.3	44.4	9.0	6.8	0.8	0.8	—	—
Oktober	7.0	16.6	24.6	33.7	11.2	4.3	1.6	1.1	—	—
November	8.6	18.4	30.9	30.3	7.2	2.6	1.3	—	—	0.7
Dezember	13.6	15.9	25.6	30.1	12.5	1.1	0.6	—	0.6	—
Winter	10.8	18.2	22.5	37.7	7.3	2.0	0.7	—	0.2	—
Frühling	5.6	12.1	26.2	40.3	11.5	2.6	0.9	0.4	—	—
Sommer	3.7	9.9	22.7	39.6	16.4	4.3	0.8	1.5	—	1.0
Herbst	7.7	16.2	24.3	36.1	9.8	4.6	1.2	0.6	—	0.2
Jahr	6.9	14.2	23.9	38.5	11.1	3.5	1.0	0.7	0.1	0.3

Regen und Schnee.

	Zahl der Tage mit Regen			Zahl der Tage mit Schnee		
	mittlere	größte	kleinste	mittlere	größte	kleinste
Januar	7.9	14 (90)	3 (87)	10.4	24 (95)	2 (87)
Februar	9.7	27 (89)	0 (90)	9.8	20 (89)	3 (91)
März	13.5	19 (89)	4 (92)	7.1	15 (91)	2 (94)
April	13.7	20 (90, 91)	3 (93)	1.9	3 oft	0 oft
Mai	14.2	20 (87)	10 (88)	0.5	1 oft	0 oft
Juni	15.7	23 (90)	5 (87)	—	—	—
Juli	18.2	26 (88)	10 (87)	—	—	—
August	18.7	24 (94)	10 (87)	—	—	—
September	12.1	15 (89)	8 oft	—	—	—
Oktober	17.7	21 (93)	12 (91)	1.0	3 (87, 90)	0 oft
November	13.7	18 (87)	6 (92)	2.9	7 (89)	1 oft
Dezember	10.5	20 (91)	1 (90)	8.2	16 (87)	1 (88)
Winter	28.1	44 (88)	15 (90)	28.4	50 (94)	22 (89, 93)
Frühling	41.4	54 (91)	26 (92)	9.5	15 (88)	3 (94)
Sommer	52.6	69 (90)	25 (87)	—	—	—
Herbst	43.5	51 (93)	37 (95)	3.9	8 (90)	1 (94)
Jahr	165.5	193 (89)	132 (87)	41.8	65 (95)	27 (94)

Schneedecke und Hagel.

	Zahl der Tage mit Schneedecke		Zahl der Tage mit Hagel		
	mittlere	größte	insge-sammt	mittlere	größte
Januar	17.4	31 oft	1	0.1	1 (92)
Februar	14.0	28 (90, 95)	—	—	—
März	9.8	23 (88, 95)	1	0.1	1 (93)
April	0.5	2 (91)	1	0.1	1 (94)
Mai	0.1	1 (92)	—	—	—
Juni	—	—	—	—	—
Juli	—	—	—	—	—
August	—	—	1	0.1	1 (94)
September	—	—	1	0.1	1 (94)
Oktober	—	—	—	—	—
November	1.8	5 (90)	—	—	—
Dezember	14.8	31 (90)	—	—	—
Winter	46.6	70 (90)	—	—	—
Frühling	10.4	24 (94)	—	—	—
Sommer	—	—	—	—	—
Herbst	1.8	5 (90)	—	—	—
Jahr	58.8	99 (95)	5	0.5	3 (94)

Experimentelle Untersuchungen über die Geschwindigkeit und die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen.

Von

Emil Wiechert.

Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1898 von Ed. Riecke.

§ 1. Vorwort.

Den ersten Anlaß für die weiterhin beschriebenen Versuche gab Röntgen's Entdeckung der nach ihm benannten Strahlen. Aus der Art ihrer Entstehung und aus ihrem Verhalten glaubte ich schließen zu dürfen, daß sie elektromagnetische Wellen von sehr kurzer Schwingungsdauer oder — noch wahrscheinlicher — von stoßartigem Charakter sind, die durch Zusammenprallen der von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen der Kathodenstrahlen mit entgegenstehenden materiellen Theilchen verursacht werden. Diese Ansicht, die ich in einer im Frühjahr 1896 veröffentlichten Abhandlung [1]) näher ausführte, verlangt die Richtigkeit der Emissionshypothese der Kathodenstrahlen und setzt in diesen weit größere Geschwindigkeiten voraus, als in den Wärmebewegungen selbst bei den höchsten unseren Beobachtungen zugänglichen Temperaturen im Mittel vorkommen. Ich mußte daher versuchen, die damals noch vielfach und von hervorragenden Physikern angegriffene Emissionshypothese zu stützen und ein Urtheil über die Geschwindigkeit der Strahlen zu gewinnen. Indem ich für diesen Zweck Beobachtungen über das Potentialgefälle im Entladungsrohr und über die magnetische Ablenkbarkeit der Ka-

1) E. Wiechert, Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung, Abh. d. Physik.-ökonomischen Ges. in Königsberg Pr., Jahrg. 1896 p. 1.

thodenstrahlen kombinirte, bemerkte ich mit Ueberraschung, daß die Ablenkbarkeit viel größer ist, als möglich wäre, wenn die Kathodenstrahlen aus Strömen der gewöhnlichen chemischen Atome oder Atomgruppen beständen. Sollte die Emissionshypothese überhaupt aufrecht erhalten werden, so blieb nur übrig zu schließen, daß die von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen vielmals geringere Masse als die Wasserstoffatome besitzen [1]). Hierdurch gewann die Frage nach der Natur der Kathodenstrahlen für die von mir vertretene Theorie der Elektrodynamik eine fundamentale Bedeutung, denn es drängte sich die Vermuthung auf, daß in den Strahlen eben die elektrischen speciellen materiellen Atome sich frei bewegen, deren die Theorie bedarf, um die metallische Leitung und die Aenderung der molekularen Ladung in ihr System befriedigend einzureihen [2]).

Für die Geschwindigkeit der Strahlen mußten außerordentlich hohe Werthe gefolgert werden, Werthe, die zwar nicht die Lichtgeschwindigkeit erreichen, aber doch nicht weit hinter ihr zurückbleiben. Eine direkte Messung der Geschwindigkeit erschien mir nun als meine vornehmste Aufgabe, denn sollte sie glücken und die zu erwartenden Werthe wirklich ergeben, so wäre damit die Emissionshypothese gesichert und für die von mir vertretene Theorie der Elektrodynamik ein neuer Grundstein gelegt.

Bestärkt in meinen Anschauungen wurde ich durch einen Vortrag meines jetzigen verehrten Kollegen Prof. Dr. Des Coudres auf der Naturforscherversammlung in Frankfurt a. M., durch den ich erfuhr, daß Des Coudres durch direkte Messungen hatte nachweisen können, daß die Strahlen jedenfalls mindestens 2.10^6 Meter in der Sekunde zurücklegen. Diese Zahl lag zwar noch weit unter dem Bereich, den die Theorie mir anwies, aber doch hoch genug, um im Verein mit meinen eigenen Messungen der Hypothese der gewöhnlichen chemischen Ionen zu widersprechen und die Hoffnung zu erwecken, daß es möglich sein werde, den noch fehlenden Weg zurückzulegen.

Meine Arbeiten im mathematisch-physikalischen Institut der Königsberger Universität, die wegen meiner bevorstehenden Uebersiedelung nach Göttingen Anfang 1897 abgebrochen werden mußten, führten zunächst noch nicht ans Ziel; es gelang nur, das

---

1) Vergl. den weiterhin citirten Vortrag vom 7. Januar 1897.

2) Vergl. diese „Nachrichten" etc., 1898, Heft 1, wo in der Arbeit: „Hypothesen für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen", p. 87—106, auch meine früheren hierher gehörigen Veröffentlichungen citirt sind.

Resultat von Des Coudres zu bestätigen und die Grenze etwa 10 mal höher zu legen. Ueber die vorläufigen Resultate und die sich anschließenden Folgerungen berichtete ich in dem Doppelvortrag[1]: I. Ueber das Wesen der Elektricität, II. Experimentelles über die Kathodenstrahlen, am 7. Januar 1897.

Dank dem Entgegenkommen von Herrn Professor Dr. Voigt und der Unterstützung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen konnte ich die Experimente im Sommer 1897 wieder aufnehmen und hatte dieses Mal den gewünschten Erfolg: Es wurde möglich, die Geschwindigkeit zu messen, und die erhaltenen Werthe lagen wirklich in dem von den theoretischen Erwägungen vorgesehenen Intervalle.

Auf der Naturforscherversammlung in Braunschweig, September 1897, gab ich einen vorläufigen Bericht[2]; eine ausführlichere Mittheilung, die auch spätere Beobachtungen berücksichtigt, folgt weiterhin. Insbesondere wurden genauere Messungen über die magnetische Ablenkbarkeit hinzugefügt, um ein schärferes Urtheil über die Masse der bewegten Theilchen zu gewinnen als in der ersten Veröffentlichung vom 7. Januar 1897.

Es sind neuerdings vielfach von anderer Seite Arbeiten veröffentlicht worden, welche die Emissionshypothese in dem gleichen Sinne verwerthen wie ich und ihr äußerst wichtige weitere Stützpunkte gegeben haben. Ich will in der vorliegenden Mittheilung nicht näher darauf eingehen, möchte aber bemerken, daß in allen diesen Arbeiten die Geschwindigkeit eine rein hypothetische Rolle spielt, sodaß ihre wirkliche Messung nur noch dringender nothwendig scheint.

Es gereicht mir zu hoher Freude, den Direktoren der physikalischen Institute in Königsberg und Göttingen, den Herren Professoren Volkmann, Voigt und Riecke sowie der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen für die gütige Unterstützung meiner Arbeit an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank aussprechen zu können.

---

1) Sitzungsberichte der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg Pr., 1897, p. 1, Naturwiss. Rundschau, Mai 1897, Beibl. d. Annalen d. Ph. u. Ch., Bd. 21, p. 443, 1897. Am Schlusse des letzteren Referates steht leider zweimal an Stelle von 2000 die nicht hingehörige Zahl 200.

2) Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Aerzte, Vers. z. Braunschweig 1897, 2. Th. I. Hälfte, p. 50—52.

§ 2. Die Emissionshypothese der Kathodenstrahlen.

Nach der Emissionshypothese sind die Kathodenstrahlen Ströme negativ elektrischer Theilchen, die von der Kathode ausgeschleudert werden.

e sei die Ladung, elektrostatisch gemessen, v die Geschwindigkeit der Theilchen. Die gesammte Energie der Bewegung wollen wir $= mv^2/2$ setzen und m als die Masse der Theilchen bezeichnen. Es umfaßt dann m, wie in den früheren Arbeiten auseinandergesetzt wurde, jedenfalls auch einen Antheil, der sich rein elektrodynamisch erklärt und auf Rechnung der Ladung e kommt.

Die Bewegung der Theilchen ist im Wesentlichen durch die elektrischen Kräfte an der Kathode verursacht worden. Bedeutet P_v die Potentialdifferenz, die für sich allein die volle Geschwindigkeit v ergeben würde, die „äquivalente Potentialdifferenz", wie wir sagen wollen, so folgt für die Energie der weitere Werth eP_v, und wir erhalten daher:

$$(1) \qquad \frac{m}{e} v^2 = 2P_v.$$

P_E sei die Elektrodenspannung, also die gesammte bei der Entladung wirksame Spannung. Aus dem Verhalten der Gasentladungen ist zu schließen, daß bei stärkeren Verdünnungen ein sehr großer Theil von P_E an der Kathode verbraucht wird, daß also dann P_v nicht viel kleiner ist als P_E. —

Für die Beobachtungen kommen vor allem die Ablenkungen der Kathodenstrahlen in elektrischen und magnetischen Feldern in Betracht.

Bedeutet in einem elektrischen Felde R die ablenkende Feldintensität, d. h. die Komponente des elektrischen Vektors senkrecht zur Bahn der Strahlen, so wirkt auf jedes Theilchen die ablenkende mechanische Kraft eR. Die Beschleunigung senkrecht zur Bahn wird durch v^2/r angegeben, wenn r den Krümmungsradius bezeichnet; es besteht hiernach die Beziehung $mv^2/r = eR$ oder:

$$(2) \qquad \frac{m}{e} v^2 = rR.$$

Aus dieser Formel folgt zunächst, daß für eine gegebene Art von Kathodenstrahlen das Produkt rR unabhängig von der ablenkenden Feldintensität ist. Da andererseits bei gegebener

Feldintensität die Ablenkung um so geringer ist, einen je größeren Werth rR hat, so kann rR die „elektrische Steifigkeit" der Strahlen genannt werden. Entsprechend empfiehlt sich für $1/rR$ der Name „elektrische Ablenkbarkeit".

Ein Vergleich von (1) und (2) ergiebt:

$$P_v = \frac{rR}{2}, \tag{3}$$

und zeigt, daß durch Beobachtung der elektrischen Ablenkbarkeit die äquivalente Potentialdifferenz P_v bestimmt werden kann.

Bei der Untersuchung der Ablenkungen durch magnetische Kräfte soll die ablenkende magnetische Feldintensität, also die zur Bahn normale Komponente des magnetischen Rotors mit H bezeichnet werden. Bedeutet dann V die Lichtgeschwindigkeit und r wiederum den Krümmungsradius der Bahn, so ergeben sich für die ablenkende mechanische Kraft die beiden Werthe veH/V und mv^2/r, und wir erhalten daher die Beziehung:

$$\frac{m}{e} v V = rH. \tag{4}$$

rH spielt hier die gleiche Rolle wie vorhin rR und kann die „magnetische Steifigkeit" genannt werden; ihr reciproker Werth $1/rH$ ist dann die „magnetische Ablenkbarkeit".

Für die theoretische Verwerthung der Beobachtungen ist es vortheilhaft, die Formeln durch Bezugnahme auf die Ergebnisse der Elektrolyse etwas umzugestalten.

Die elektrische molekulare Minimalladung, das „Elektron" in der Ausdrucksweise von Stoney, sei ι. Es muss dann die Ladung e der Theilchen in den Kathodenstrahlen $= n\iota$ sein, wobei n eine ganze Zahl bedeutet.

Neben der Grammeinheit, die für m benutzt wurde und auch beibehalten werden soll, wollen wir als Einheit für die Molekularmasse in der Weise der Chemie 1/16 der Masse eines Sauerstoffatomes annehmen (sodaß $H = 1{,}008$ wird) und den zugehörigen Werth für ein Theilchen der Kathodenstrahlen mit $n\alpha$ bezeichnen. Es bedeutet dann α die auf 1 Elektron kommende Molekularmasse der Theilchen; sollten sie einatomig und einwerthig sein, so würde α zugleich die volle Molekularmasse bezogen auf $O = 16$ angeben, und sollten sie aus den gewöhnlichen chemischen Atomen bestehen, so wäre der kleinste für α mögliche Werth die Atommasse des Wasserstoffs, also 1,008.

Die Masse eines Sauerstoffatomes in Grammen gemessen sei

$16a$; es ist dann a der Grammwerth unserer Einheit für die Molekularmasse. Da bei der Elektrolyse durch 1 Coulomb $= V/10$ elektrostatische Einheiten $0{,}8288 \,.\, 10^{-4}$ Gramm Sauerstoff ausgeschieden werden, ist ι, d. i. die Ladung von $8a$ Gramm Sauerstoff, $= 8aV10^3/0{,}8288$. Werden hierneben die Beziehungen $e = n\iota$ und $m = n\alpha a$ berücksichtigt, so folgt

$$(5)\qquad \alpha = \frac{m}{e} \cdot 0{,}9653 \cdot 10^4 V.$$

Hierin ist e nach elektrostatischen Einheiten gerechnet. Für die elektromagnetische Einheit muß der Faktor V fortfallen, für die praktische Einheit des „Coulomb“ muß überdies 10^4 durch 10^5 ersetzt werden.

Indem wir nun daran gehen, in unseren früheren Formeln $\frac{m}{e}$ durch α zu ersetzen, sollen zugleich im Interesse der Anwendungen für P_v und R die praktischen Einheiten eingeführt werden; es soll also nun die bei der Aussendung der Kathodenstrahlen äquivalente Potentialdifferenz P_v, d. h. die Potentialdifferenz, welche der Bewegungsenergie der Kathodenstrahlen entspricht, nach Volt, und die ablenkende elektrische Kraft R nach Volt per Centimeter gerechnet werden. — Für die ablenkende magnetische Kraft H ist eine besondere Festsetzung der Einheit nicht nothwendig, da ja die theoretische Centimeter-Gramm-Sekunden-Einheit auch in der Praxis verwendet wird: (1), (2), (3), (4), (5) ergeben nun:

$$(6)\qquad \alpha\left(\frac{v}{V}\right)^2 = 2 \,.\, 1{,}073 \,.\, 10^{-9} P_v; \quad \alpha v^2 = 2 \,.\, 0{,}965 \,.\, 10^{12} P_v;$$

$$(7)\qquad \alpha\left(\frac{v}{V}\right)^2 = 1{,}073 \,.\, 10^{-9} (rR); \quad \alpha v^2 = 0{,}965 \,.\, 10^{12} (rR);$$

$$(8)\qquad \alpha \frac{v}{V} = 3 \,.\, 1{,}073 \,.\, 10^{-7} (rH); \quad \alpha v = 0{,}965 \,.\, 10^4 (rH);$$

$$(9)\qquad P_v = \frac{(rR)}{2};$$

$$(10)\qquad \alpha = \frac{9}{2} \,.\, 1{,}073 \,.\, 10^{-5} \frac{(rH)^2}{P_v} = 0{,}965 \,.\, 10^{-4} \frac{(rH)^2}{(rR)};$$

$$(11)\qquad \frac{v}{V} = \frac{1}{150} \frac{P_v}{(rH)} = \frac{1}{300} \frac{(rR)}{(rH)};$$

$$(12) \qquad \frac{v}{V} = \frac{4{,}63}{10^5\sqrt{\alpha}} P_v = \frac{3{,}28}{10^5\sqrt{\alpha}}(rR) = \frac{3.1{,}073}{10^7.\alpha}(rH).$$

Unsere Formeln ermöglichen es, durch Kombination von Beobachtungen über das Potentialgefälle im Entladungsrohr und über die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen die Molekularmasse α zu beurtheilen. — Aus Untersuchungen von E. Warburg[1]) ist zunächst zu schließen, daß das Potentialgefälle an der Kathode mindestens etwa 200 Volt beträgt, und daß dieser Werth bei den gewöhnlichen Versuchen in der Regel überschritten wird. Wir haben dann $P_v > 200$, also nach (10):

$$\alpha < \frac{(rH)^2}{4.10^6}.$$

Diese Formel gab den im Vorwort erwähnten Anlaß für meine Schlußfolgerungen über das Wesen der Kathodenstrahlen, denn sie beweist an der Hand der Beobachtungen über die magnetische Ablenkbarkeit der Strahlen sogleich, daß es sich nicht um Ströme der gewöhnlichen chemischen Atome oder Atomgruppen handelt. Der kleinste Werth von α, der dann möglich wäre, ist die Molekularmasse des Wasserstoffatomes, also ca. 1; dieser nun würde verlangen:

$$rH > 2000,$$

während die Beobachtungen stets weit kleinere Werthe als 2000 ergeben. Selbst in den stark verdünnten, mit hoher Schlagweite arbeitenden Röntgen-Röhren fand ich nur Werthe bis etwa 700 hinauf. Für die schwachen, bei geringer Verdünnung auftretenden Strahlen konnte ich andererseits Werthe bis zu etwa 100 herab beobachten. Mittels unserer Ungleichung läßt sich hieraus schließen:

$$\alpha < \frac{1}{400}.$$

Es handelt sich also in den Kathodenstrahlen um weit kleinere Massentheilchen, als wir sie in den chemischen Atomen kennen.

Die Gleichung (10), der wir diese obere Grenze für α verdanken, ermöglicht es andererseits auch in einfacher Weise eine untere Grenze festzustellen. Da wir nämlich die äquivalente Spannung P_v kleiner annehmen müssen als die Elektrodenspannung P_E, folgt

---

1) Wied. Ann. Bd. 31, 1887, p. 545.

$$\alpha > \frac{9}{2} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(r\,H)^2}{P_n} ,$$

sodaß es für unseren Zweck genügt, die Elektrodenspannung und die magnetische Steifigkeit festzustellen. In dem erwähnten Vortrag vom 7. Januar 1897, fügte ich so, mich auf eigene Messungen stützend, zu der eben angegebenen Grenzbestimmung die weitere:

$$\alpha > \frac{1}{4000} .$$

Durch Verbindung dieser Feststellungen mit (6) oder (8) ergiebt sich nun auch ein Urtheil über die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen. Für die schwachen Kathodenstrahlen mit der magnetischen Steifigkeit $Hr = 100$ ist nach (8):

$$\frac{1}{80} < \frac{v}{V} < \frac{1}{8}$$

und für die kräftigen Strahlen mit der Steifigkeit 700:

$$\frac{1}{11} < \frac{v}{V} < \frac{9}{10} .$$

Es folgt hieraus, daß die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen nicht gar weit hinter der Lichtgeschwindigkeit zurückbleibt und für die sehr kräftigen Strahlen sogar bis nahe an diesen für die elektromagnetischen Erscheinungen ausgezeichneten Werth hinaufgeht.

Vergleichen wir nun mit unseren Zahlen, die für die Kathodenstrahlen fortgeschleuderte Theilchen anderer Art als die gewöhnlichen chemischen Atome voraussetzen, noch die Werthe, die nach anderen theoretischen Vorstellungen erwartet werden müßten.

Sollten die Kathodenstrahlen aus gewöhnlichen chemischen Atomen bestehen, so wäre $\alpha \geqq 1$ und wir hätten für $Hr = 100$:

$$\frac{v}{V} \leqq \frac{1}{30000} ,$$

für $Hr = 700$

$$\frac{v}{V} \leqq \frac{1}{4000} .$$

Wären andererseits die Kathodenstrahlen wirklich die longitudinalen elektrodynamischen Wellen, für die sie des öfteren er-

klärt worden sind, so müßten für v weit größere Werthe als V erwartet werden.

Diese Zusammenstellung zeigt deutlich, daß eine direkte Messung der Geschwindigkeit zu einer Entscheidung zwischen den verschiedenen Theorien führen müßte. Eben unter diesem Gesichtspunkt wurden die im Folgenden beschriebenen experimentellen Untersuchungen unternommen.

§ 3. Frühere Messungen der Geschwindigkeit.

a) Goldstein[1]) schaltete 1879 in den Schließungskreis eines Funkeninduktors ein Entladungsrohr mit 2 um 20 cm voneinander entfernten Kathoden ein und beobachtete dann, daß ebenso wie bei geringeren Abständen, eine gegenseitige Ablenkung der Strahlen durch die Kathoden stattfand. Indem er annahm, daß jeder der Entladungsstöße des Induktors in einer Reihe einzelner getrennter Entladungen durch das Rohr hindurchgeht, und indem er aus dem Umstand, daß der rotirende Spiegel die Einzelentladungen nicht zu trennen vermag, glaubte folgern zu können, daß die Periode dieser Entladungen kleiner als 1/2000000 Sekunde sei, gelangte er zu dem Schluß, daß die Geschwindigkeit der Strahlen mindestens 2.2000000.20 cm/sec. = 800000 m/sec. sein müsse.

Setzen wir $Hr = 400$, so würde mittels (8) folgen $\alpha \gtreqless 1/20$ und die Hypothese der gewöhnlichen chemischen Ionen wäre ausgeschaltet. Leider kann nicht zugegeben werden, daß das Resultat zuverlässig ist, da es sehr fraglich erscheint, ob der einzelne Entladungsstoß wirklich gemäß der Goldstein'schen Annahme in getrennte Partialentladungen zerfällt.

b) Spottiswoode und Fletcher Moulton versuchten bei ihren interessanten und weitgedehnten Arbeiten über Gasentladungen 1880 auch Schätzungen über die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen[2]). Bei den verwertheten Experimenten wurde der Strom einer vielplattigen Influenzmaschine unter Einschaltung einer Funkenstrecke durch ein so stark ausgepumptes Entladungsrohr hindurchgeschickt, daß die Entladungen äußerst kurze Stöße bildeten. Indem die Autoren die verschiedenen in Betracht kommenden Zeitintervalle vergleichen, gelangen sie zu dem Schluß, daß die Kathodenstrahlen bedeutend langsamer sind als die elektrische Entladung längs eines Metalldrahtes. Wir würden so zu

1) Monatsber. d. Berl. Ak. Jan. 1880; Wied. Ann. 12. p. 101, 1880.
2) Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1880, p. 627.

dem Ergebniß geführt werden, daß die Geschwindigkeit der Strahlen erheblich unter der des Lichtes liege, und daß darum die Hypothese der longitudinalen Aetherwellen unrichtig sei, — leider aber ist es, ähnlich wie bei Goldstein, nach den heutigen Erfahrungen nicht angänglich, dem Gedankengange der Autoren zu folgen.

Um zu zeigen, worauf es im Wesentlichen ankommt, mag einer der Versuche besprochen werden, aus dem eine verhältnißmäßig geringe Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen gefolgert wird. Die Funkenstrecke wurde vor die positive Elektrode gelegt, die negative zur Erde abgeleitet und das Rohr an verschiedenen Stellen mit dem Finger berührt. Die Glasfläche unter dem Finger bildete dann eine sekundäre Kathode, von der ebenfalls Kathodenstrahlen ausgingen. War der Finger in der Nähe der Hauptkathode, so wurde das sekundäre Strahlenbündel von dieser scheinbar abgestoßen, in größerer Entfernung ging es ohne merkliche Ablenkung quer durch das Rohr. Die Autoren sehen nun in der Ablenkung eine Einwirkung des von der Hauptelektrode kommenden Strahlenbündel und schließen, daß die Ablenkung in größerer Entfernung fehlt, weil die ablenkenden Strahlen erst nach Beendigung der Entladung an der sekundären Elektrode eintreffen. Heute wissen wir, daß die Ablenkung eine Wirkung des Potentialgefälles im Rohr ist, also mit dem Strahlenbündel von der Hauptkathode nicht direkt zusammenhängt und darum auch keinen Schluß auf seine Geschwindigkeit erlaubt.

c) Im Jahre 1894 berichtete J. J. Thomson[1]) über eine Messung der Geschwindigkeit mit Hülfe des rotirenden Spiegels.

Das Entladungsrohr bestand aus Uranglas, und war mit Ausnahme zweier scharf begrenzter Stellen in 10 und 20 cm Entfernung von der Kathode geschwärzt. Durch das Rohr wurden Teslaströme gesckickt, zu deren Erregung die Wechselströme bei der Entladung von Leydener Flaschen dienten. Das Aufleuchten der freien Stellen der Rohrwandung unter der Einwirkung der Kathodenstrahlen trat dann so plötzlich ein, daß der Beginn im rotirenden Spiegel durch eine scharfe Grenze markirt war. Bei immer schneller werdender Rotation des Spiegels wurde beobachtet, daß das Bild der entfernteren Stelle allmählig gegen das andere zurückblieb entsprechend einer Verspätung des Aufleuchtens um 1/2000000 Sekunde. Indem J. J. Thomson hierin die Zeit sah, welche die Kathodenstrahlen brauchen, um den Unterschied des

1) Phil. Mag. 38, p. 358, 1894.

Weges bis zu den beiden freien Stellen zu durchlaufen, folgerte er eine Geschwindigkeit von 200000 Meter / Sekunde.

J. J. Thomson selbst hat dieses Resultat später als viel zu klein aufgegeben [1]), und sieht nun die eigentliche Ursache der Verspätung in der geringeren Intensität der Strahlen an der entfernteren Glasstelle.

d) Endlich ist über die im Vorwort erwähnte Messung von Th. Des Coudres [2]) zu berichten.

Die Kathodenstrahlen wurden ähnlich wie bei J. J. Thomson durch Tesla-Ströme erregt. Eine an das Rohr herangebrachte Schleife des primären oder sekundären Stromkreises bewirkte eine gute beobachtbare magnetische Ablenkung, die in allen benutzbaren Entfernungen von der Kathode gleich groß war. Hieraus mußte gefolgert werden, daß die Strahlen auf ihrem ganzen Wege wesentlich dieselbe Phase des schwingenden Systemes vorfanden, und es ergab sich bei Berücksichtigung der Schwingungsdauer des Systemes und der von den Kathodenstrahlen durchlaufenen Strecken, daß die Geschwindigkeit der Strahlen mindestens auf 2000000 Meter / Sekunde $= 2.10^8$ Centimeter / Sekunde zu schätzen war.

Setzen wir nach meinen Beobachtungen die magnetische Steifigkeit $Hr \gtreqless 600$, so folgt mittels (8)

$$\alpha \gtreqless \frac{3}{100},$$

sodaß der Hypothese der gewöhnlichen chemischen Ionen widersprochen wird.

§ 4. Entwicklung der Beobachtungsmethode.

Als ich im Herbst 1896 an die experimentellen Arbeiten ging, hielt ich nach meinen schon früher angestellten Beobachtungen über die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen die Geschwindigkeitsmessung von J. J. Thomson, auf die ich mich noch in der Abhandlung „Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung" im Frühjahr 1896 berufen hatte [3]), nicht mehr für richtig und schloß mittels der Erwägungen des

1) Phil. Mag. (5) **44**, p. 293, 1897.

2) Verh. d. phys. Ges. zu Berlin, **14**, p. 86, 1895; **16**, p. 157, 1897; Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Aerzte, Vers. z. Frankfurt a. M., 1896, II. Th. 1. Hälfte p. 69.

3) Phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg Pr., 1896, p. 45.

§ 2, daß die wirklichen Werthe der Geschwindigkeit für die zu Messungen verwerthbaren Kathodenstrahlen noch vielmals höher liegen als der von Des Coudres gefundene Grenzwerth.

Der Vergleich der zu erwartenden enormen Geschwindigkeiten mit den kurzen Strecken, über die sich die Kathodenstrahlen verfolgen lassen, lehrte, daß die Messung kleiner Bruchtheile einer Milliontel Sekunde ins Auge gefaßt werden mußte. Unter solchen Umständen und im Hinblick auf die Erfahrungen von J. J. Thomson schien der rotirende Spiegel wenig Hoffnung zu bieten, und ich entschloß mich daher, zur Zeittheilung das moderne Hülfsmittel der elektrischen Schwingungen zu verwerthen. Wie schon erwähnt, hat Des Coudres das Verdienst, auf seine Anwendbarkeit in diesem Falle hingewiesen und es auch zum ersten Male verwerthet zu haben [1]).

Die Geschwindigkeitsmessung verlangt, das Zeitintervall festzustellen, in dem eine gewisse Strecke von den Strahlen durchlaufen wird. In unserem Falle muß hierzu Beginn und Ende des Laufes auf die Schwingungsphasen des messenden elektrischen Systemes bezogen werden. In Bezug auf den Beginn ist das Nächstliegende jedenfalls, nach dem Vorgang von Des Coudres bei seinen wirklichen Messungen die Beobachtungsmethode dadurch zu vereinfachen, daß man die Aussendung der Kathodenstrahlen dem messenden System selbst überträgt. Dann kann der Anfang der Meßstrecke an die Elektrode selbst gelegt werden, und der Beginn des Laufes der Strahlen ist dadurch bestimmt, daß er vorsichgeht, während das System negative Elektricität zur Elektrode schickt. Zur zeitlichen Festlegung der Ankunft der Strahlen kann man entweder wie Des Coudres das Verhalten der Strahlen gegen die magnetische Einwirkung eines stromführenden Theiles des messenden Systemes oder das Verhalten gegen die elektrische Einwirkung einer zweiten Elektrode benutzen.

Experimente dieser Art im Herbst 1896 zeigten mir, daß wenig Aussicht vorhanden ist, so zum Ziele zu kommen, denn es war nicht möglich, auch nur annähernd genügend lange Kathodenstrahlen zu erhalten. Im Interesse des Folgenden ist nöthig, dieses etwas näher auseinanderzusetzen.

T sei die Dauer einer vollständigen Schwingung des messenden Systemes, L die Wellenlänge der zugehörigen elektrodynamischen Wellen, sodaß

$$L = TV,$$

1) Vergl. hier insbes. Des Coudres, Verh. d. phys. Ges. z. Berlin, 16, p. 157, 1897.

wenn V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Es sei ferner l die Länge der von den Kathodenstrahlen durchlaufenen und zur Messung der Geschwindigkeit verwertheten Bahnstrecke, t das zugehörige Zeitintervall, dann ist

$$l = tv,$$

wenn v die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen bedeutet, und wir erhalten:

$$\frac{v}{V} = \frac{l}{L} \cdot \frac{T}{t}.$$

l und L sind leicht festzustellen, um also den gesuchten Quotienten v/V zu bestimmen, ist erforderlich t/T zu messen, d. h. den Werth der Wegzeit t in Einheiten der Periode T aufzusuchen.

t darf gegenüber T nicht zu klein sein, denn die Beobachtung kann nur dann zu einem positiven Resultat führen, wenn die Einwirkung des messenden System am Ende der Bahn merklich anders ist als am Anfang, wenn also nach Verlauf der Zeit t die Phase der Schwingungen sich merklich geändert hat. Man kann hoffen, mit einer Viertel-Periode auszukommen; verlangen wir demgemäß $t \geqq \frac{1}{4} T$, so ergiebt sich als Bedingung für die Brauchbarkeit der experimentellen Anordnung:

$$l \geqq \frac{L}{4} \cdot \frac{v}{V}.$$

Erzeugt man die Kathodenstrahlen mittels der Entladungen von Leydener Flaschen unter Benutzung des Teslatransformators, so kann mit der Wellenlänge L des elektrischen Systems auf 60 m bequem herabgegangen werden. Setzen wir ferner nach § 2 $v \geqq V/10$, so müßte für die Bahn der Kathodenstrahlen mindestens die Länge $l = 1{,}5$ m verlangt werden. Für $v = V/5$ wäre schon $l = 3$ m nothwendig.

Bei der gewöhnlichen Erzeugungsweise der Kathodenstrahlen mittels eines Funkeninduktors ist es nun freilich nicht schwierig, die Kathodenstrahlen meterweit zu verfolgen, wenn man nur die Vorsicht gebraucht, durch passend aufgestellte Magnete die ablenkende Wirkung des Erdmagnetismus aufzuheben; ganz anders aber gestaltet sich die Sache bei den schnellen Schwingungen des Teslatransformators. Einmal werden weit größere Gasdichten im Entladungsrohr nothwendig, was stärkere Absorption zur Folge hat,

dann aber, und das ist die Hauptsache, wird bei schnellen Schwingungen der Gang der Kathodenstrahlen schon in verhältnißmäßig geringen Entfernungen von der Kathode unregelmässig, sodaß sie für die Beobachtung verloren gehen. Wie es scheint, stellt sich die regelmäßige Vertheilung der elektrischen Kräfte, welche für einen geradlinigen oder nur schwach gekrümmten Verlauf der Kathodenstrahlen nöthig ist, im Innern der Entladungsröhre von den Elektroden aus erst allmälig her, sodaß mit schneller werdenden Schwingungen der Bereich der regelmäßigen Fortpflanzung sich nach der Kathode hin mehr und mehr verkleinert.

Bei meinen Versuchen im Herbst 1896 gelang es mir nicht, die Kathodenstrahlen mittlerer Steifigkeit ($Hr = 200-400$) weiter als 30 oder 40 cm mit hinreichender Intensität zu erhalten, sodaß die nothwendige Bahnlänge nicht entfernt erreicht wurde.

Unter solchen Umständen schien es erforderlich, zur allgemeineren Methode zurückzukehren und darauf zu verzichten, dem messenden System auch die Aussendung der Kathodenstrahlen zu übertragen. Es entsteht dann eine Komplikation insofern, als noch besonders dafür gesorgt werden muß, den Eintritt der Kathodenstrahlen in die Meßstrecke auf die Schwingungen des messenden Systemes zu beziehen. Für diesen Zweck ist es nöthig, die Anfangsstelle mittels des messenden Systemes durch eine Hülfselektrode oder einen stromführenden Draht elektrischen oder magnetischen Kräften auszusetzen, um so künstlich die zur Geschwindigkeitsmessung nothwendige Periodicität des weiteren Verlaufes der Strahlen herzustellen, die sich von selbst einstellt, wenn im vorhin betrachteten einfacheren Falle das messende System selbst die Strahlen erregt.

Die eigentliche Schwierigkeit der Anordnung liegt in dem schnellen Abklingen der Schwingungen von so kurzwelligen elektrischen Systemen, wie sie zur Geschwindigkeitsmessung gebraucht werden. Es hat dieses zur Folge, daß nur Kathodenstrahlen für die Messung in Betracht kommen, die während eines außerordentlich kleinen Zeitintervalles ausgeschickt werden. Bei einer Wellenlänge von 10 m z. B., der eine Periode von $^1/_{30}$ Mikrosekunde entspricht, bieten die ersten 10 vollständigen Schwingungen, die bei guter Anordnung wohl noch verwendet werden können, für die Messung nur ein Intervall von $^1/_3$ Mikrosekunde. — Um trotzdem ans Ziel zu gelangen, kann man entweder daran denken, das messende System außerordentlich oft in der Sekunde auszulösen, oder man muß versuchen, die Hauptmenge der Kathodenstrahlen in das kleine Intervall hineinzudrängen, in dem die Schwingungen des

messenden Systemes stark genug sind. Da der erste Weg zu große experimentelle Schwierigkeiten zu bieten schien, habe ich nur den zweiten verfolgt. Der konstante Strom, etwa der einer Hochspannungsbatterie, ist dann natürlich ausgeschlossen, und auch die direkten Entladungen eines Funkeninduktors sind unbrauchbar, da sie sich über vieltausendmal zu lange Zeiten erstrecken. Brauchbar aber fand ich die direkten Entladungen einer Leydener Batterie bei kurzem Schließungskreis und die durch Batterieentladungen bewirkten Teslaströme. Die zunächst vielleicht gefährlich scheinende Bedingung, daß die zur Messung der Geschwindigkeit und zur Aussendung der Kathodenstrahlen dienenden beiden Systeme genau zusammenstimmend ausgelöst werden müssen, ließ sich erfüllen, indem ich den Kunstgriff anwandte, beiden Systemen die gleiche auslösende Funkenstrecke zu geben; im übrigen müssen und können sie dabei völlig unabhängig von einander sein.

Man wird bemerken, daß es wiederum, gerade ebenso wie bei der zuerst besprochenen vereinfachten Methode darauf ankommt, für die Erzeugung der Kathodenstrahlen schnell arbeitende Systeme zu benutzen. So findet man sich denn auch jetzt bei gegebenem messenden System in der erreichbaren Länge der Kathodenstrahlen beschränkt, und wiederum wird die Länge um so kleiner, je schneller das messende System arbeitet. Immerhin aber ist man gegen früher weit im Vortheil, weil das aussendende System langsamer sein darf als das messende, — und in der That wird es bei sorgfältiger Anordnung des Versuches ohne große Schwierigkeiten möglich, die Geschwindigkeitsmessung auszuführen.

§ 5. Die Versuchsanordnung.

Im vorigen Paragraphen wurden die allgemeinen Gesichtspunkte dargelegt, welche bei der Ausarbeitung der Beobachtungsmethode maaßgebend waren. Für die Ausführung im Einzelnen bieten sich eine große Reihe von Möglichkeiten, und ich selbst habe im Laufe der Untersuchung vielfache und weitgehende Aenderungen vorgenommen. Es wäre zwecklos, hierauf näher einzugehen, es wird vielmehr völlig genügen, wenn ich speciell diejenige nähere Ausführung beschreibe, mit der die definitiven Resultate gewonnen wurden.

Dem messenden System gab ich Wellenlängen zwischen ca. 6 und 20 m. Bei der Konstruktion mußte zunächst darauf Bedacht genommen werden, die Schwingungen einheitlich zu machen, also Oberschwingungen zu vermeiden.

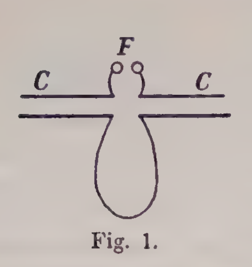


Fig. 1.

Ich wählte darum die Lecher'sche Anordnung, bei der 2 Kondensatoren *C*, *C*, Figur 1, einerseits durch die auslösende Funkenstrecke *F*, andererseits metallisch miteinander verbunden werden.

Ferner mußten recht große Stromstärken erstrebt werden, um die Wirkung auf die Kathodenstrahlen groß zu machen.

Zu diesem Zweck wurde den Kondensatoren möglichst große Kapacität und dafür den Verbindungen zwischen ihnen möglichst kleine Selbstinduktion gegeben.

Endlich war es nöthig, die Dämpfung der Schwingungen möglichst herabzusetzen, um so den zeitlichen Meßbereich möglichst groß zu machen.

Dieses Gesichtspunktes wegen benutzte ich für die Messung nicht die elektrische Einwirkung auf die Kathodenstrahlen, wodurch stark dämpfende, zum messendem System gehörige Elektroden im Entladungsrohr nothwendig geworden wären, sondern die magnetische Einwirkung, für welche es genügt, stromführende Drähte des messenden Systemes an das Entladungsrohr heranzubringen.

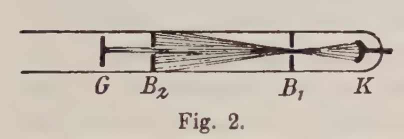


Fig. 2.

Das Entladungsrohr erhielt eine Hohlspiegelkathode (*K*, Figur 2); die Entladungen wurden so reguliert, daß die Kathodenstrahlen einen schlanken Kegel mit ziemlich feiner Spitze bildeten, wie dies in der schematischen Figur 2 angedeutet ist. Da der Weg der Strahlen sich im Innern des Rohres durch Aufleuchten des Gasinhaltes kennzeichnete, war er wenigstens bis zur Spitze und eine Strecke darüber direkt sichtbar.

Bei der Spitze des Strahlenkegels erhielt die Röhre eine Metallblende B_1 mit einer kleinen, der Spitze entsprechenden Oeffnung. In einer wechselnden Entfernung hinter B_1 wurde eine zweite Blende B_2 mit einem Schlitz und ein paar Centimeter hinter dieser ein Glasstreifen *G* quer zum Schlitz aufgestellt. Die durch B_1 und B_2 hindurchtretenden Kathodenstrahlen erzeugten auf *G* einen grünen Fluorescenzfleck.

Um mit Hülfe des messenden Systemes magnetisch auf die Kathodenstrahlen einzuwirken und so zunächst den Anfang der Meßstrecke festzulegen, wurde ein Verbindungsdraht der Kondensatoren *C* (Figur 1) an das Rohr so herangebracht, wie es Figur

3 in *a b c d e* des Näheren zeigt. Der Theil *a b c d* ist eben, und liegt in einem Schnitt durch die Axe des Rohres. Um die Darstellung bequemer zu machen, wollen wir annehmen, daß dieser Schnitt horizontal verläuft. Die Wechselströme, welche das messende System durch *a b c d* hindurchschickt, bewirken dann ein wechselndes magnetisches Feld, dessen Kraftlinien die horizontale Mittelebene des Rohres vertikal durchsetzen; die Ablenkungen des Strahlenbündels erfolgen daher in der Horizontalebene. Indem man *a b c d* immer näher an das Rohr heranbiegt und so die Wirkung allmählig verstärkt, bemerkt man zunächst, daß die Spitze sich in der horizontalen Ebene verbreitert. Bei stärkerer Wirkung und passender Regulirung der ganzen Einrichtung scheint das Bündel sich in zwei zu zerspalten, wie in Figur 3 angedeutet ist. Die Zertheilung ist eine Täuschung, die sich leicht erklärt, wenn man bedenkt, daß das pendelnde Bündel die Mittellage mit größter Geschwindigkeit passirt und bei den Endlagen während verhältnißmäßig langer Zeiten nur geringe Verschiebungen erleidet. Offenbar zeigt die Theilung an, daß im Wesentlichen nur Kathodenstrahlen ausgesandt werden, während das messende System kräftig schwingt, und daß während dieser Zeit, die Amplitude der Schwingungen nicht erheblich abnimmt. Findet die Aussendung der Strahlen während einer längeren Periode statt, so erscheint auch der Raum zwischen den Grenzlagen der Spitze mit kräftigem Licht erfüllt; wird endlich ein großer Theil der Strahlen noch ausgeschickt, während das messende System schon unwirksam ist, so sieht man in der Mitte ein stark leuchtendes unabgelenktes Strahlenbündel und seitlich schwächer leuchtend die abgelenkten Theile. Die letzteren verschwinden, sobald das messende System außer Thätigkeit gesetzt wird. Da die nicht abgelenkten Kathodenstrahlen für die Messung unbrauchbar und störend sind, muß man sie durch zweckmäßige Anordnung des die Strahlen liefernden Systemes möglichst zu vermeiden suchen.

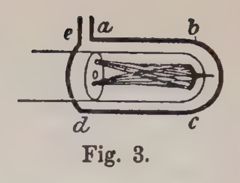


Fig. 3.

Denken wir uns um das Rohr in Figur 2 den Draht *a b c d* gelegt. Zum Glasstreifen *G* gelangen dann nur die nicht abgelenkten Strahlen. Wegen der vorhin beschriebenen Eigenart der Bewegung des pendelnden Strahlenbündels sind das nur wenige Strahlen, solange das messende System kräftig einwirkt. In dem besonders günstigen Falle, wenn keine unnöthigen Kathodenstrahlen vorhanden sind und das Bündel getheilt erscheint, zeigt sich dieses augenfällig darin, daß der Glasstreifen *G* dunkel wird. Da

die Einwirkung des messenden Systemes nicht nur am Anfang sondern auch am Ende der Bahn der Kathodenstrahlen beobachtet werden muß, ist unsere Anordnung hiernach unzweckmäßig.

Um sie zweckmäßiger zu machen, bringen wir an das Rohr zwischen K und B_1 einen kleinen Hufeisenmagneten M, Figur 4 und 5, heran. Wirkt, wie in Figur 4 angenommen, das messende

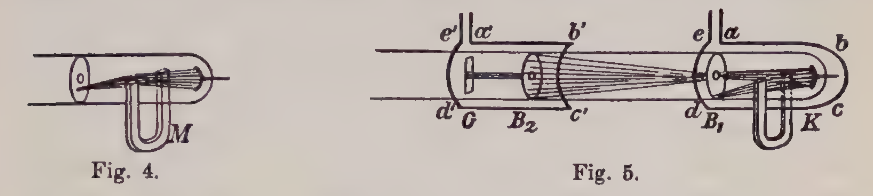


Fig. 4. Fig. 5.

System nicht ein, so trifft die Spitze des Strahlenbündels nun nicht mehr die Oeffnung von B, der Luminescenzfleck auf G erlischt. Wird dann das messende System eingeschaltet (Figur 5), so gehen bei passender Stellung von M die durch $a\,b\,c\,d$ entgegengesetzt wie durch M abgelenkten Strahlen durch B_1 und B_2 und erhellen G. Damit ist dann eine Anordnung hergestellt, die auf das Bequemste für unsere Geschwindigkeit brauchbar ist.

Um noch die Zeit der Ankunft der Strahlen bei B_2, G festzustellen, wird an das Rohr bei B_2 und G ein weiterer zum messenden System gehöriger Draht $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ in ähnlicher Weise herangebracht wie $a\,b\,c\,d\,e$, und seine Einwirkung auf die Lage des Luminescenzfleckes auf G beobachtet, — etwa indem man ihn bald an das Rohr heranbiegt, bald abbiegt.

Wir wollen eine solche Anordnung annehmen, daß die Wechselströme in $a'\,b'\,c'\,d'$ stets ebenso verlaufen, wie in $a\,b\,c\,d$. Dann müßte, wenn die Geschwindigkeit für unsere Versuchsanordnung unmeßbar groß sein sollte, offenbar die Einwirkung von $a'\,b'\,c'\,d'$ die gleiche sein, wie die von $a\,b\,c\,d$. In dem in Figur 5 dargestellten Falle also müßte der Fleck auf G unter der Einwirkung von $a'\,b'\,c'\,d'$ nach der Seite von $a'\,b'$ hin wandern. Eine Abweichung hiervon würde anzeigen, daß die Geschwindigkeit im Meßbereich der experimentellen Anordnung liegt.

Bei meinen Beobachtungen, bei denen B_2, G und $a'\,b'\,c'\,d'$ verschiebbar waren, ergab sich Folgendes:

Lagen $a'\,b'\,c'\,d'$ und B_2, G sehr nahe bei $a\,b\,c\,d$, so verursachte $a'\,b'\,c'\,d'$ die gleiche Ablenkung wie $a\,b\,c\,d$. Wurde der Magnet M umgekehrt, so kehrte sich dementsprechend auch die Verschiebung des Phosphorescenzfleckes auf G um.

In einer gewissen größeren Entferung des Systemes (B_2, G, $a' b' c' d'$) wurde der Fleck nach beiden Seiten gleichmäßig in die Breite gezogen oder gar in zwei Theile getheilt; dies Phänomen änderte sich nicht, wenn M umgekehrt wurde. Es konnte geschlossen werden, daß die Kathodenstrahlen dann die Strecke von $a b c d$ bis $a' b' c' d'$ in der Zeit durchliefen, in der das messende System ein Viertel der vollständigen Schwingung vollführte, sodaß die Kathodenstrahlen, welche an $a b c d$ während der Zeit der größten Stromstärke vorübergingen, in $a' b' c' d'$ die Zeit des Stromumkehrs antrafen. Daß eine Verbreiterung des Luminescenzfleckes oder gar eine Zweitheilung eintrat, hängt mit der schon besprochenen Eigenart der Pendelschwingungen des Strahlenbündels zusammen. Ihretwegen gehen ja während einer verhältnißmäßig langen Zeit Strahlen durch B_1 hindurch, — während einer Zeit, die bei meinen Versuchen meist auf etwa $^1/_4$ Periode des messenden Systemes zu schätzen war.

Jenachdem das System von der neutralen Stelle nach der einen oder der anderen Seite verschoben wurde, überwog die Ablenkung nach der einen oder anderen Seite. Bei Vergrößerung der Entfernung kam es schließlich dahin, daß die Ablenkung wiederum ganz nach einer Seite erfolgte und zwar im entgegengesetzten Sinne wie bei $a b c d$. Dann ergab die Umkehrung des Magneten M wiederum eine Umkehrung der Ablenkung. Die Kathodenstrahlen fanden nun in $a' b' c' d'$ die entgegengesetzte Phase vor wie bei $a b c d$.

Das Experiment so weit zu verfolgen, verlangte viel Vorsicht und sorgfältigste Abstimmung aller Versuchsbedingungen, weil andernfalls die Intensität der nach G gelangenden für die Beobachtungen tauglichen Kathodenstrahlen zu schwach wurde, um sie bei dem nicht zu vermeidenden Nebenlicht noch deutlich bemerkbar zu machen.

Bei Weitem intensiver und in der That sehr leicht beobachtbar werden die Erscheinungen, wenn man magnetische Kräfte zur Hülfe nimmt, um die Zerstreuung der Strahlen zwischen B_1 und B_2 möglichst herabzusetzen. Zu diesem Zwecke umgab ich die Glasröhre zwischen B_1 und B_2 mit einer Drahtspirale, durch die ein kräftiger elektrischer Strom geschickt wurde. Das im Innern des Entladungsrohres entstehende magnetische Feld mit seinen parallel der Axe des Rohres verlaufenden Kraftlinien nöthigt dann die nur wenig gegen die Axe geneigten Strahlen in langgezogenen

Spiralen durch das Rohr zu gehen, sodaß ein großer Theil nach B_2 gelangt, der sonst gegen die Glaswand gegangen wäre. Die geringfügige Vergrößerung des Weges kommt wegen der immerhin ziemlich groben Natur der Versuche nicht in Betracht.

Unter Benutzung der magnetischen Spirale und wiederum bei sorgfältigster Abstimmung der Versuchsbedingungen gelang es — in etwa 1 m Entfernung von K — auch den zweiten von der Theorie vorgesehenen neutralen Punkt zu erreichen und deutlich zu überschreiten. —

Ehe im folgenden Paragraphen die detaillirte Beschreibung der verwendeten Apparate begonnen wird, sollen nun noch ein paar Worte über die allgemeine Anordnung der beiden elektrischen Systeme und ihre Verbindung gesagt werden.

Da eine möglichst geringe Selbstinduktion des messenden Systemes erstrebt werden muß, wäre es unpraktisch, die Drähte $a\,b\,c\,d\,e$ und $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ in einer und derselben Leitung zwischen den Kondensatoren C hintereinander zu schalten. Besser ist es, zwei getrennte, parallel geschaltete Leitungen zu benutzen. In meinem Falle waren diese nahe gleich beschaffen und lagen symmetrisch zur Funkenstrecke.

Für das zweite elektrische System benutzte ich in beiden Fällen — bei Anwendung von Teslaströmen sowie bei der Anwendung direkter Batterieentladungen — eine Figur 1 entsprechende Anordnung.

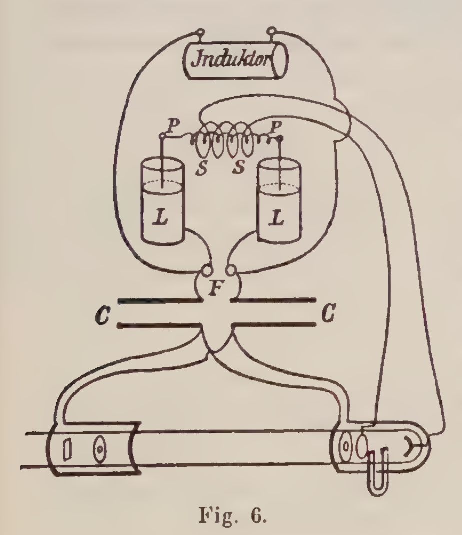


Fig. 6.

Für den Fall der Teslaströme wird das vollständige Schema des Experimentes dann durch Figur 6 dargestellt. Es sind dabei L, L zwei isolirt aufgestellte Leydener Flaschen, deren äußere Belegungen durch die Funkenstrecke F und deren innere Belegungen durch die primäre Spule PP des Teslatransformators verbunden sind. Von der sekundären Spule SS des Transformators führen Drähte zu den Elektroden des Entladungsrohres. Sollen die direkten Entladungen benutzt werden, so wird SS fortgelassen und den Elektroden des Entla-

dungsrohres die Elektricität durch Drähte zugeführt, die von der Verbindungsleitung der inneren Belegungen zu beiden Seiten der eingefügten Spirale *PP* ausgehen. Diese Spirale auszuschalten, und die inneren Belegungen der Leydener Flaschen nur durch das Entladungsrohr zu verbinden, ist unpraktisch, weil dann bei der Ladung der Batterie vor der Auslösung und bei der Entladung nach der Auslösung zu viel nicht für die Messung verwerthbare Elektricität durch das Rohr hindurchgeht und so das Phänomen, auf welches es ankommt, zu sehr verdeckt wird.

Bei der gewählten Anordnung finden in dem die Kathodenstrahlen liefernden System Schwingungen statt. Bemerkenswerther Weise habe ich meist nur dann die für die Versuche nothwendigen in einem Kegel geordneten Kathodenstrahlen erhalten, wenn nicht die erste durch den Funken *F* eingeleitete, sondern erst die zweite Schwingung negative Elektricität zu der Hohlspiegelelektrode *K* führte, und die Wirkung des Drahtes *a b c d* zeigte dann, daß diese zweite Schwingung auch die einzige blieb, bei der das kegelförmige Bündel ausging. Es scheint hiernach, als ob das Rohr einer gewissen Vorbereitung bedarf, bevor die Kathodenstrahlen sich in der hier gebrauchten regelmäßigen Weise entwickeln, und daß die nothwendigen Bedingungen bald wieder verloren gehen.

§ 6. **Die Apparate.**

Das Entladungsrohr für die definitiven Beobachtungen erhielt folgende Einrichtung:

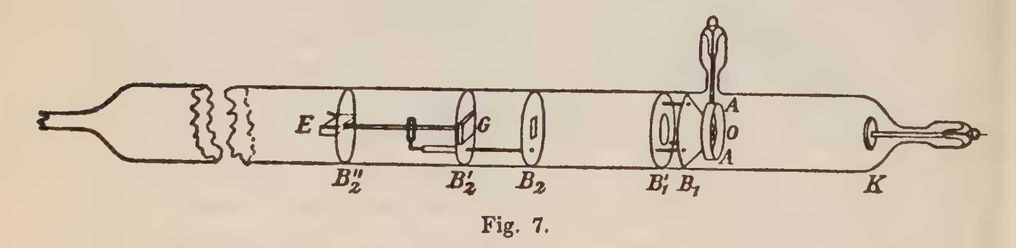


Fig. 7.

Ein Glasrohr von ca. 40 mm lichter Weite trägt an einem Ende, dem „Kopf“, zunächst die Hohlspiegelelektrode *K* von ca. 20 mm Durchmesser, 2 mm Dicke und ca. 10 cm Krümmungsradius. Durch Abschleifen auf einem Brillenglas war es leicht, die richtige Form mit der hier erforderlichen Genauigkeit zu erhalten.

Die 4 mm weite Oeffnung *O* der Blende B_1 ist 8 cm von *K*

entfernt und steht an der Stelle, wo das Kathodenstrahlenbündel seine größte Einschnürung zeigt. Daß diese nicht erst im Konvergenzpunkt der geometrischen Normalen, also 10 cm vor K, zu Stande kommt, erklärt sich der Rechnung nach vollständig durch die magnetische Einwirkung des sehr bedeutenden Stromes, welcher während der Erzeugung der Kathodenstrahlen das Rohr durchsetzt. Man kann über seine Intensität leicht ein Urtheil gewinnen, wenn man die magnetische Einwirkung des zu K führenden Drahtes auf das Kathodenstrahlenbündel untersucht und mit der Einwirkung bekannter magnetischer Kräfte vergleicht. Bei meinen Versuchen fand ich Werthe von 20—40 Ampère.

Da die Anode einen störenden Einfluß auf Entwicklung und Fortpflanzung der Kathodenstrahlen zeigte, gab ich ihr die Form eines Ringes AA und setzte sie in die Ebene von O. Um dieses möglich zu machen, mußte die Blende B_1 die Form eines Kegels erhalten. — Der mit B_1 vereinigte Ring B_1' hat nur den Zweck, B_1 eine gesicherte Lage zu geben.

Sobald die Elektroden der Glaswand zu nahe kommen, bilden sich während des Durchgangs der Elektricität in dem Zwischenraum leuchtende Punkte, von denen sehr störende Sonderentladungen ausgehen; es wurde darum Sorge getragen, daß um die Elektroden überall ein freier Raum von einigen Millimetern blieb.

Als Material für die Elektroden nahm ich Aluminium, als Material für die Blenden Messing. Es ist nicht zweckmäßig, neue Elektroden sogleich den heftigen für die Experimente gebrauchten Entladungen auszusetzen, weil dann in der Regel einzelne Punkte sich hervorthun, von denen die Entladung vornehmlich und in einer unbrauchbaren Form ausgeht; es empfiehlt sich vielmehr, zunächst eine Zeit lang die direkten Entladungen eines Funkeninduktors durch das Rohr hindurchzuschicken.

Jenseits B_1 liegt im Rohr leicht verschiebbar ein System von 3 Messingscheiben B_2, B_2', B_2''. B_2 enthält in der Mitte ein rechteckiges Loch von 4 mm $\times$ 7 mm; B_2' trägt quer zur Längsrichtung der Oeffnung in B_2 einen Streifen G von Thüringer Glas, hergestellt durch Zusammendrücken eines Röhrchens; B_2'' trägt ein flaches Eisenstäbchen E. B_2' und B_2'' sind durch einen Messingdraht fest verbunden; von B_2 aus geht ein Draht frei durch ein an B_2' gelöthetes Röhrchen, das als Führung dient, und klammert sich lose um den Verbindungsdraht von B_2' und B_2'', sodaß B_2 gegen das System B_2', B_2'' ohne wesentliche Drehung verschiebbar ist. Mittels eines kleinen Elektromagneten kann man durch Vermittlung des Eisenstückchens auf B_2'' das System von außen be-

wegen, und es gelingt dabei leicht, B_2 an eine beliebige Stelle und G in einem gewünschten Abstand dahinter zu bringen.

Das Entladungsrohr blieb bei meinen Versuchen stets durch eine Glasfeder mit der (Quecksilber-)Luftpumpe in Verbindung. Es ruhte dabei auf einem Hartgummilager bei B_1', wo es zur größeren Sicherheit noch festgebunden war, und wurde im übrigen nur durch die ihrerseits von einem Stativ gehaltene Glasfeder und eine Bindfadenschlinge getragen. Die letztere hing von einem primitiven Waagebalken herab und trug die Last des Rohres auf der Seite der Feder.

Zur Verbindung des Rohres mit der Glasfeder benutzte ich anfänglich Siegellack, später, als ich im Winter durch immer wiederkehrende Undichtigkeiten schlechte Erfahrungen gemacht hatte, nur noch direkte Verschmelzung von Glasröhren, die mit einer guten Bunsenflamme sehr leicht herzustellen ist.

Zur Füllung des Rohres wurde stets Wasserstoff benutzt, weil dieser wegen der geringeren Absorption der Kathodenstrahlen sich bei weitem günstiger als andere Gase erwies. Der Druck variirte etwa von $^1/_{10}$ bis $^1/_2$ mm.

Die Magnetspirale zum Zusammenhalten der Kathodenstrahlen jenseits B_1 war aus einzelnen getrennten Theilen zusammengesetzt. Für das vorhin beschriebene Entladungsrohr bestand jeder der Theile aus einem 10 cm langen Stück eines Messingrohres von ca. 55 mm lichter Weite mit umgekanteten Rändern, auf das ein baumwollumsponnener Kupferdraht von 0,8 mm Dicke in 3 Lagen aufgewickelt war. Die Theile umgaben das Entladungsrohr, ohne es zu berühren, und erhielten ihren Halt durch eine Holzlatte unter dem Entladungsrohr, auf der sie beliebig verschoben werden konnten.

Ich benutzte für die Spirale Ströme von 2—4 Ampère, wodurch im Innern Magnetfelder von 60—120 Einheiten entstanden.

Das schon in Figur 1 und 6 schematisch skizzirte messende System wurde aus zwei Luftkondensatoren zusammengesetzt. Bei dem für die definitiven

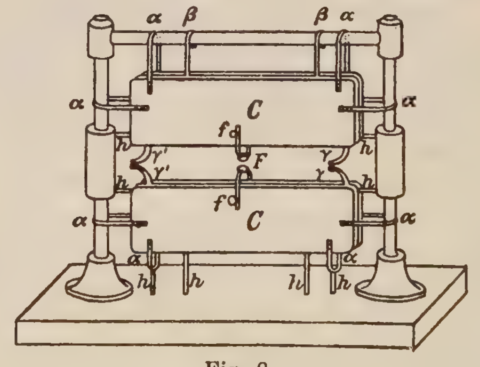


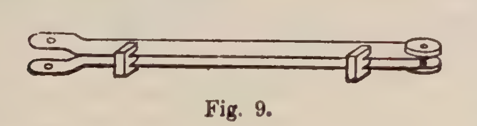
Fig. 8.

Experimente benutzten System, das in Figur 8 dargestellt ist, bestand jeder der Kondensatoren aus 3 ebenen, parallel und vertikal gestellten Messingplatten von 3 mm Dicke, 15 cm Höhe und 50 cm Breite mit abgerundeten Kanten und Ecken. Die beiden äußeren Platten, unter sich durch die Messingbügel α und f verbunden, bilden dabei zusammen die eine Kondensatorfläche, die in der Mitte dazwischenstehende dritte Platte die andere. Ihren Halt finden die Blechplatten auf der hölzernen Grundplatte des ganzen Systemes und an dem aus Glasröhren und paraffinirtem Holz gebildeten Rahmen R durch Vermittlung der Bügel α, von denen 2 sich auf 2 Hartgummistäbchen h stützen, während die übrigen einfach um die Glasröhren des Rahmens gelegt sind. Die inneren Platten werden durch Blechhaken β und Hartgummistäbchen h gehalten.

Die Verbindungsbügel f haben unter den Befestigungsschrauben Schlitze und können darum ein wenig auf und ab verschoben werden; auf diese Weise wird die auslösende Funkenstrecke, die sich zwischen zwei in die Bügel f eingefügten abgerundeten Zinkstücken befindet, um einige Millimeter regulirbar. Ich gab ihr in der Regel eine Länge von ca. 7 mm. Auf der Seite, welche in der Figur vom Beschauer abgewandt ist, der „Rückseite", tragen die Bügel f Klemmschrauben für die Verbindungsdrähte mit dem elektrischen System zur Erzeugung der Kathodenstrahlen.

Der Abstand der Platten von einander betrug in der Regel 1 cm; für die Versuche mit besonders kurzen Wellenlängen ($6^1/_2$ m), bei denen es gelang, auch den zweiten neutralen Punkt zu überschreiten, wurde er durch Biegen der Klammern α auf 2 cm vergrößert.

Von den beiden inneren Blechplatten gehen je zwei ca. 20 mm breite Blechstreifen γ, γ' nach innen und vorne. Die gegenüberstehenden Streifen γ, γ und γ', γ' werden einander schließlich parallel und enthalten hier Löcher für Schrauben, durch welche die zu den Drähten $a\ b\ c\ d\ e$ und $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$ führenden beweglichen Leiter befestigt werden. Diese bestehen aus je 1 oder 2 Glieder der in Figur 9 dargestellten Art: Zwei 20 mm breite Kupferblechstreifen, die an dem einen Ende etwas auseinander gebogen sind und an dem anderen Ende aufgelöthete Messingscheiben mit Schraubenlöchern tragen, werden durch festaufgesteckte Hartgummiklammern in ca. 7 mm Abstand gehalten.


Fig. 9.

An γ, γ oder $\gamma' \gamma'$ wird das erweiterte Ende des ersten und eventuell einzigen Gliedes geschraubt; das andere Ende trägt dann entweder das nächste Glied oder den Draht *a b c d e*, bezüglich *a' b' c' d' e'*. — Man wird erkennen, daß diese Konstruktion Beweglichkeit neben nahezu konstanter und sehr geringer Selbstinduktion gewährleistet.

Für das System zur Aussendung der Kathodenstrahlen benutzte ich zwei auf Paraffin oder Glas isolirt aufgestellte Leydener Flaschen aus Flintglas mit 40 cm hohen, 13 cm weiten, etwa 2 mm dicken Gläsern und etwa 13 qdcm großen Staniolbelegungen. Um überall zuverlässige Kontakte zu erreichen, erhielten die Belegungen je einen 2 cm breiten federnden, mit Staniol umwickelten Messingring. Bei den äußeren Belegungen bestehen die Ringe aus einem Stück und üben selbst die nöthige Federkraft aus; bei den innern Belegungen ist jeder Ring aus 4 getrennten Stücken zusammengesetzt, die durch 4 von einer Klemme außerhalb der Flasche ausgehenden federnden Drähten fest an die Flasche gedrückt werden.

Von den äußeren Ringen gehen 2 mm dicke, und 60 cm lange Kupferdrähte zu der Funkenstrecke *F*, Figur 6, bezüglich zu den Bügeln *f* des Systemes *CC* in Figur 8. Für die Versuche mit sehr kurzen Wellenlängen wurde jede der Verbindungen durch mehrere — bis 6 — parallele Drähte hergestellt, um so die Selbstinduktion möglichst herabzusetzen. Die Zuleitungsdrähte vom Funkeninduktor (Figur 6) können irgendwo an die äußeren Ringe der Leydener Flaschen angelegt, oder in die angeschlossenen Drähte eingehakt werden.

Die Spirale *PP* (Figur 6) wurde aus 2 mm dickem Kupferdraht gewunden und mit den gerade gelassenen Enden in den Klemmen der innern Armaturen von *L*, *L* befestigt. Die Länge des ganzen verwendeten Drahtstückes betrug in der Regel 1 m, der Durchmesser der Windungen 3 cm, ihre Anzahl 10, die Länge der eigentlichen Spirale 5 cm; doch waren bedeutende Variationen erlaubt. Für die Versuche mit sehr kurzen Wellenlängen wurden nur 5 Windungen in einer Spiralenlänge von 3 cm genommen. Sollten Teslaströme verwendet werden, so wurde über die Spirale ein enge anliegendes reichlich 2 mm dickes Glasrohr geschoben, welches die sekundäre Spirale *SS* des Transformators trug. Diese hatte etwa gleiche Länge wie die primäre Spirale, bestand aus enge aneinander liegenden Windungen eines gewöhnlich 0,8 mm dicken, mit Baumwolle übersponnenen Kupferdrahtes und war zur Erhöhung der Isolation mit Paraffin getränkt. Es kam zuweilen

vor, daß das Glasrohr der sekundären Spirale durchschlagen wurde; in solchen Fällen genügt es meist, die Löcher mit Klebwachs zu verschließen.

Der Funkeninduktor, von der Firma Max Kohl in Chemnitz bezogen, hat eine nominelle Schlagweite von 30 cm. Ich benutzte einen „rotirenden Quecksilberunterbrecher" der gleichen Firma und regulirte die Geschwindigkeit auf 15—20 Unterbrechungen in der Sekunde. Der Stromverbrauch des Induktors war dann etwa 6 Ampère. —

Zum Schluß mögen nun noch einige Worte über die gesammte Anordnung der Apparate gesagt werden.

Das Entladungsrohr war in der Nähe und parallel der vorderen Kante des Experimentirtisches horizontal in 30 cm Höhe über der Tischplatte befestigt. Darunter befanden sich, dem Experimentirenden bequem zur Hand, der Regulirungswiderstand des Funkeninduktors und der Schalter für die Magnetisirungsspirale. Dahinter, in etwa 20 cm Abstand waren die beiden elektrischen Systeme aufgestellt und zwar am Kopfende des Entladungsrohres zunächst das die Kathodenstrahlen aussendende System, daneben dann das in Figur 8 skizzirte messende System. Die Stellung des letzteren mußte so abgepaßt werden, daß seine durch F gehende Mittellinie mit der Mittellinie des Entladungsrohres in gleiche Höhe kam, weil die sich an γ, γ und γ', γ' ansetzenden Arme im Wesentlichen nur in einer horizontalen Ebene beweglich sind. Der Induktionsapparat mit seinem Unterbrecher stand zur Verhütung von magnetischen Störungen mehrere Meter weit von dem Entladungsrohr entfernt auf einem besonderen Tisch.

§ 7. **Messung der magnetischen Ablenkbarkeit.**

Mit den vorstehenden Apparaten ist es leicht, die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen zu messen. Wie im nächsten Paragraphen näher dargelegt werden wird, ergeben sich Werthe, die unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen, sodaß wir auf die Emissionshypothese verwiesen werden. Um die Messungen des Näheren für letztere zu verwerthen, muss α, d. i. das auf 1 Elektron der Ladung kommende Molekulargewicht für die sich bewegenden Theilchen festgestellt werden. Nach den Formeln (8) und (9) in § 2 genügt es für diesen Zweck, außer der Geschwindigkeit noch die elektrische oder die magnetische Ablenkbarkeit zu messen. Ich wählte die bequemere Messung der magnetischen Ablenkbarkeit.

Da es nicht unmöglich schien, daß die Geschwindigkeit und

damit die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen von der Kathode ab bis zur Blende B_1 variirt, hielt ich es für rathsam, die Ablenkbarkeit erst hinter B_1 festzustellen, und verwendete dabei folgende Methode, welche bei verhältnißmäßig einfachen Rechnungen vollständig übersehbare Verhältnisse bietet.

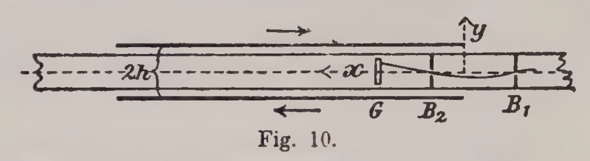


Fig. 10.

In der Weise, wie es Figur 10 deutlich machen wird, wurde ein elektrischer Strom in geraden, parallelen Leitungen zu beiden Seiten des Entladungsrohres entlang geführt und zwar in solcher Anordnung, daß nur diese Leitungen für die magnetische Ablenkung in Betracht kamen. Die Strahlen krümmten sich so, wie es die Figur der Deutlichkeit wegen in übertriebener Weise zeigt; mittels einer Theilung in Form eines sägeartig gefeilten Messingbleches, das den Glasstreifen zum Theil bedeckte, wurde die Verschiebung des Schattens eines über die Oeffnung der Blende B_2 gespannten Drahtes auf dem Glasstreifen G beobachtet. — Zur Feststellung der Stromstärke dienten dabei sorgfältig geaichte Ampèremeter.

Bei der Beobachtung wurden stets nur solche Stromstärken angewandt, daß die zu G gelangenden Strahlen sehr wenig gebogen waren; es darf daher für die Bahn geschrieben werden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{H}{S},$$

wobei S die magnetische Steifigkeit der Strahlen und H die Intensität des Feldes auf der Geraden durch B_1 und B_2 bedeutet.

In H zeigt sich die vereinigte Wirkung beider Drähte. Wir können für die Rechnung entsprechend Figur 11 nur einen Draht annehmen, wenn wir ihn von der Linie $y = 0$ in den halben Abstand der wirklich verwendeten Drähte stellen und ihm die Summe ihrer Stromintensitäten geben.

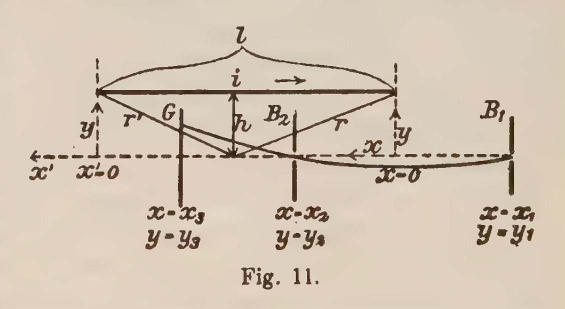


Fig. 11.

Ist i diese Summe, so folgt nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

$$H = \frac{i}{h}\left(\left(1+\frac{x}{r}\right)-\left(1+\frac{x'}{r'}\right)\right),$$

wobei die Abstände r, r' (im Gegensatz zu x) stets positiv zu rechnen sind. Hiernach ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{i}{hS}\left(\left(1+\frac{\xi}{\varrho}\right)-\left(1+\frac{\xi'}{\varrho}\right)\right),$$

wenn gesetzt wird:

$$\xi = \frac{x}{h}; \quad \varrho = \frac{r}{h}; \quad \xi' = \frac{x'}{h}; \quad \varrho' = \frac{r'}{h}.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{S}((\xi+\varrho)-(\xi'+\varrho'))+c$$

und weiter:

$$y = \frac{ih}{2S}(Y-Y')+ch\xi+C,$$

wenn:

$$Y = (\varrho+\xi)\xi+\lg\operatorname{nat}(\varrho+\xi), \quad Y' = (\varrho'+\xi')\xi'+\lg\operatorname{nat}(\varrho'+\xi').$$

Von den beiden Integrationskonstanten c und C bedeutet c den ideellen Werth von dy/dx für $\xi = -\infty$, $x = -\infty$ und wird bestimmt durch die Bedingung, daß $y_1 = y_2$ sein soll; hieraus folgt nämlich:

$$c = -\frac{i}{2S}\frac{(Y_2-Y_1)-(Y_2'-Y_1')}{\xi_2-\xi_1}.$$

C läßt sich mittels der Bedingung $y_2 = 0$ eliminiren. Es ergiebt sich dann für die gesuchte magnetische Steifigkeit:

$$S = \frac{ih}{2y_3}\left\{((Y_3-Y_2)-(Y_3'-Y_2'))-\frac{\xi_3-\xi_2}{\xi_2-\xi_1}((Y_2-Y_1)-(Y_2'-Y_1'))\right\}.$$

Sind die Drähte einigermaßen lang, sodaß noch x_3' mehrere Mal größer ist als h, so genügt es völlig, in Annäherung zu setzen:

$$Y_3'-Y_2' = 2\frac{x_2'-x_3'}{x_2'+x_3'}, \quad Y_2'-Y_1' = 2\frac{x_1'-x_2'}{x_1'+x_2'}. —$$

Bei meinen Versuchen wurden zur Stütze der Leitungen für i zwei mittels Zapfen zusammensteckbare Holzrahmen benutzt

(vergl. Figur 12), auf deren Innenflächen dicht beieinander je zwei Drähte liefen. Auf diese Weise wurde der Strom an jeder Seite des Rohres im Ganzen 4 mal entlang geführt. Ist J der Strom des einzelnen Drahtes in Ampère, so ergiebt sich demgemäß für die in Centimeter-Gramm-Sekunden-Einheiten zu rechnende Stromstärke i der Werth

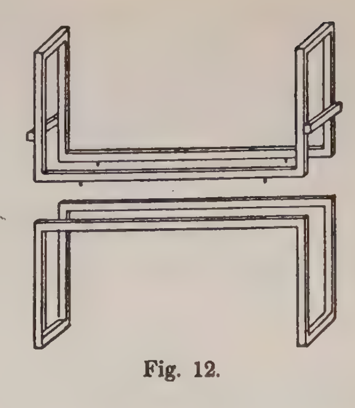


Fig. 12.

$$i = \frac{8}{10} J.$$

h war = 3,00 cm, l, die Länge der Stromstücke, = 40 cm. Der Fehler, den die hier nicht berücksichtigten Leitungen verursachten, betrug der Rechnung nach noch nicht 1 % und konnte darum vernachlässigt werden.

§ 8. Die Beobachtungen.

Bei allmählicher Verdünnung des Wasserstoffgases im Entladungsrohr trat das konische Kathodenstrahlenbündel schon auf, wenn der Druck auf etwa 4 mm gesunken war, doch hatten die Strahlen dann noch nicht die Kraft, das Glas merklich zum luminesciren anzuregen, waren also für die Beobachtung noch unbrauchbar; brauchbar wurden sie erst etwa bei $^1/_2$ mm Druck; bei etwa $^1/_{10}$ mm Druck begann das Bündel seine scharfe Spitze zu verlieren, sodaß die Beobachtung bald unmöglich wurde. Die magnetische Steifigkeit ($S = Hr$) variirte in dem brauchbaren Bereich etwa von 200 bis 450. Wenn diese Grenzen inne gehalten wurden, war es leicht, mit dem zweiten Draht ($a'\,b'\,c'\,d'$) Entfernungen zu erreichen, in welchen seine Einwirkung der des ersten Drahtes ($a\,b\,c\,d$) entgegengesetzt war, d. h. es konnte der erste Umkehrpunkt stets leicht erreicht und weit überschritten werden. Mittels der Formel

$$\frac{v}{V} = \frac{4\lambda}{L},$$

in der λ die Entfernung des ersten Umkehrpunktes von dem Anfang der Meßstrecke bedeutet, ergab sich dann ein Urtheil über den Werth der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen v in Theilen

der Lichtgeschwindigkeit V. L, die Wellenlänge des messenden Systemes, wurde in der gebräuchlichen Weise mittels Resonanz auf Drähten bestimmt.

Die für v gefundenen Werthe liegen etwa zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_5$ der Lichtgeschwindigkeit und sind daher nach § 2 in ausgezeichneter Uebereinstimmung mit der Vorhersage der Emissionstheorie. In nicht minder vorzüglicher Weise bestätigt sich diese, insofern der erste Umkehrpunkt vorwärts rückt, wenn die magnetische Steifigkeit der Strahlen zunimmt.

Auch die Lage des zweiten Umkehrpunktes, wo sich dieser erreichen ließ [1]), entsprach genau der Theorie, d. h. er lag in etwa 3 mal größerer Entfernung von dem Anfang der Meßstrecke als der erste.

Mittels der nach § 2 bestehenden Formeln:

$$\alpha = 3{,}22 \cdot 10^{-7} \frac{S}{\frac{v}{V}}$$

und

$$\frac{e}{m} = \frac{V^2}{S} \cdot \frac{v}{V} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{m} = \frac{V}{S} \cdot \frac{v}{V},$$

jenachdem c elektrostatisch oder elektromagnetisch gemessen wird, erlauben die Beobachtungen auch eine Bestimmung der für die Theorie fundamentalen Größen α und e/m. Die erreichbare Genauigkeit ist freilich nicht groß, weil bei der genaueren Beurtheilung von λ und damit von v sich störend bemerkbar macht, daß wegen der langsamen Bewegung des pendelnden Strahlenbündels bei den äußersten Ausschlägen während einer verhältnißmäßig langen Zeit Kathodenstrahlen durch die Blende B_1 hindurchgehen. Infolge dessen beobachtet man mit dem System $a'\,b'\,c'\,d'$, B_2, G schon erheblich vor dem ersten Umkehrpunkt neben den noch in gleichem Sinne wie durch $a\,b\,c\,d$ abgelenkten Strahlen auch solche, die garnicht oder schon entgegengesetzt abgelenkt sind; und ähnlich ist es hinter dem Umkehrpunkt. So fällt es denn schwer, ein Urtheil über die Lage des Umkehrpunktes zu gewinnen, und man kommt leicht in die Gefahr, sich einem systematischen Irrthum hinzugeben, der bei allen Beobachtungsreihen λ in gleicher Weise zu groß oder zu klein erscheinen läßt. — Hiergegen ist

1) Vergleiche den Schluß des § 5.

die nothwendiger Weise recht beträchtliche Ausdehnung der Systeme K, B_1, $a\,b\,c\,d$ und B_2, G, $a'\,b'\,c'\,d'$, um deretwegen die Beurtheilung von λ ebenfalls unsicher wird, verhältnißmäßig unschädlich. Indem ich als Anfang der Meßstrecke einen Punkt nahm, der in $^1/_3$ der Entfernung $K - B_1$ vor K lag, und als Ende die in Mitten des Drahtes $a'\,b'\,c'\,d'$ stehende Blende B_2, werde ich den Verhältnissen in dieser Hinsicht wohl genügend Rechnung getragen haben.

Wegen der zu fürchtenden systematischen Fehler will ich das Beobachtungsmaterial hier nicht häufen, sondern mich darauf beschränken 2 Beobachtungsreihen anzuführen, die mir besonders zuverlässig erscheinen.

Der Abstand der Kondensatorplatten war ca. 1 cm; für jede der Leitungen wurde nur je ein Zwischenglied der in Figur 9 dargestellten Art benutzt. Bei der Reihe I entsprachen die ablenkenden Drähte genau der Figur 6, bei der Reihe II wurden sie zweimal in der gezeichneten Weise um das Rohr herumgeführt, sodaß die Einwirkung auf die Kathodenstrahlen verdoppelt wurde. Die größere Selbstinduktion der Leitungen bei II bewirkte eine größere Wellenlänge des messenden Systems, nämlich $L = 1140$ cm gegen $L = 940$ cm bei I.

Nach Regulirung des Gasdruckes mit Hülfe der Luftpumpe wurde bei jeder Messung die magnetische Steifigkeit S, dann die Geschwindigkeit v und dann wieder die magnetische Steifigkeit S beobachtet. Ueber die Bestimmung von S ist im vorigen Paragraphen das Nöthige gesagt. Bei der Bestimmung von v, bezüglich von λ erhielt die Meßstrecke l nacheinander verschiedene Werthe, und es wurde in jedem Falle aus der Einwirkung des Drahtes $a'\,b'\,c'\,d'$ geschlossen, ob und wie viel das Ende der Meßstrecke vor oder hinter dem ersten Umkehrpunkt lag, d. h. ob und wie viel l kleiner oder größer war als λ.

Tabelle I.

I. $L = 940$ cm, $h = 3$ cm.

	Bestimmung d. magn. Steifigkeit.						Bestimmung d. ersten Umkehrpunktes U_1					
	J (Amp.)	x_1 (Centimeter)	x_2 (Centimeter)	x_3 (Centimeter)	y_3 (Centimeter)	S	l (Centimeter)					λ
vorher	3,0	− 14,5	+ 6,4	+ 12,7	0,30	278	Einst.	21	31	41	—	31
nachh.	6,4	− 13,5	+ 5,0	+ 10,0	0,40	281	Beob.	v. U_1	u.	h. U_1	—	
vorher	6,4	− 13,5	+ 5,0	+ 10,0	0,30	374	Einst.	21	31	41	51	36
nachh.	6,3	− 14,0	+ 6,0	+ 12,1	0,46	349	Beob.	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	e. h. U_1	
vorher	6,3	− 14,0	+ 6,0	+ 12,1	0,40	402	Einst.	—	32	42	52	39
nachh.	6,3	− 15,9	+ 7,0	+ 13,8	0,47	439	Beob.	—	v. U_1	w. h. U_1	h. U_1	
II. $L = 1140$ cm, $h = 3$ cm.												
vorher	4,9	− 13,0	+ 6,3	+ 12,5	0,40	326	Einst.	24	34	44	54	39
nachh.	4,9	− 13,0	+ 6,8	+ 13,2	0,435	326	Beob.	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	e. h. U_1	
vorher	4,9	− 13,0	+ 6,8	+ 13,2	0,38	373	Einst.	28	38	48	58	43
nachh.	4,9	− 12,5	+ 6,8	+ 13,1	0,39	354	Beob.	e. v. U_1	v. U_1	h. U_1	e. h. U_1	
vorher	6,5	− 12,5	+ 6,8	+ 13,1	0,46	398	Einst.	28	38	48	58	48
nachh.	6,5	− 12,5	+ 6,8	+ 13,0	0,44	407	Beob.	e. v. U_1	v. U_1	u.	h. U_1	

Abkürzungen: Einst. = Einstellung, e. v. U_1 = erheblich vor U_1, v. U_1 = vor U_1, u. = unsicher ob vor oder hinter U_1, w. h. U_1 = wenig hinter U_1, h. U_1 = hinter U_1, e. h. U_1 = erheblich hinter U_1.

Tabelle II.

I. $L = 940$ cm.				
S	$\frac{v}{V}$	α	$\frac{e}{m}$ elektrostatisch	elektromagn.
279	0,132	$\frac{1}{1470}$	$4{,}25.10^{17}$	$1{,}42.10^{7}$
362	0,153	$\frac{1}{1310}$	$3{,}80.10^{17}$	$1{,}27.10^{7}$
420	0,166	$\frac{1}{1230}$	$3{,}56.10^{17}$	$1{,}19.10^{7}$
II. $L = 1140$ cm.				
326	0,137	$\frac{1}{1300}$	$3{,}78.10^{17}$	$1{,}26.10^{7}$
364	0,151	$\frac{1}{1290}$	$3{,}73.10^{17}$	$1{,}24.10^{7}$
403	0,168	$\frac{1}{1290}$	$3{,}75.10^{17}$	$1{,}25.10^{7}$

Von den beigefügten Tabellen enthält die erste die direkten Beobachtungsdaten; in der zweiten sind die Ergebnisse zusammengestellt, wobei für die magnetische Steifigkeit das arithmetische Mittel der jedesmaligen beiden Werthe genommen wurde. —

Der Gasdruck war bei den ersten Versuchen der beiden Reihen $^1/_4$—$^1/_3$ mm und bei den letzten ungefähr $^1/_{10}$ mm.

Nach den Beobachtungen erscheinen etwa

$$\alpha = \frac{1}{1300},$$

$$\left(\frac{e}{m}\right)_{\text{elektrost.}} = 3{,}77 \cdot 10^{17}, \quad \left(\frac{e}{m}\right)_{\text{elektromagn.}} = 1{,}26 \cdot 10^{7}$$

als die wahrscheinlichsten Werthe für das auf $O = 16$ bezogene und auf 1 Elektron kommende Atomgewicht α und für das Verhältniß e/m von Ladung in elektrostatischen oder elektromagnetischen Einheiten und Masse in Grammen. Im Hinblick auf die zu fürchtenden systematischen Beobachtungsfehler müssen für α die Werthe

$$\frac{1}{1600} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1050}$$

noch als recht wohl möglich bezeichnet werden; die Werthe

$$\frac{1}{1900} \quad \text{und} \quad \frac{1}{900}$$

dagegen sind schon sehr unwahrscheinlich. Entsprechend ergeben sich für e/m bei elektrostatischem oder elektromagnetischem Maaß die Werthe

$$4{,}64 \cdot 10^{17} \quad \text{und} \quad 3{,}04 \cdot 10^{17},$$
$$1{,}55 \cdot 10^{7} \quad \text{und} \quad 1{,}01 \cdot 10^{7}$$

als gut möglich, die Werthe

$$5{,}51 \cdot 10^{17} \quad \text{und} \quad 2{,}61 \cdot 10^{17},$$
$$1{,}84 \cdot 10^{7} \quad \text{und} \quad 0{,}87 \cdot 10^{7}$$

dagegen als sehr unwahrscheinlich.

Anmerkung am 23. Juli 1898. Nach Vorlegung der Arbeit am 19. März d. J. wurden noch eine Reihe weiterer Studien und Messungen vorgenommen; diese sind bei dem vorliegenden Abdruck berücksichtigt worden.

E. Wiechert.

Ueber das bei der sogenannten totalen Reflexion in das zweite Medium eindringende Licht.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Juli 1898.

Daß bei der sogenannten totalen Reflexion die einfallende Welle auch in dem zweiten Medium eine Oscillation erregt, wird gewöhnlich durch ein Experiment dargethan, das schon auf Newton und Fresnel zurückgeht. Dasselbe benutzt eine nahezu planparallele Schicht eines optisch dünneren Mediums (2) von außerordentlich kleiner Dicke — den Zwischenraum zwischen einer Ebene und einer sie berührenden Kugelfläche, — die sich zwischen zwei optisch dichteren Körpern (1) und (3), am einfachsten derselben Art, befindet. Fällt in (1) auf die Grenzfläche der Schicht eine ebene Welle unter einem Winkel, größer, als der Winkel der totalen Reflexion, so tritt bei hinreichend kleiner Dicke der Schicht aus deren anderer Grenzfläche eine ebene Welle gewöhnlichen Lichtes in das Medium (3) aus.

Herr Quincke [1]) hat diese Welle ausführlich untersucht, und ich [2]) habe gezeigt, daß seine Beobachtungen mit der Theorie, wie sie von F. Neumann und Mac Cullagh für den Vorgang der einfachen totalen Reflexion auf Grund der Annahme einer Oscillation im zweiten Medium entwickelt ist, qualitativ überall und quantitativ in allen Punkten, die genauerer Messung zugänglich sind, übereinstimmt.

---

1) G. Quincke, Berl. Ber. 1865 p. 294, Pogg. Ann. 127, p. 1 u. 199, 1865.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1884 No. 2. p. 49.

Indessen erscheint dieser Beweis als umständlich, vielleicht sogar als nicht ganz befriedigend, da ja in den Fällen, wo Licht in das dritte Medium eindringt, die Reflexion an der Grenze (1, 2) eben keine totale ist. Jedenfalls würde der Nachweis jener im zweiten Medium stattfindenden Schwingungen schlagender sein, wenn es gelänge, — was noch Niemand versucht zu haben scheint — dieselben bei factischer totaler Reflexion ohne das Hülfsmittel eines dritten Körpers im zweiten Medium selbst sichtbar zu machen. Im Folgenden setze ich eine Methode auseinander, die, wie mir scheint, das gestellte Problem auf das Einfachste löst.

Um das Verfahren zu erläutern, sei an das erinnert, was die Theorie über die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingungen aussagt. Ich will mich dabei an die Darstellung anschließen, die ich an anderer Stelle [1]) von dem Vorgang gegeben habe.

Die Theorie setzt eine einfallende Schwingung mit unendlichen, ebenen, homogenen Wellen voraus, die eine unendliche, ebene Grenzfläche zwischen zwei unendlichen, homogenen, isotropen Körpern trifft. Ist der Einfallswinkel φ gleich dem Grenzwinkel, d. h., ist $\sin\varphi = 1/n$, — unter n das Brechungsverhältniß des ersten gegen das zweite Medium verstanden, — so schreitet im zweiten Medium die gebrochene, ebene, homogene Welle parallel zur Grenze fort, steht also selbst normal zur Grenze. Wächst der Einfallswinkel über den Grenzwinkel, so behalten die Schwingungen im zweiten Medium immer noch gleiche Phasen in Ebenen, normal zur Grenze, aber in diesen „Wellenebenen“ ist nunmehr die Amplitude nicht mehr constant; sie nimmt vielmehr normal zur Grenze ab, sodaß die Ebenen constanter Amplitude der Grenze parallel und somit normal zu den Wellenebenen liegen. Die erregte Schwingung pflanzt sich jetzt in derselben Richtung, wie bei dem Einfall unter dem Grenzwinkel, aber in inhomogenen Wellen und mit einer vom Einfallswinkel abhängigen Geschwindigkeit längs der Grenze fort.

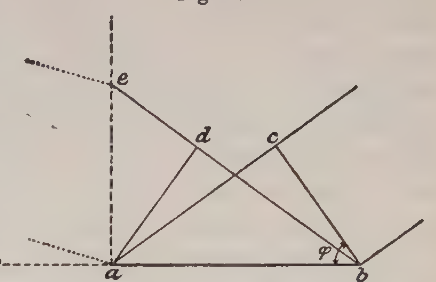
Bei dieser Bewegung tritt im Mittel keine Energie durch die Grenzfläche aus dem ersten in das zweite Medium, sondern der Energiestrom kommt im zweiten Medium aus dem Unendlichen und läuft mit den inhomogenen Wellen in's Unendliche. Auf diese Weise ist eine totale Reflexion mit dem Bestehen einer Schwingung im zweiten Medium vereinbar.

In den wirklichen Fällen ist weder die reflectirende

1) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Leipzig 1895 u. 96 Bd. II p. 639 u. f.

Grenzfläche, noch die einfallende Welle unendlich, es kann daher jener Energiestrom auch nicht aus dem Unendlichen kommen. Stellt in der die Einfallsebene wiedergebenden Fig. 1 *ab* die Grenze zwischen den Medien (1) und (2) dar, *bc* eine einfallende Wellenebene, so haben wir uns vorzustellen, daß an der Stelle *b*, wo die Bewegung im zweiten Medium beginnt der reflectirten Welle diejenige Energie entzogen wird, welche in der im zweiten Medium fortschreitenden inhomogenen Welle von *b* nach *a* geführt wird. Dieser Vorgang müßte sich eigentlich in dem Aussehen der Beugungserscheinung kund geben, welche den Rand der reflectirten Welle begleitet; indessen ist der Verlust an Energie gegenüber dem Gesammtbetrag der reflectirten Energie so gering, daß er sich den Beobachtungen entziehen dürfte.

Fig. 1.



Die im zweiten Medium fortschreitende Welle steht an jeder Stelle zwischen *a* und *b* mit der reflectirten Welle in einer solchen Wechselwirkung, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind, und die sog. totale Reflexion ermöglicht wird. Est ist nun die Frage, was an der Stelle *a* geschieht, von der aus nach links keine Reflexion mehr stattfindet, entweder weil die einfallende Welle, oder weil die Grenzfläche zwischen den beiden Medien nicht weiter reicht.

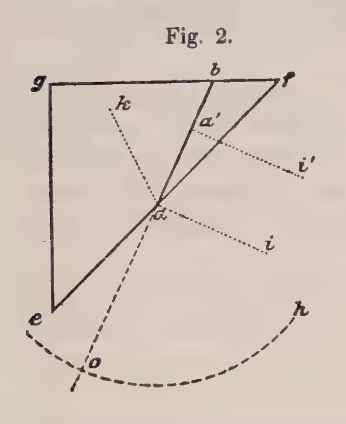
Denken wir uns etwa, um die Vorstellung zu fixiren, das Medium (1) außer durch die eine Ebene *ab* auch noch durch eine zweite *ac* begrenzt, so erscheint es plausibel, daß die längs *ba* fortschreitende Welle, bei *a* von der Verbindung mit der einfallenden und reflectirten gelöst, sich im Medium (2) frei ausbreiten wird, während die reflectirte Welle nach Durchtritt durch die Grenzfläche *ae* längs ihrer von *a* ausgehenden seitlichen Begrenzung die bekannte Beugungserscheinung des „einfachen Randes“ zeigen wird.

Man darf vermuthen, daß die von dem Rande *a* in das zweite Medium fortgepflanzte Schwingung unter geeigneten Umständen in das Auge geleitet, auf dieses zu wirken vermag, und da die gebrochene Welle nur in einer äußerst kleinen normalen Entfernung von der Grenzfläche *ab* eine merkliche Intensität besitzt, so ist zu erwarten, daß ein — etwa mit Hülfe einer Lupe — von *o* aus auf die Kante *a* eingestelltes Auge diese Kante erleuchtet sehen wird.

Indessen ist diese nächstliegende Anordnung des Experimentes von vorn herein als nicht reinlich abzuweisen. Denn die „Kante“ zwischen den beiden Flächen *ae* und *ab* ist in der Wirklichkeit stets eine Cylinderfläche von sehr starker Krümmung. Deshalb tritt durch sie jederzeit ein Theil der auffallenden Welle nach einer gewöhnlichen Brechung in das zweite Medium aus und die Kante *a* könnte einem Beobachter von *o* aus auch dann hell erscheinen, wenn bei der totalen Reflexion im zweiten Medium keine Bewegung stattfände.

Der hervorgehobene Uebelstand läßt sich nun aber leicht dadurch vermeiden, daß man die Grenzfläche *ae* nicht normal zu *ab* legt, sondern den Winkel zwischen *ab* und *ae* so wählt, daß die einfallende Welle, wie an *ab*, so auch an *ae* totale Reflexion erleidet. In diesem Falle kann offenbar durch die Kante *a*, resp. durch die sie ersetzende kleine Cylinderfläche, kein Licht vermöge gewöhnlicher Brechung in das zweite Medium gelangen, und die Fehlerquelle ist beseitigt.

Fig. 2.



Die von mir für die Beobachtung gewählte Anordnung ist durch Fig. 2 verdeutlicht. An ein rechtwinkliges gleichschenkliges Glasprisma *efg* wurde eine Fläche *ab* so angeschliffen, daß sie die Kante *f* abstumpfte und mit der Hypothenusenfläche den Winkel 20° einschloß. Es war Sorge getragen, diese Fläche besonders nächst der Kante *a* sorgfältig eben herzustellen. Die Firma Carl Zeiß in Jena hat diese Arbeit sehr schön ausgeführt. Eine ebene Welle, die nahezu normal auf die Kathedenfläche *bg* auffällt, wird dann längs der ganzen Grenze *bae* „total“ reflectirt; die gebrochene Welle, welche längs *ba* fortschreitet, wird an der Stelle *a* von der einfallenden und der reflectirten frei und breitet sich in die Luft aus.

Freilich bedingt die beschriebene Anordnung eine andere Schwierigkeit: nämlich die Wirkung, welche jetzt die zweite Grenzfläche *ae* auf die von der Kante *a* ausgehende Schwingung übt, eine Wirkung, die kaum zuverlässig zu schätzen ist, und die deshalb eine quantitative Prüfung der Theorie auf dem zunächst eingeschlagenen Wege vereiteln dürfte.

Indessen besitzt bei diesem ganz neuem Phänomen auch schon eine qualitative Erforschung ein Interesse. Und so mag denn

betont werden, daß, wenn das Licht einer electrischen Lampe nahezu normal auf die Fläche *bg* auffällt, ein von einem Punkt zwischen *e* und *h* aus auf die Kante *a* eingestelltes Auge dieselbe in hellem Lichte strahlend sieht. Es kann kaum bezweifelt werden, daß die bei der „totalen" Reflexion im zweiten Medium erregte Bewegung die Ursache dieser Lichterscheinung ist.

Die genauere Betrachtung liefert folgende Resultate:

Die Farbe des Lichtes ist von der des Lichtes der Bogenlampe durch einen Stich in's Röthlich-Gelbe sehr merklich unterschieden. Seine Intensität ist bei gegebenem Einfallswinkel am größten, wenn das Auge nahezu der Fläche *ae* parallel beobachtet, und nimmt ab, wenn das Auge auf einem Kreisbogen in der Richtung nach *h* hin bewegt wird. Bei wachsendem Einfallswinkel zeigt sich für dieselbe Beobachtungsrichtung eine schnelle Abnahme der wahrgenommenen Intensität.

Fällt unter einem Azimuth von 45° lineärpolarisirtes Licht ein, so scheint das von der Kante ausgehende Licht nahezu dieselbe Eigenschaft zu haben.

Einige dieser Wahrnehmungen lassen sich aus den Formeln für die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingungen vollständig erklären; für andere genügen dieselben noch nicht für sich allein, da die im Auge wirksame Lichtbewegung zwar eine Folge jener Schwingungen, aber nicht mit ihnen identisch ist. —

Das Problem der totalen Reflexion wird bekanntlich am einfachsten in complexer Form behandelt. Wir benutzen zur Darstellung des Vorganges den Neumann'schen Schwingungsvector, wählen die *XY*-Ebene zur Grenzfläche, die *XZ*-Ebene zur Einfallsebene und bestimmen die einfallende Welle durch die reellen oder die imaginären Theile der folgenden complexen Componenten:

$$1) \qquad \mathfrak{u}_e = -\gamma E_p e^{iT}, \qquad \mathfrak{v}_e = +E_s e^{iT}, \qquad \mathfrak{w}_e = +\alpha E_p e^{iT}$$

worin E_p, E_s die einfallenden Amplituden parallel und senkrecht zur Einfallsebene darstellen,

$$2) \qquad \alpha = \sin\varphi, \qquad \gamma = \cos\varphi, \qquad T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)$$

ist, und φ den Einfallswinkel, τ die Periode, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen homogenen Welle im ersten Medium (Glas) bezeichnet.

Dann sind im Falle totaler Reflexion die Schwingungscompo-

nenten der gebrochenen Wellen dargestellt durch die reellen oder die imaginären Theile der Ausdrücke

$$3)\qquad \mathfrak{u}_d = i\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}\,\mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{T}},\quad \mathfrak{v}_d = \mathfrak{D}_s e^{i\mathfrak{T}},\quad \mathfrak{w}_d = \alpha n \mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{T}},$$

wobei n das Brechungsverhältniß des ersten gegen das zweite Medium bezeichnet, und

$$4)\qquad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha n x - iz\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}{\omega_0}\right)$$

ist, unter ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen homogenen Welle im zweiten Medium (Luft) verstanden, die mit n und ω in der Beziehung steht

$$5)\qquad n\omega = \omega_0.$$

Die Abkürzungen $\mathfrak{D}_p$ und $\mathfrak{D}_s$ haben dabei die folgenden Bedeutungen:

$$6)\qquad \mathfrak{D}_p = E_p \frac{2\gamma(n\gamma + i\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1})}{n^2 - 1},\quad \mathfrak{D}_s = E_s \frac{2\gamma(\gamma + in\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1})}{(n^2-1)\,\alpha^2\,(n^2 - \gamma^2)}.$$

Damit totale Reflexion stattfinde, muß gelten

$$7)\qquad \alpha^2 n^2 > 1.$$

Als complexe Amplituden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ der Schwingungscomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ werden wir nach (3) und (4) die Ausdrücke

$$8)\qquad \mathfrak{U} = i\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}\,\mathfrak{D}_p \varepsilon,\quad \mathfrak{V} = \mathfrak{D}_s \varepsilon,\quad \mathfrak{W} = \alpha n \mathfrak{D}_p \varepsilon$$

bezeichnen, in denen

$$9)\qquad \varepsilon = e^{-\frac{2\pi z}{\lambda_0}\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}$$

ist, und $\lambda_0 = \tau\omega_0$ die der Periode τ entsprechende Wellenlänge im zweiten Medium (Luft) bezeichnet.

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die complexen Amplituden zweier Schwingungen von der Form

$$\mathfrak{P}e^{i\mathfrak{T}} \text{ und } \mathfrak{Q}e^{i\mathfrak{T}},$$

und setzt man

$$10)\qquad \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} = Re^{id},$$

so stellt bekanntlich R das Verhältniß der reellen Amplituden beider Schwingungen und d die Phasenbeschleunigung der ersten gegen die zweite Schwingung dar.

Hieraus folgt zunächst bei Anwendung auf das Verhältniß $\mathfrak{U}/\mathfrak{W}$, daß die Schwingungscomponenten nach der X- und der Z-Axe eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ besitzen, also eine elliptische Schwingung mit zur X- und Z'-Axe parallelen Hauptaxen ergeben.

Ferner liefert die Anwendung auf die Verhältnisse $\mathfrak{U}/E_p$, $\mathfrak{V}/E_s$, $\mathfrak{W}/E_p$ für die reellen Amplituden U, V, W der Schwingungscomponenten nach den Coordinatenaxen die Werthe

$$11)\quad U^2 = E_p^2 \frac{4\gamma^2 \varepsilon^2 (n^2\alpha^2 - 1)}{n^2 - 1}, \quad V^2 = E_s^2 \frac{4\gamma^2 \varepsilon^2}{(n^2-1)(\alpha^2 n^2 - \gamma^2)},$$
$$W^2 = E_p^2 \frac{4n^2 \alpha^2 \gamma^2 \varepsilon^2}{n^2 - 1}.$$

Endlich erhält man aus dem Werth von $\mathfrak{V}/\mathfrak{W}$ für die Beschleunigung d der $\mathfrak{v}$- gegen die $\mathfrak{w}$-Componente die Beziehung

$$12)\quad \operatorname{tg} d = \frac{\gamma\sqrt{\alpha^2 n^2 - 1}}{\alpha^2 n}. \text{ —}$$

Um den Verlauf der Functionen U^2, V^2, W^2 einfach übersehen zu können, sind in Figur 3 für ein Medium (1) vom Brechungsverhältniß $n = 3/2$ gegen das Medium (2) die Curven construirt, welche man erhält, wenn man die Einfallswinkel φ als Abscissen, die Werthe der Ausdrücke

$$13)\quad U^2/E_p^2\varepsilon^2 = \overline{U}^2, \quad V^2/E_s^2\varepsilon^2 = \overline{V}^2, \quad W^2/E_p^2\varepsilon^2 = \overline{W}^2$$

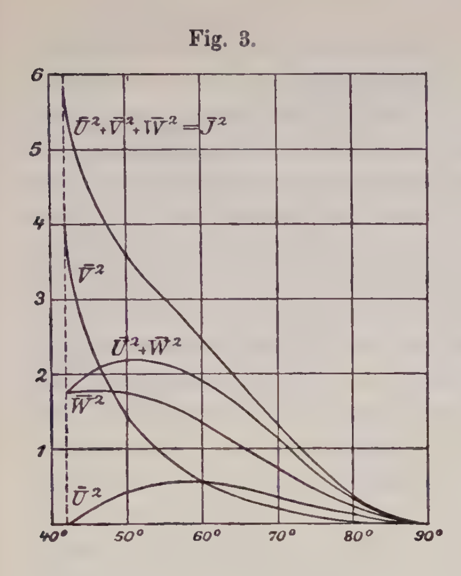
als Coordinaten aufträgt. Ebenda finden sich auch die Curven für die Functionen $\overline{U}^2 + \overline{W}^2$ und $\overline{U}^2 + \overline{V}^2 + \overline{W}^2 = \overline{J}^2$.

$\overline{U}^2$, $\overline{V}^2$, $\overline{W}^2$ stellen die Quadrate der Amplituden dar, die bei einfallenden Amplituden $E_p = 1$, $E_s = 1$ im zweiten Medium unendlich nahe zur Grenzfläche stattfinden; da aus den Quadraten der Amplituden durch Multiplication mit $2\pi^2/\tau^2$ die Energien der Volumeneinheit entstehen, so sind $\overline{U}^2$, $\overline{V}^2$, $\overline{W}^2$ auch die specifischen Energien der Komponenten nächst der Grenzfläche, welche den Energien Eins der einfallenden, parallel und normal zur Einfallsebene liegenden Schwingungen entsprechen.

$\overline{U}^2 + \overline{W}^2$ ist weiter die specifische Energie für die ganze in der Einfallsebene stattfindende Schwingung, welche durch die Energie Eins der in der Einfallsebene stattfindenden Schwingung erregt wird, $\overline{U}^2 + \overline{V}^2 + \overline{W}^2 = \overline{J}^2$ diejenige der gesammten im zweiten Medium stattfindenden Schwingung, welche der einfallenden Gesammt-Energie Zwei entspricht.

Die in Fig. 3 enthaltenen Curven zeigen für $\overline{U}^2$, $\overline{V}^2$, $\overline{W}^2$ sehr verschiedenen Verlauf; ebenso unterscheiden sich die Curven für

Fig. 3.



die Energien der Componenten parallel und normal zur Einfallsebene $\bar{U}^2 + \bar{W}^2$ und $\bar{V}^2$ wesentlich. Besonders sei auf die sehr bedeutenden Werthe hingewiesen, welche von den $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ erreicht werden, und welche die wohl hier und da gehegte Vorstellung, als sei die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium stattfindende Bewegung ihrer Intensität nach unbedeutend, gründlich widerlegen.

Der dem Grenzwinkel $\varphi = 42^0$ entsprechende Werth $\bar{V} = 4$ sagt z. B. aus, daß hier die zur Einfallsebene normale Schwingungscomponente in der gebrochenen Welle eine doppelt so große Amplitude besitzt, als in der einfallenden; ebenso ergiebt sich aus dem gleichzeitig stattfindenden $\bar{W}^2 = 1{,}8$ für die Componente normal zur Grenzfläche das 4/3fache der ganzen in der Einfallsebene liegenden einfallenden Amplitude.

Dies erklärt sich sehr einfach folgendermaßen. Nach den allgemeinen Bedingungen des Ueberganges für den Neumann'schen Vector müssen die parallelen Componenten der Schwingungen im ersten und im zweiten Medium nächst der Zwischengrenze einander gleich werden; d. h., es muß in sogleich verständlicher Bezeichnung gelten:

$$\bar{u}_e + \bar{u}_r = \bar{u}_d, \qquad \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{v}_d, \qquad \bar{w}_e + \bar{w}_r = \bar{w}_d.$$

Nun ist bei dem Einfall unter dem Grenzwinkel bereits totale Reflexion vorhanden, zugleich aber die Phasendifferenz zwischen einfallender und reflectirter Welle noch verschwindend. Demgemäß wird hier

$$\bar{u}_r = -\bar{u}_e, \qquad \bar{v}_r = \bar{v}_e, \qquad \bar{w}_r = \bar{w}_e,$$

woraus dann folgt

$$\bar{U} = 0, \qquad \bar{V} = 2E_s, \qquad \bar{W} = 2E_p \sin\varphi;$$

dies ergiebt dann in der That

$$\bar{V}^2 = 4E_s^2, \qquad \bar{W}^2 = 1{,}8\, E_p^2.$$

Bei größerem Einfallswinkel werden die nummerischen Beziehungen complicirter, da dann zwischen den einfallenden und den reflectirten Wellen Phasendifferenzen eintreten.

Die Gleichung (12) für die einfallendem lineärpolarisirtem Licht entsprechende Phasendifferenz d zwischen den beiden in der gebrochenen Wellenebene liegenden Schwingungscomponenten v und w ist insofern von Interesse, als sie für diese Größe denselben bekannten Ausdruck ergiebt, der für die Hälfte der Phasendifferenz zwischen den reflectirten Componenten gilt. Vom Grenzwinkel beginnend steigt demgemäß d von Null an schnell bis zu seinem bei ca. 50° Einfallswinkel erreichten Maximum von rund $2\pi/16$ an und fällt dann langsamer, um bei streifendem Einfall wieder zu verschwinden; d bleibt sonach immer sehr klein und die beiden Componenten v und w geben zusammen elliptisch polarisirtes Licht von sehr gestreckter Bahn, das als nahezu lineärpolarisirt gelten kann. —

Was nun die bei der oben beschriebenen Anordnung wirklich beobachtete Schwingung angeht, so vermag die Analysis, wie es scheint, gegenwärtig deren Gesetze noch nicht abzuleiten. Am nächsten läge wohl die Auffassung des Problemes als eines Falles von Beugung, insofern die letzte ungestörte ebene, inhomogene Welle im zweiten Medium, die in Fig. 2 durch die Gerade ai angedeutet ist, als Lichtquelle für den Raum zwischen ihr und der Prismenfläche ac angesehen werden darf. Indessen dürften der strengen Behandlung auch des so modificirten Problemes zunächst noch ziemliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Gegen seine angenäherte Lösung mit Hülfe des Huyghens'schen Principes erheben sich dagegen principielle Bedenken. Denn die Anwendbarkeit dieser Methode ist nicht durch allgemeine theoretische Ueberlegungen zu begründen, sondern muß durch die Beobachtung erwiesen werden. Für den hier vorliegenden Fall fehlen aber Analoga im Bereiche der bisher behandelten Beugungsprobleme durchaus. Jene benutzen wesentlich homogene transversale Wellen, während hier überaus inhomogene Wellen mit longitudinalen Schwingungscomponenten die Lichtquelle bilden. Ueberdies ist die Rolle, welche die Grenz-Ebene ac bei dem Vorgang spielt, ziemlich unklar. Wollte man sie als vollständig reflectirend einführen — wie das bei nahezu streifender Reflexion der allein wirksamen innersten Theile der leuchtenden Welle ai plausibel ist —, d. h., wollte man neben ai einfach das Spiegelbild ak (s. Fig. 2) als Lichtquelle benutzen und dann das Prisma ganz fortdenken, so käme man auf eigenthümliche Schwierigkeiten. Denn die ursprüngliche Welle ai

und die reflectirte ak müßten nach allen Lichttheorien mit einer Phasendifferenz von π schwingen, sie müßten sich also, da die wirksamsten Theile beider unmittelbar an einander liegen, bezüglich der ausgesandten Schwingungen im Wesentlichen zerstören. Dies erscheint einmal deshalb unmöglich, weil die Energie der beiden Schwingungen nicht spurlos verschwinden kann, es widerlegt sich aber auch durch den Umstand, daß, wenn man nach dieser Methode die Wirkung einer zwischen a und e gelegenen Wellenebene $a'i'$ auf eine Stelle zwischen a und a' berechnen wollte, ein mit der hier ja durchführbaren strengen Theorie im Widerspruch stehendes Resultat folgen würde. Hiernach ist eine einigermaßen befriedigende quantitative Bestimmung der von den inhomogenen Wellen zwischen a und b in den Raum ch fortgepflanzten Bewegung, und somit der dort wahrnehmbaren Vorgänge, zunächst wohl nicht ausführbar. —

Was sich nach der Seite der Qualität aussagen läßt, dürfte etwa Folgendes sein. Da in den inhomogenen Wellen die Schwingung nur innerhalb einer überaus schmalen Zone nächst der Fläche ab einen merklichen Werth hat, — der Factor ε in den Ausdrücken (11) für die Amplituden ist bei einem Einfallswinkel von 60° für $z = \lambda_0$ bereits $= 1/400$ — so sind erhebliche Interferenzerscheinungen nicht zu erwarten, und die an jeder Stelle wahrgenommene Intensität wird ungefähr der Gesammtenergie der Schwingung, welche sich in einem über der Flächeneinheit der Grenzfläche ab construirten Prisma befindet und als Flächendichte der Energie bezeichnet werden kann, parallel gehen. Da die auf die Volumeneinheit bezogene Schwingungs-Energie — die Raumdichte der Energie — für jede Componente durch das Quadrat von deren Amplitude mal $2\pi^2/\tau^2$ gegeben ist, so erhält man die oben characterisirten Energiedichten A^2, B^2, Γ^2 für die Componenten u, v, w, indem man bildet

$$14)\quad \mathrm{A}^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2}\int_0^\infty U^2 dz, \quad \mathrm{B}^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2}\int_0^\infty V^2 dz, \quad \Gamma^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2}\int_0^\infty W^2 dz.$$

Beachtet man, daß die U, V, W von z nur vermöge des Factors ε abhängen, so ergiebt sich sogleich

$$15)\quad \begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= E_p^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{\gamma^2(n^2\alpha^2-1)}{(n^2-1)\sqrt{n^2\alpha^2-1}}, \\ \mathrm{B}^2 &= E_s^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{\gamma^2}{(n^2-1)(\alpha^2 n^2-\gamma^2)\sqrt{n^2\alpha^2-1}}, \\ \Gamma^2 &= E_p^2 \frac{2\pi\lambda_0}{\tau^2} \frac{n^2\alpha^2\gamma^2}{(n^2-1)\sqrt{n^2\alpha^2-1}}. \end{aligned}$$

Die Flächendichte der Gesammtenergie, welche wir als für die wahrgenommene Intensität maßgebend betrachten, ist dann gegeben durch

16) $$\Delta^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2.$$

Bei einfallendem natürlichen Licht wird $E_p^2 = E_s^2 = E^2$, und es erhält demgemäß die Raumdichte δ_e der einfallenden Energie den Werth

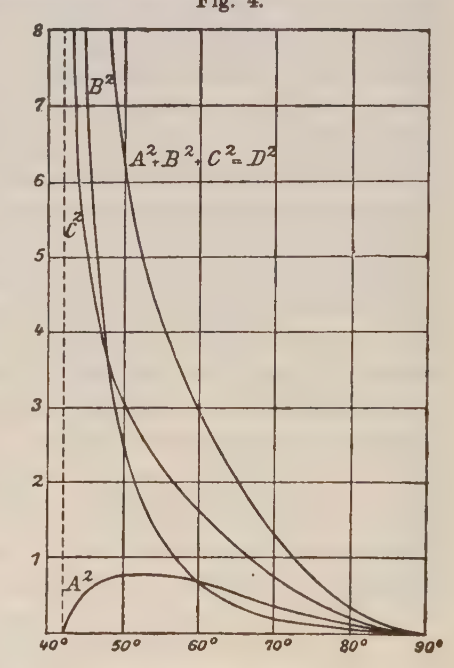
17) $$\delta_e^2 = \frac{4\pi^2}{\tau^2} E^2.$$

Der Verlauf der vier Functionen

$$A^2 = \mathrm{A}^2 \tau^2 / 2\pi\lambda_0 E_p^2, \quad B^2 = \mathrm{B}^2 \tau^2 / 2\pi\lambda_0 E_s^2, \quad C^2 = \Gamma^2 \tau^2 / 2\pi\lambda_0 E_p^2$$
$$\text{und } A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

ist für $n = 3/2$ in Figur 4 graphisch dargestellt, wobei wieder die Werthe des Einfallswinkels φ die Abscissen bilden. Daß B^2, C^2, und somit D^2, für den Grenzwinkel $\varphi = 42^0$ unendlich ausfallen, rührt davon her, daß in diesem Falle die gebrochene Welle noch homogen, ε also $= 1$ ist. Betrachtet man D^2 als für die in beliebiger Richtung wahrgenommene Intensität maßgebend, so ergiebt sich für letztere ein schnelles Abnehmen mit wachsendem Einfallswinkel, wie das die Beobachtung gleichfalls zeigt.

Fig. 4.



Setzt man einfallendes natürliches Licht voraus, schreibt demgemäß Δ^2 in der Form

18) $$\Delta^2 = \frac{4\pi^2 \lambda_0 D^2 E^2}{2\pi\tau^2} = \frac{\lambda_0 D^2 \delta_e^2}{2\pi}$$

und beachtet, daß D^2 nur wenig mit der Farbe variirt, so erkennt man, daß in den im zweiten Medium fortgepflanzten Schwin-

gungen die Farben mit großen Wellenlängen relativ stärker auftreten, als die mit kleinen. Bei einfallendem weißen Licht wird sonach das im zweiten Medium vorhandene einen Stich in's Röthliche besitzen, wie dies die Beobachtung in der That sehr auffällig ergiebt.

Das Product $\lambda_0 \delta_0^2$ stellt die Energie dar, welche in einer Schicht vom Querschnitt Eins und der Dicke λ_0 der einfallenden Wellen enthalten ist. Die Schwingungs-Energie Δ^2, die sich im zweiten Medium über der Einheit der Grenzfläche *ab* befindet, ist hiervon der $D^2/2\pi$-te Theil. Man darf hieraus schließen, daß die letzte ungestörte Welle *ai* im zweiten Medium nach dem Raume *eh* hin ungefähr ebenso leuchtet, wie ein vom einfallenden Licht beleuchteter Spalt von der Breite $\beta = \lambda_0 D^2/2\pi$. Bei einem Einfallswinkel von 60° würde hieraus nahezu $\beta = \frac{1}{2}\lambda_0$, bei einem von 45° dagegen etwa $\beta = 2\lambda_0$ folgen. Das wirkliche Aussehen der Prismenkante scheint einer solchen Größenordnung nicht zu widersprechen.

Göttingen, Anfang Juli 1898.

Nachtrag.

Seit der Vorlegung der vorstehenden Notiz habe ich die darin beschriebenen Beobachtungen noch etwas weiter verfolgt.

Es schien mir nützlich, den Einfluß der voraussichtlich die inhomogene Welle reflectirenden Fläche *ac* (Fig. 2) dadurch näher aufzuklären, daß deren Winkel gegen die total reflectirende Fläche *ab* verändert wurde. Freilich war, wenn der Grundgedanke der oben dargestellten Anordnung, die totale Reflexion an den beiden Ebenen *ae* und *ab*, festgehalten werden sollte, für eine solche Aenderung nur ein geringer Spielraum gewährt. Eine Vergrößerung des Winkels *eab* bei festgehaltener Fläche *ac* müßte voraussichtlich die störende Wirkung der Fläche *ac* vermehren und erschien daher wenig aussichtsreich; eine Verkleinerung war nur innerhalb höchstens 20° ausführbar und führte zu mehr und mehr streifender Incidenz, also nach S. 304 zu einer mehr und mehr geschwächten Welle im zweiten Medium.

Da indessen die Beobachtung die erwartete Erscheinung in großer Deutlichkeit ergeben hatte, so ließ ich nunmehr die Forderung einer totalen Reflexion an der Fläche *ac* vollständig fallen, selbst auf die Gefahr hin, die Reinheit des Phänomens dadurch ein wenig

zu beeinträchtigen. Eine einfache geometrische Ueberlegung zeigt, wie man die Anordnung zu treffen hat, damit die Störung am wenigsten in's Gewicht fällt.

Denkt man die Kante bei a durch eine feine Cylinderfläche ersetzt, wie das der Wirklichkeit entspricht, und bestimmt man den Winkelraum $\delta\psi$, über den ein von der concaven Seite einfallendes paralleles Strahlenbündel von der Breite $\delta\beta$ sich bei gewöhnlicher Brechung ausbreitet, so erhält man die Formel

$$\delta\psi = \frac{n\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\,\frac{\delta\beta}{\varrho}.$$

Hierin bezeichnet φ_1 den Einfalls-, φ_2 den Brechungswinkel und ϱ den Krümmungsradius des Cylinders an der Stelle, wo das Strahlenbündel ihn durchsetzt. ϱ darf als überall auf dem Cylinder endlich und überdies als sehr klein angesehen werden wird. $\delta\psi/\delta\beta$ nach dieser Formel unendlich groß, wenn $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ ist, d. h. für den unter dem Grenzwinkel einfallenden Strahl. In diesem Fall ist also das durch gewöhnliche Brechung aus dem Prisma austretende Licht vollkommen wirkungslos; es hat demgemäß auch eine nur schwache Wirkung, wenn der Einfallswinkel dem Grenzwinkel nahe liegt.

Fig. 5.

Stellt man also ein Prisma von der in Fig. 5 gezeichneten Form *abge* dar, wo der Winkel bei a 135° beträgt, und läßt man Licht normal auf die Fläche *bg* auffallen, so erfüllt der durch die „Kante" bei a in gewöhnlicher Brechung austretende Strahlenfächer den Winkelraum *lam*, wobei $\angle\, lae = 42^0$, $\angle\, mae = 90^0$ ist; die Lichtintensität nimmt in ihm von m nach l zu Null ab. Der Winkelraum *eal* ist also von regelmäßig gebrochenem Licht vollkommen, *lao* sehr nahezu frei.

Bei dem rechtwinkelig-gleichschenkeligen Prisma *abg* ist unter analogen Umständen allein der Winkelraum *lan* mit der Oeffnung 96° von regelmäßig gebrochenem Licht erfüllt, das nunmehr in der Nähe der beiden Grenzlinien *al* und *an* verschwindende Intensität besitzt. In beiden Fällen würde also eine Beobachtung in dem Winkelraum *eal* vollkommen reinliche Verhältnisse, bei feinzugeschärfter Kante a innerhalb *lam* wenig und nahe der Grenze *al* fast garnicht gestörte vorfinden. Die Wirkung der zweiten Grenzfläche *ae* resp. *ag* des Prismas würde dabei aber auf das äußerste reducirt, wahrscheinlich vollständig eliminirt sein.

Die Firma Carl Zeiß in Jena hat mir zwei Prismen der vorbeschriebenen Gestalten *abge* und *abg* angefertigt, und ich habe sie in der früheren Weise der Beobachtung unterworfen. Daß die Kanten bei *a* sehr fein zugeschärft waren, ergab sich aus deren Anblick, wenn durch beide anliegende Flächen Licht in gewöhnlicher Brechung hindurchtrat; sie erschienen dann aus den Winkelräumen *lam* resp. *lan* betrachtet nur wenig leuchtend. Doch zeigte sich hierbei die Kante mit dem Winkel 90° weniger rein, als die vom Winkel 135°, und letztere wurde wiederum von der Kante des oben beschriebenen Prismas mit dem Winkel 160° übertroffen. Offenbar brechen beim Schleifen einer Kante um so leichter kleine Stücke aus, je kleiner der Kantenwinkel ist.

Fiel Licht normal auf die Fläche *bg*, und somit unter 45° auf die Fläche *ab*, sodaß es an letzterer total reflectirt wurde, so trat die oben beschriebene Wirkung der im zweiten Medium fortgepflanzten Welle mit außerordentlicher Deutlichkeit hervor; die Kante *a* leuchtete anscheinend am stärksten in der Richtung *ao* der Fortpflanzung jener Welle. Vergrößerte man den Einfallswinkel auf *ab*, so nahm die Lichtintensität bedeutend zu und war in der Nähe des Grenzwinkels so stark, daß man auf einer in einigen cm Abstand vorgehaltenen matten Glasscheibe einen deutlichen Lichtschein wahrnehmen konnte. Derselbe war am hellsten in der Nähe der Richtung *ao* und nahm nach *al* hin schnell, nach *am* hin langsamer an Stärke ab. Die gleiche Beobachtung ließ sich mit dem in Fig. 2 dargestellten Prisma anstellen, indem man das Licht nicht wie früher durch die Fläche *gb*, sondern durch *ge* eintreten ließ. —

Vielleicht gestattet die im Vorstehenden beschriebene und zunächst nur theoretisch interessante Erscheinung auch eine practische Verwendung.

Wenn die bei totaler Reflexion im zweiten Medium fortgepflanzten ebenen Wellen nur innerhalb eines äußerst schmalen Bereiches (innerhalb kleiner Bruchtheile einer Wellenlänge) eine sehr große Intensität (fast bis zum dreifachen der einfallenden) besitzen, so liegt es nahe, sie bei Spectralapparaten und ähnlichen Instrumenten an Stelle der von den Spalten ausgehenden Wellen zu verwenden. Strahlenbündel von solcher Feinheit sind durch Spalten bekanntlich nur sehr unvollkommen zu erhalten; das zeigen u. a. die zahlreichen Horizontalstreifen, die bei sehr engen Spalten das Spectrum durchziehen.

Angestellte Versuche scheinen mir die Brauchbarkeit der vorgeschlagenen Methode dargethan zu haben. Wurde an Stelle des

Spaltes eines Spectrometers die Kante *a* eines der oben beschriebenen Prismen gebracht, sodaß die Fläche *ba* die Axe des Collimatorrohres enthielt, und wurde Sonnenlicht nahezu unter dem Grenzwinkel auf diese Fläche geleitet, so erschien ein ausgezeichnet schönes Spectrum. Wie zu erwarten, leistete dabei das Prisma 1) mit dem Winkel 160^0 das Vollkommenste, das Prisma 3) mit einem Winkel von ca. 90^0 das Geringste.

Göttingen, Anfang August 1898.

Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1898.

Im Gebiete der quadratischen Formen von n Variabeln wird eine Compositionstheorie stattfinden, wenn für irgend drei quadratische Formen φ, ψ, χ von nicht verschwindender Determinante die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)\psi(y_1, y_2, \ldots y_n) = \chi(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

dadurch befriedigt werden kann, daß man die Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch geeignet gewählte bilineare Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ ersetzt. Da eine quadratische Form durch lineare Transformation der Variabeln in eine Summe von Quadraten übergeführt werden kann, so darf man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, an Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$(2) \qquad (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots y_n^2) = z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$$

betrachten. Hiernach ist die Frage, ob für quadratische Formen mit n Variabeln eine Compositionstheorie existirt, im Wesentlichen identisch mit der andern, ob man der Gleichung (2) durch geeignete bilineare Functionen $z_1, z_2, \ldots z_n$ der $2n$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ genügen kann. In den folgenden Zeilen will ich zeigen, daß dieses nur in den Fällen $n = 2, 4, 8$ möglich ist, daß also nur für binäre Formen, für quaternäre Formen und für Formen mit 8 Variabeln eine Compositionstheorie

existirt. Durch diesen Nachweis wird dann insbesondere auch die alte Streitfrage, ob sich die bekannten Produktformeln für Summen von 2, 4 und 8 Quadraten auf Summen von mehr als 8 Quadraten ausdehnen lassen, endgültig und zwar in verneinendem Sinne entschieden[1]).

Zur Erleichterung der Darstellung bediene ich mich der wohl auf Cayley[2]) zurückzuführenden Rechnung mit linearen Transformationen. Bezeichnet

$$(3) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

oder kürzer $A = (a_{\alpha\beta})$ eine solche Transformation, so möge unter A' diejenige Transformation verstanden werden, welche aus A durch Vertauschung der Horizontal- mit den Verticalreihen hervorgeht. Die Aufgabe, der Gleichung (2) durch n bilineare Functionen

$$z_\alpha = a_{\alpha 1} y_1 + a_{\alpha 2} y_2 + \cdots + a_{\alpha n} y_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

zu genügen, läßt sich nun offenbar auch so formuliren:

Man soll die Elemente $a_{\alpha\beta}$ der Transformation A als lineare homogene Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ so bestimmen, daß die Transformation A der Gleichung

$$(4) \qquad AA' = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

genügt.

---

1) Roberts und Cayley haben sich im 16ten und 17ten Bande des Quarterly Journal mit dem Nachweis beschäftigt, daß ein Produkt von zwei Summen von je 16 Quadraten nicht als Summe von 16 Quadraten darstellbar sei. Ihre äußerst mühsamen auf Probiren beruhenden Betrachtungen besitzen indessen keine Beweiskraft, weil ihnen bezüglich der bilinearen Formen $z_1, z_2, \ldots$ specielle Annahmen zu Grunde liegen, die durch nichts gerechtfertigt sind. Die ältere Litteratur über den Gegenstand findet sich in der Arbeit von Roberts erwähnt. Man vergleiche auch: Brioschi „Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair", Crelles Journal Bd. 52. F. Studnicka: „Neuer Beweis des Satzes, daß das Produkt der Summe von acht Quadratzahlen mit der Summe von acht Quadratzahlen sich als Summe von acht Quadratzahlen darstellen lasse". Prager Berichte 1883. A. Puchta, „Ueber einen Satz von Euler-Brioschi-Genocchi". Wiener Berichte. Bd. 96.

2) Cayley, A memoir on the theory of Matrices. Phil. Trans. vol. 148.

Ordnet man A nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so erhält man

$$(5) \qquad A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n,$$

wo $A_1, A_2, \ldots A_n$ Transformationen mit constanten Coefficienten bezeichnen, und die Gleichung (4) gewinnt die Gestalt:

$$(6) \qquad (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)(x_1 A_1' + x_2 A_2' + \cdots + x_n A_n') = \\ = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Der Vergleich der Glieder mit x_n^2 zeigt, daß $A_n A_n' = 1$ sein muß. Führt man daher die Transformationen

$$(7) \qquad B_1 = A_1 A_n', \; B_2 = A_2 A_n', \ldots B_{n-1} = A_{n-1} A_n'$$

ein und setzt dementsprechend

$$A_i = B_i A_n, \qquad A_i' = A_n' B_i', \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

so geht die Gleichung (6) in die folgende über:

$$(8) \; (x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_{n-1} B_{n-1} + x_n)(x_1 B_1' + x_2 B_2' + \cdots + x_{n-1} B_{n-1}' + x_n) = \\ = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Entwickelt man hier die linke Seite, so ergiebt die Coefficientenvergleichung

$$B_i B_i' = 1, \qquad B_i' = -B_i, \qquad B_i B_k' = -B_k B_i' \quad (i \lessgtr k)$$

und die letzteren Gleichungen können offenbar auch durch die folgenden ersetzt werden:

$$(9) \qquad B_i^2 = -1, \qquad B_i B_k = -B_k B_i, \qquad B_i' = -B_i \quad (i \gtrless k)$$

Auf diese Weise ergeben sich also aus jeder Transformation A, welche der Bedingung (4) genügt, $n-1$ Transformationen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$, welche die Gleichungen (9) befriedigen. Wenn umgekehrt $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ den Gleichungen (9) genügen, wenn ferner A_n eine beliebig gewählte orthogonale Transformation bezeichnet, so wird die Transformation

$$A = x_1 B_1 A_n + x_2 B_2 A_n + \cdots + x_{n-1} B_{n-1} A_n + x_n A_n$$

die Gleichung (4) befriedigen.

Hiernach brauchen wir uns nur noch mit der Aufgabe zu beschäftigen, alle Systeme von $n-1$ Transformationen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ zu bestimmen, welche den Gleichungen (9) genügen. Wir unterziehen jetzt diese Gleichungen einer näheren Discussion, welche zeigen wird, daß ausschließlich in den Fällen $n = 2, 4, 8$, Systeme von $n-1$ Transformationen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ existiren können, für

welche die Gleichungen (9) erfüllt sind. Betrachten wir zunächst die Gleichungen $B_i' = -B_i$. Dieselben besagen, daß die Transformationen B_i schiefsymmetrisch sind. Daher sind die Gleichungen (9) unverträglich, wenn n ungerade ist. Denn in diesem Falle würde die Determinante von B_i verschwinden müssen, was der Gleichung $B_i^2 = -1$ widerspricht.

Bei der weiteren Discussion dürfen wir hiernach voraussetzen, daß n gerade ist. Vermöge der Gleichungen (9) ist jede ganze Function von $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ linear darstellbar durch die 2^{n-1} Transformationen

$$(10) \quad 1, \quad B_{i_1}, \quad B_{i_1}B_{i_2}, \quad B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}, \ldots\ldots, \quad B_1 B_2 \ldots B_{n-1},$$

wobei die Indices bezüglich alle, den Ungleichungen

$$0 < i_1 < n, \quad 0 < i_1 < i_2 < n, \quad 0 < i_1 < i_2 < i_3 < n, \ldots\ldots$$

genügenden Werthsysteme zu erhalten haben. In Betreff dieser Transformationen (10) lehrt die Gleichung

$$(B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_r})' = B'_{i_r} \ldots B'_{i_2} B'_{i_1} = (-1)^r B_{i_r} \ldots B_{i_2} B_{i_1} = (-1)^{r+(r-1)+(r-2)+\cdots+1} B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_r},$$

daß die Transformation

$$B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_r}$$

symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, je nachdem $r \equiv 0, 3$ oder $r \equiv 1, 2 \pmod 4$ ist. Diese Thatsache gestattet nun weiter, die Frage zu entscheiden, ob zwischen den Transformationen (10) eine lineare Abhängigkeit bestehen kann. Bezeichnen wir allgemein mit $R, R_1, R_2, \ldots$ lineare Combinationen der Transformationen (10) mit nicht sämmtlich verschwindenden Coefficienten, so wird $R = 0$ die allgemeine Gestalt einer linearen Relation zwischen den Transformationen (10) vorstellen. Jede der Transformationen (10), welche in einer solchen Relation mit einem nicht verschwindenden Coefficienten behaftet ist, möge an der Relation „betheiligt“ heißen. Sind ferner $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ zwei Relationen, so will ich dieselben „einander fremd“ nennen, wenn es keine Transformation giebt, die gleichzeitig an beiden Relationen betheiligt ist. Endlich heiße eine Relation $R = 0$ „reducibel“, wenn ihre linke Seite in die Form $R = R_1 + R_2$ gesetzt werden kann, derart, daß $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ zwei einander fremde Relationen vorstellen. Im entgegengesetzten Falle heiße $R = 0$ „irreducibel“.

Offenbar genügt es, die irreducibeln Relationen zu betrachten. Eine solche Relation bleibt irreducibel, wenn man sie mit einer der Transformationen (10) multiplicirt, und durch eine derartige Multiplication kann man erreichen, daß die Transformation 1 mit einem nicht verschwindenden Coefficienten in die Relation eingeht.

Ferner leuchtet ein, daß die Transformationen, welche an einer irreducibeln Relation betheiligt sind, entweder sämmtlich symmetrisch oder sämmtlich schiefsymmetrisch sind. Sei nun

$$(11)\qquad 1 = \sum c_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} + \sum c_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} + \cdots\cdots$$

eine irreducible Relation. Durch Multiplication mit B_i, wo i irgend einen der Indices $1, 2, \ldots n-1$ bezeichnet, geht dieselbe über in:

$$B_i = \sum c_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_i + \sum c_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} B_i + \cdots\cdots.$$

Hier dürfen nun rechter Hand nur schiefsymmetrische Transformationen auftreten. Es muß daher $c_{i_1 i_2 i_3} = 0$ sein, wenn der Index i sich nicht unter den Indices i_1, i_2, i_3 befindet. Da aber der Index i willkürlich wählbar ist, so müssen sämmtliche Coefficienten $c_{i_1 i_2 i_3} = 0$ sein. Ebenso folgt, daß $c_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 0$ ist, wenn der Index i unter den Indices i_1, i_2, i_3, i_4 vorkommt; folglich sind sämmtliche Coefficienten $c_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 0$. Indem man so weiter schließt, erkennt man, daß die Relation (11) nur die Form

$$(11')\qquad 1 = c \cdot B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$$

besitzen kann, wobei überdies noch $n \equiv 0 \pmod{4}$ sein muß, weil andernfalls $B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$ eine schiefsymmetrische Transformation sein würde. Quadrirt man die beiden Seiten der Relation (11′), so erkennt man, daß $c = \pm 1$ sein muß. Außer der Relation (11′) können keine andern irreducibeln Relationen existiren, als die, welche aus (11′) durch Multiplication mit den Transformationen (10) hervorgehen.

Fassen wir die vorstehenden Ueberlegungen zusammen, so können wir sagen:

Befriedigen die $n-1$ Transformationen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ die Gleichungen (9), so ist nothwendig n eine gerade Zahl. Die 2^{n-1} Transformationen (10) sind ferner linear unabhängig, wenn $n \equiv 2 \pmod{4}$. Sie sind dagegen im Falle $n \equiv 0 \pmod{4}$ entweder linear unabhängig, oder aber es bestehen zwischen ihnen die Relationen, welche aus

$$(12)\qquad B_1 B_2 \ldots B_{n-1} = \pm 1$$

durch Multiplication mit den Transformationen (10) hervorgehen und keine andern irreducibeln Relationen. Die ersten 2^{n-2} der Transformationen (10) sind also unter allen Umständen linear unabhängig.

Hieraus folgt nun, daß die Lösbarkeit der Gleichungen (9) die Ungleichung

$$2^{n-2} \leqq n^2 \tag{13}$$

nach sich zieht, da zwischen mehr als n^2 Transformationen stets eine lineare Abhängigkeit besteht. Die Ungleichung (13) ist aber von $n = 10$ ab nicht mehr erfüllt. Es bleiben also nur die Fälle $n = 2, 4, 6, 8$, in welchen möglicher Weise die Gleichungen (9) eine Auflösung zulassen. Der Fall $n = 6$ läßt sich ohne weiteres ausscheiden. In diesem Falle würden nämlich die $2^5 = 32$ Transformationen (10) linear unabhängig sein müssen. Unter diesen Transformationen finden sich $5+10+1 = 16$ schiefsymmetrische. Allgemein besteht aber zwischen $\frac{n(n-1)}{2}+1$ schiefsymmetrischen Transformationen bei n Variabeln eine lineare Abhängigkeit, und es ergiebt sich für $n = 6$ der Werth von $\frac{n(n-1)}{2}+1 = 16$.

In den Fällen $n = 2, 4, 8$ ergiebt eine leichte, wenn auch etwas umständliche Discussion die wirkliche Auflösbarkeit der Gleichungen (9) und also die Existenz von Transformationen A, welche der Bedingung (4) genügen. Das Resultat dieser Discussion lautet folgendermaßen: Man verstehe unter A_0 in den Fällen $n = 2, 4, 8$ bez. die Transformation

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1, & -x_2 \\ x_2, & x_1 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1, & -x_2, & -x_3, & -x_4 \\ x_2, & x_1, & -x_4, & x_3 \\ x_3, & x_4, & x_1, & -x_2 \\ x_4, & -x_3, & x_2, & x_1 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_1, & -x_2, & -x_3, & -x_4, & -x_5, & -x_6, & -x_7, & -x_8 \\ x_2, & x_1, & -x_4, & x_3, & -x_6, & x_5, & -x_8, & x_7 \\ x_3, & x_4, & x_1, & -x_2, & -x_7, & x_8, & x_5, & -x_6 \\ x_4, & -x_3, & x_2, & x_1, & x_8, & x_7, & -x_6, & -x_5 \\ x_5, & x_6, & x_7, & -x_8, & x_1, & -x_2, & -x_3, & x_4 \\ x_6, & -x_5, & -x_8, & -x_7, & x_2, & x_1, & x_4, & x_3 \\ x_7, & x_8, & -x_5, & x_6, & x_3, & -x_4, & x_1, & -x_2 \\ x_8, & -x_7, & x_6, & x_5, & -x_4, & -x_3, & x_2, & x_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die allgemeinste Transformation A, welche der Bedingung (4) genügt, die folgende:

$$A = PA_0Q,$$

wobei P und Q willkürlich zu wählende orthogonale Transformationen mit constanten Coefficienten bezeichnen.

An die vorstehende Untersuchung knüpfen sich einige Fragen, auf die ich noch kurz hinweisen möchte. Wenn es auch, abgesehen von den Fällen $n = 2, 4, 8$, unmöglich ist, das Product von zwei quadratischen Formen von je n Variabeln $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$ darzustellen als quadratische Form von n bilinearen Functionen $z_1, z_2, \dots z_n$ jener Variabeln, so ist doch eine Darstellung jenes Produktes als quadratische Form von einer genügend groß gewählten Anzahl bilinearer Functionen der Variabeln $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$ immer möglich. Es fragt sich nun, welches der kleinste zulässige Werth dieser Anzahl ist. Transformirt man die quadratischen Formen auf Summen von Quadraten, so gewinnt die Frage folgende Gestalt:

Welches ist der kleinste Werth von m, für welchen die Gleichung

$$14) \qquad (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2$$

durch geeignet gewählte bilineare Functionen $z_1, z_2, \dots z_m$ der Variabeln $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$ befriedigt werden kann?

Diese Frage läßt sich noch dadurch verallgemeinern, daß man an die Stelle der Gleichung (14) die folgende:

$$(15) \qquad (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2$$

setzt, wobei p und n gegebene Zahlen bezeichnen und wiederum der Minimalwerth von m in Frage steht.

Andererseits kann man in vorstehender Gleichung auch n und m als gegeben annehmen und nach dem größten zulässigen Werthe von p fragen. Diese Fragestellung gestattet in dem Falle $n = m$ eine andere Einkleidung. Betrachtet man nämlich im Raume von n^2 Dimensionen, in welchem die n^2 Coordinaten eines Punktes mit $a_{ik}\,(i, k = 1, 2, \dots n)$ bezeichnet werden mögen, das Gebilde, welches durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 = \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ih}a_{ik} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots n;\ h \gtrless k)$$

definirt ist, so bezeichnet der Maximalwerth von p nichts anderes, als die höchste Dimension linearer Räume, die auf diesem Gebilde liegen. Uebrigens ergiebt eine Analyse, welche der oben dargelegten ganz ähnlich ist, daß dieser Maximalwerth von p im Falle eines ungeraden n gleich 1 ist und im Falle eines geraden n durch die Ungleichungen $2^{p-1} \leqq n^2$, resp. $2^{p-2} \leqq n^2$ eingeschränkt ist, je nachdem $n \equiv 2$ oder $n \equiv 0 \pmod{4}$ ist. Es kann also, wenn n eine gerade Zahl ist, der Maximalwerth von p nicht über $\frac{2 \lg n}{\lg 2} + 1$ bez. $\frac{2 \lg n}{\lg 2} + 2$ liegen.

Zürich, den 25. Juni 1898.

Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde.

Von

E. Timerding in Straßburg i. E.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 9. Juli 1898.

I.

Die Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde ist durch Herrn Reye in einer Reihe von Abhandlungen[1]) wesentlich synthetisch begründet und gleichzeitig in ihren Grundzügen so gut wie vollständig entwickelt worden. Darin mag auch wohl der Grund liegen, daß sie seither keine wesentliche Weiterbildung erfahren hat, nur W. Stahl gab[2]) eine kurze Notiz über die analytische Behandlung dieser Mannigfaltigkeiten. Er beschränkte sich indessen auf die ersten Ansätze, ohne sie weiter fortzuführen. Und doch beruht gerade hier auf der Analysis die Hoffnung, weiter zu gelangen, als die Synthesis führt.

Die analytische Behandlungsweise ist von der synthetischen durchaus verschieden. Während die letztere die linearen Mannigfaltigkeiten nach und nach aufbaut, geht die erstere von der allgemeinsten aus und löst diese in die in ihr enthaltenen niedrigeren Mannigfaltigkeiten auf. Bei der synthetischen Behandlung ergiebt sich zu jeder Mannigfaltigkeit eine andere, von der Herr Reye sagt, daß sie auf der ersteren ruht und diese sie trägt. So ruht auf einer Schaar projektiver Ebenenbüschel eine andere Schaar von Ebenenbüscheln. Die Axen beider Schaaren bilden die Regel-

1) Crelle's Journal, Bd. 104, 106, 107. 108.

2) Crelle's Journal, Bd. 107.

schaaren einer quadratischen Regelfläche und jede Schaar besteht aus den Ebenenbüscheln, die die Strahlen der einen Regelschaar aus denen der anderen projiziren. Ebenso ruht auf einer Schaar von projektiven Punktreihen eine andere, so daß die Träger beider wieder die beiden Regelschaaren einer quadratischen Regelfläche bilden und von diesen Regelschaaren die Strahlen der einen die Strahlen der anderen in homologen Punkten der auf ihnen liegenden projektiven Punktreihen schneiden. So zeigt sich gleichzeitig, wie diese Schaaren projektiver Ebenenbüschel oder Punktreihen durch zwei projektive Büschel oder Punktreihen vollständig bestimmt sind. Auf dem Netz projektiver Ebenenbüschel, die die Punkte einer cubischen Raumcurve aus ihren Sehnen projiziren, ruht die Reihe projektiver Ebenenbündel, die die Sehnen aus den Punkten der Raumcurve projiziren. Allgemein besteht die Mannigfaltigkeit, die auf einer anderen ruht, aus den Gebilden, die sich aus homologen Elementen der letzteren zusammensetzen.

Ganz anderer Art ist die Beziehung, welche die Grundlage für die analytische Behandlung der Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel oder Punktreihen bildet. Diese besteht zwischen einem Ebenenbüschel und einer zu ihm projektiven Punktreihe und drückt aus, daß beide in involutorischer Lage sind.

Soll der Ebenenbüschel

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) - \lambda (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4) = 0$$

mit der zu ihm projektiven Punktreihe

$$(y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 + y_4 \xi_4) + \frac{1}{\lambda} (z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4) = 0,$$

wo die ξ_μ Ebenencoordinaten bedeuten, in involutorischer Lage sein, so projizire man, um die Bedingung hierfür zu finden, die Punktreihe aus der Axe des Ebenenbüschels, das heißt, setze in der zweiten Gleichung

$$\xi_\mu = u_\mu - \varkappa v_\mu, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Der Wert von $\varkappa$, den diese dann liefert, ist der Parameter der Ebene im Büschel, die durch den dem Parameter λ entsprechenden Punkt der Punktreihe geht. Die Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ, nämlich

$$\sum z_\mu u_\mu - \varkappa \sum z_\mu v_\mu + \lambda \sum y_\mu u_\mu - \varkappa\lambda \sum y_\mu v_\mu = 0,$$

wird aber dann involutorisch[1]), wenn

1) Vgl. W. Stahl, a. a. O., p. 180.

$$\text{(A)} \qquad \sum y_\mu u_\mu + \sum z_\mu v_\mu = 0$$

ist. Die acht Größen u_μ, v_μ kann man als Coordinaten der einzelnen Ebenenbüschel in der Mannigfaltigkeit aller zu einander projektiver Ebenenbüschel bezeichnen. In der That findet man zu einem Ebenenbüschel

$$u - \lambda v = 0$$

alle zu ihm projektive, indem man u und v durch beliebige andere lineare Funktionen, u' und v', ersetzt und die Ebenen, die zum selben Werte von λ gehören, sich entsprechen läßt. Denn zwei lineare Funktionen u' und v' lassen sich immer so wählen, daß $u' = 0$ und $v' = 0$ zwei ganz beliebige Ebenen und $u' = v'$ eine beliebige durch die Schnittlinie der beiden ersten gehende dritte Ebene darstellt. Durch die linearen Funktionen u' und v' ist also der zweite Ebenenbüschel und seine projektive Beziehung zu dem ersten vollständig festgelegt.

Analog lassen sich die acht Größen y_μ, z_μ als Coordinaten der einzelnen Punktreihen in der Mannigfaltigkeit aller zu einander projektiver Punktreihen bezeichnen. Sie geben die Coordinaten zweier Punkte der geraden Linie an, die die Punktreihe trägt, aber umgekehrt sind sie durch diese Punkte erst dann bestimmt, wenn man auf ihrer Verbindunglinie einen dritten Punkt hinzunimmt, für den $y_\mu = z_\mu$ für $\mu = 1, 2, 3, 4$ sein soll.

Wegen der Analogie der Beziehung (A) zu der bekannten Relation, die ausdrückt, daß ein Punkt in einer Ebene liegt, wollen wir sagen, ein Ebenenbüschel und eine zu ihr projektive Punktreihe liegen vereinigt, wenn sie in involutorischer Lage sind, und können wir sie als reziproke Gebilde ansehen. Alle Ebenenbüschel, die mit einer gegebenen Punktreihe vereinigt liegen, bilden ein allgemeines lineares System projektiver Ebenenbüschel, und ebenso alle Punktreihen, die mit einem gegebenen Ebenenbüschel vereinigt liegen, ein allgemeines lineares System projektiver Punktreihen.

Unter den projektiven Ebenenbüscheln oder Punktreihen sind als singuläre solche enthalten, deren Ebenen oder Punkte alle coincidiren. Diese singulären Ebenenbüschel drücken sich, und analog die singulären Punktreihen, analytisch durch folgende Beziehung aus:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \frac{u_4}{v_4}.$$

Durch diese dreifache Gleichung ist in der Mannigfaltigkeit aller

projektiven Ebenenbüschel ein System von vier Dimensionen und vierten Grades dargestellt.

Die Mannigfaltigkeit der projektiven Ebenenbüschel oder Punktreihen gehört zu einer besonderen Art Mannigfaltigkeiten, die man als paarige oder gepaarte Räume bezeichnen könnte. Die acht Coordinaten, die die Elemente dieser Mannigfaltigkeit bestimmen, erscheinen in zwei Gruppen von je vieren gesondert, die auch mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet sind.

Hiermit hängt es zusammen, daß die grundlegenden linearen Mannigfaltigkeiten nicht die sind, deren Dimensionenzahl eins weniger beträgt als die der Gesamtmannigfaltigkeit, sondern die die Hälfte dieser Zahl, in unserem Falle 3, zur Dimensionenzahl haben. Diese Mannigfaltigkeiten sind dadurch ausgedrückt, daß die Coordinaten der einen Gruppe als lineare Funktionen der Coordinaten der anderen Gruppe gegeben sind. Sagen wir etwa, es sei

$$\text{(B)} \qquad u_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} v_\nu \quad \text{oder} \quad v_\nu = \sum_\mu A_{\mu\nu} u_\mu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Die Punktreihen, welche mit allen Büscheln dieser Mannigfaltigkeit vereinigt liegen, bilden selbst eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, die durch die Gleichungen

$$\text{(B')} \qquad z_\mu + \sum_\nu \alpha_{\nu\mu} y_\nu = 0 \quad \text{oder} \quad y_\nu + \sum_\mu A_{\nu\mu} z_\mu = 0, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

dargestellt ist.

Die Gleichungen (B) sind die Gleichungen der linearen Transformationen. Beziehen wir auf das Tetraeder, dessen Ebenen bei dieser linearen Transformation ungeändert bleiben und das wir das Haupttetraeder nennen wollen, ein neues Coordinatensystem, so erscheinen in diesem die Gleichungen (B) auf die einfache Form reduzirt:

$$(\beta) \qquad u_\mu - \alpha_\mu v_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

und die Gleichungen des mit dem Complex der Ebenenbüschel vereinigten Punktreihencomplexes werden gleichzeitig:

$$(\beta') \qquad y_\mu + \frac{1}{\alpha_\mu} z_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Die Größen α_μ können wir als die Parameter beider Complexe ansehen.

In die Ebenen des Haupttetraeders fallen die vier singulären Ebenenbüschel des Büschelcomplexes zusammen, und in den Ecken

des Haupttetraeders vereinigen sich die Punkte der singulären Punktreihen des Punktreihencomplexes.

Durch die vier Ecken des Haupttetraeders gehen vier homologe Ebenen in allen Büscheln des Büschelcomplexes, und die Ebenen des Haupttetraeders schneiden alle Punktreihen des Punktreihencomplexes in homologen Punktquadrupeln.

Die Ebenenbüschel des Büschelcomplexes gehen alle aus einem unter ihnen hervor durch die collinearen Transformationen, die das Haupttetraeder ungeändert lassen, und ebenso die Punktreihen des Punktreihencomplexes.

Wir erhalten die einzelnen Systeme homologer Ebenen der den Complex bildenden Ebenenbüschel, indem wir den Ebenenraum durch einen „Büschel" von Collineationen transformiren, die sich darstellen wie folgt:

$$\text{(C)} \qquad \varrho u_\mu = (\lambda - \alpha_\mu) v_\mu .$$

Auf dem so gegebenen Büschel collinearer Ebenenräume ruht nach Herrn Reye's Ausdruck der Büschelcomplex.

Alle Systeme homologer Punkte der zu dem mit dem Büschelcomplex vereinigten Complex gehörenden Punktreihen ergeben sich aus einem System durch die „Schaar" von Collineationen:

$$\text{(C')} \qquad \sigma y_\mu = \left(\varkappa + \frac{1}{\alpha_\mu}\right) z_\mu .$$

Auf der so bestimmten Schaar collinearer Punkträume ruht der Punktreihencomplex.

Die Axen der Ebenenbüschel des Complexes bilden einen tetraedralen Strahlencomplex, und derselbe Strahlencomplex wird gebildet von den geraden Trägern der Punktreihen, aus denen der mit dem Büschelcomplex vereinigte Complex besteht. Dieser Strahlencomplex läßt sich, wenn durch $p_{\mu\nu}$ auf das Haupttetraeder bezogene Liniencoordinaten bezeichnet sind, durch die Doppelgleichung darstellen

$$\text{(D)} \qquad \frac{p_{12}p_{34}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)} = \frac{p_{13}p_{42}}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)} = \frac{p_{14}p_{23}}{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)},$$

aus der die Beziehung

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

schon folgt.

Jede der Punktreihen des Punktreihencomplexes bestimmt ein lineares Büschelsystem sechster Stufe, das den Büschelcomplex

enthält, und umgekehrt jeder Büschel des letzteren ein Punktreihensystem sechster Stufe, das den Complex der Punktreihen enthält.

Der tetraedrale Complex begreift in sich vierfach unendlich viele quadratische Regelschaaren. Die zugehörigen Regelflächen zerfallen in zwei Gattungen. Die der einen Gattung sind dem Haupttetraeder umschrieben, die der anderen Gattung ihm einbeschrieben. Zur ersteren Gattung gehören die Complexkegel, zur letzteren die Complexcurven, als singuläre Flächen 2. Classe gefaßt. Die Flächen der ersten Gattung bestimmen die Büschelschaaren, die in dem Büschelcomplex enthalten sind, und die damit vereinigt liegenden Punktreihensysteme 5. Stufe, die den Punktreihencomplex enthalten. Die Axen der Büschel dieser Büschelreihen sind die zum tetraedralen Complex gehörigen Regelstrahlen der quadratischen Flächen, und homologe Ebenen schneiden sich jedesmal in den Strahlen der anderen Regelschaar. Die singulären Punktreihen der Punktreihensysteme werden durch die Punkte der Regelflächen dargestellt. Analoges gilt für die Flächen der zweiten Gattung, wenn man Ebenenbüschel und Punktreihen als reziproke Gebilde vertauscht.

Dem Haupttetraeder sind dreifach unendlich viele cubische Raumcurven umschrieben, deren sämtliche Sehnen zu dem tetraedralen Complex gehören, und dreifach unendlich viele cubische Raumcurven einbeschrieben, deren sämtliche Axen zu dem Complex gehören. Die ersteren haben zu je zweien die Strahlen einer quadratischen Regelschaar zu gemeinsamen Sehnen und die letzteren zu gemeinsamen Axen. Die ersteren Raumcurven gehen durch die Schaar der Collinationen (C′) und die letzteren durch den Büschel der Collineationen (C) in sich über. Die ersteren Raumcurven bestimmen je ein Büschelnetz, das zu dem Büschelcomplex gehört, und ein damit vereinigtes Punktreihensystem 4. Stufe, das den Punktreihencomplex enthält. Die singulären Punktreihen werden durch die Punkte der Raumcurve dargestellt. Analog bestimmen die dem Haupttetraeder einbeschriebenen Raumcurven je ein Punktreihennetz und ein damit vereinigtes Büschelsystem 4. Stufe, das durch den Büschelcomplex geht und dessen singuläre Büschel in die einzelnen Schmiegungsebenen der Raumcurve zusammenfallen.

Der Complex der Ebenenbüschel läßt sich durch ein Büschel von quadratischen Flächen erzeugen, wenn man von allen Punkten des Raumes die Polaren bez. der Flächen dieses Büschels sucht. In der That, sucht man bez. des Flächenbüschels

$$\sum x_\mu^2 - \lambda \sum \frac{x_\mu^2}{\alpha_\mu} = 0$$

die Polaren des Punktes mit den Coordinaten y_μ, so bilden diese Polaren den Büschel

$$\sum \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_\mu}\right) y_\mu x_\mu = 0,$$

und setzt man

$$u_\mu = y_\mu, \quad v_\mu = \frac{1}{\alpha_\mu} y_\mu,$$

so wird diese Gleichung

$$\sum (u_\mu - \lambda v_\mu) x_\mu = 0,$$

es ist aber

$$u_\mu = \alpha_\mu v_\mu,$$

wir erhalten also genau den oben betrachteten Complex.

Auf diese Weise ist der Complex projektiver Ebenenbüschel eindeutig auf den Punktraum abgebildet, so daß jedem Punkte des Raumes ein Ebenenbüschel des Complexes entspricht. Den Punkten einer geraden Linie entsprechen dann die Büschel einer in dem Complex enthaltenen Büschelschaar, den Ebenen des Raumes entsprechen die in dem Complex begriffenen Büschelnetze.

Ebenso kann man den Complex projektiver Punktreihen auf die Ebenen des Raumes abbilden. Sucht man nämlich bez. der Flächen 2. Classe der Schaar

$$\sum \xi_\mu^2 - \lambda \sum \alpha_\mu \xi_\mu^2 = 0$$

von der Ebene (η_μ) die Pole, so findet man die Punktreihe

$$\sum (1 - \lambda \alpha_\mu) \eta_\mu \xi_\mu = 0.$$

Läßt man die Ebene (η_μ) dann beliebig sich verändern, so sind alle Punktreihen, die man so erhält, projektiv auf einander bezogen und bilden einen Complex. Setzt man

$$y_\mu = \eta_\mu, \quad z_\mu = -\alpha_\mu \eta_\mu, \quad \varkappa = \frac{1}{\lambda},$$

so wird die obige Gleichung

$$\sum \left(y_\mu + \frac{1}{\varkappa} z_\mu\right) \xi_\mu = 0,$$

und gleichzeitig ist

$$y_\mu + \frac{1}{\alpha_u} z_u = 0,$$

so daß wir wirklich den mit dem Büschelcomplex vereinigten Complex erhalten.

Die Flächen

$$\sum \xi_\mu^2 = 0, \quad \sum \alpha_\mu \xi_\mu^2 = 0$$

sind aber keine anderen als die Flächen

$$\sum x_\mu^2 = 0, \quad \sum \frac{1}{\alpha_\mu} x_\mu^2 = 0,$$

nur sind sie im ersten Falle in Ebenencoordinaten, im zweiten in Punktcoordinaten dargestellt. Wir können sonach mit Hülfe derselben beiden Flächen, jenachdem wir sie als Flächen zweiter Classe oder zweiter Ordnung auffassen, sowohl den Ebenenbüschelcomplex als auch den damit vereinigten Punktreihencomplex erzeugen. Das gemeinsame Poltetraeder zweier solcher Flächen ist das Haupttetraeder der beiden zugehörigen Complexe.

II.

An die Betrachtung der linearen Systeme projektiver Ebenenbüschel oder Punktreihen schließt sich naturgemäß die Behandlung quadratischer Systeme. Aber die Natur der Mannigfaltigkeit, mit der wir es hier zu thun haben, bringt es mit sich, daß wir als Systeme zweiten Grades nicht diejenigen zu bezeichnen haben, welche durch eine allgemeine quadratische Gleichung in den acht Größen u_μ, v_μ, oder y_μ, z_μ, dargestellt werden, sondern diejenigen, welche einer bilinearen Gleichung für die beiden Gruppen von je vier Größen entsprechen, in die jene acht Größen zerfallen, und zwar sei diese Gleichung als symmetrisch, d. h. der Coefficient von $u_\mu v_\nu$, oder $y_\mu z_\nu$, gleich dem von $u_\nu v_\mu$, oder $y_\nu z_\mu$, vorausgesetzt.

Betrachten wir ein solches System projektiver Ebenenbüschel und nehmen wir als seine Gleichung an:

$$\sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} u_\mu v_\nu = 0,$$

so zeigt sich sofort, daß sich diese Gleichung durch eine bloße Coordinatenänderung auf die einfachere Form bringen läßt:

$$\sum_\mu \varepsilon_\mu u'_\mu v'_u = 0.$$

Aus dieser vereinfachten Form so gut wie aus der allgemeinen ergiebt sich zunächst die geometrische Definition dieser Büschelmannigfaltigkeit.

Gehen wir nämlich von der Fläche zweiter Classe

$$\sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0$$

oder

$$\sum_{\mu} \varepsilon_\mu u'_\mu = 0$$

aus, so zeigt sich, daß wir unser Büschelsystem erhalten, wenn wir in einem beliebigen Ebenenbüschel irgend ein Paar conjugirter Ebenen bez. der Fläche zweiter Classe annehmen und nun alle die dazu projektiven Ebenenbüschel aufsuchen, in denen diesem Paar jugirter Ebenen wieder conconjugirte Ebenen bez. der quadratischen Fläche entsprechen. Unser Büschelsystem ist demnach durch die Forderung definirt, daß sich in jedem dazu gehörigen Ebenenbüschel ein Paar conjugirter Ebenen bez. der Fläche zweiter Classe findet, dem in allen anderen Büscheln des Systems ein ebensolches Paar entspricht.

Die singulären Ebenenbüschel des Systems werden durch die Tangentialebenen der quadratischen Fläche dargestellt.

Jede Gerade ist Axe von doppelt unendlich vielen projektiven Ebenenbüscheln, die zum System gehören. In der projektiven Beziehung je zweier dieser Ebenenbüschel bestehen die sich selbst entsprechenden Ebenen entweder aus den beiden durch die gemeinsame Axe gehenden Tangentialebenen der quadratischen Fläche oder aus zwei conjugirten Ebenen bez. dieser Fläche, oder die Beziehung ist involutorisch und hat dann zwei beliebige Ebenen zu Doppelelementen. Im ersten Falle entsprechen allen Paaren conjugirter Ebenen im einen Büschel wieder Paare conjugirter Ebenen im anderen Büschel. Im zweiten und dritten Falle ist die Beziehung vollständig festgelegt, wenn man das den Tangentialebenen der Fläche im einen Büschel im anderen Büschel entsprechende Paar angiebt, und zwar darf, soll man ein reelles Paar — im zweiten Falle sich selbst, im dritten sich gegenseitig entsprechender — conjugirter Ebenen bekommen, das den Tangentialebenen entsprechende Paar von denselben nicht getrennt sein.

Durch die sechsfach unendlich vielen Collineationen, die die Fläche zweiter Classe in sich überführen, und nur durch diese, geht auch das dazu gehörige quadratische System von Ebenenbüscheln in sich über. Aber durch diese Collineationen gehen nicht alle Büschel des Systems aus einem von ihnen hervor, sondern wenn ein Ebenenbüschel aus einem anderen durch eine von diesen Collineationen hervorgeht, so entspricht jedem Paar con-

jugirter Ebenen in dem einen wieder ein Paar conjugirter Ebenen in dem anderen. Durch die vierfach unendlich vielen geschaart involutorischen unter diesen Collineationen, deren Iuvolutionsaxen aus je einem Paar reziproker Polaren bez. der quadratischen Fläche bestehen, gehen aber aus einem Büschel ein System von Ebenenbüscheln hervor, zu deren Axen jede Gerade des Raumes gehört.

Insbesondere kann man nach den linearen Systemen projektiver Ebenenbüschel fragen, die dem quadratischen Systeme angehören. Setzen wir die Gleichung dieses Systems der Einfachheit halber in der Form voraus

$$\text{(a)} \qquad u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 - u_4 v_4 = 0,$$

so ergiebt sich sofort, daß zu dem quadratischen Systeme die sechsfach unendlich vielen linearen Systeme dritter Stufe gehören, die durch Gleichungen von folgender Form darstellbar sind:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} u_1 = \phantom{-g_{12} v_1 +{}} g_{12} v_2 + g_{13} v_3 + g_{14} v_4, \\ u_2 = -g_{12} v_1 \phantom{+ g_{12} v_2} + g_{23} v_3 + g_{24} v_4, \\ u_3 = g_{13} v_1 + g_{23} v_2 \phantom{+ g_{23} v_3} - g_{34} v_4, \\ u_4 = g_{14} v_1 + g_{24} v_2 + g_{34} v_3 \qquad . \end{cases}$$

Legt man durch einen solchen Büschelcomplex, der zu dem quadratischen Büschelsysteme gehört, ein lineares Büschelsystem vierter Stufe, so muß dieses mit der quadratischen Mannigfaltigkeit noch einen Büschelcomplex gemein haben, und die beiden Büschelcomplexe haben ein Büschelnetz gemein. Da es nur dreifach unendlich viele lineare Systeme vierter Stufe giebt, die durch einen bestimmten Büschelcomplex gehen, so giebt es auch nur dreifach unendlich viele Büschelcomplexe der quadratisehen Mannigfaltigkeit, die mit einem bestimmten Büschelcomplex derselben ein Büschelnetz gemein haben, und diese Büschelnetze sind alle nur in je zwei Büschelcomplexen des quadratischen Systems enthalten. Zwei Büschelnetze, welche in einem Büschelcomplex liegen, haben aber eine Büschelschaar gemein, und durch diese Büschelschaar gehen unendlich viele Büschelnetze des Complexes. Durch jedes dieser Netze können wir einen vollständig bestimmten zweiten Complex des quadratischen Systems legen. Durch die Büschelschaar gehen also einfach unendlich viele Complexe der quadratischen Mannigfaltigkeit. Dieselben gehören alle einem linearen Systeme fünfter Stufe an, das sonach durch die Büschelschaar vollkommen bestimmt ist.

So zeigt sich, daß die quadratische Mannigfaltigkeit 6fach unendlich viele Büschelcomplexe, 9fach unendlich viele Büschelnetze, 9fach unendlich viele Büschelschaaren und, um diese Reihe zu schließen, 6fach unendlich viele einzelne Büschel enthält.

Setzt man aus den Gleichungen (b) die Werte für u_μ in

$$\sum y_\mu u_\mu + \sum z_\mu v_\mu = 0$$

ein und dann die einzelnen Cofficienten der v_μ gleich Null, so ergeben sich die Gleichungen der Punktreihencomplexe, die mit den zum quadratischen System gehörenden Ebenenbüschelcomplexen vereingt liegen:

$$(\mathrm{b}')\qquad \left\{\begin{array}{llll} z_1 & -g_{12}y_2+g_{13}y_3+g_{14}y_4 & = 0, \\ z_2+g_{12}y_1 & +g_{23}y_3+g_{24}y_4 & = 0, \\ z_3+g_{13}y_1+g_{23}y_2 & +g_{34}y_4 & = 0, \\ z_4+g_{14}y_1+g_{24}y_2-g_{34}y_3 & & = 0. \end{array}\right.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen mit y_1, y_2, $-y_3$, $-y_4$ und addirt, so ergiebt sich

$$(\mathrm{a}')\qquad y_1z_1+y_2z_2-y_3z_3-y_4z_4 = 0.$$

Die singulären Ebenenbüschel der Büschelcomplexe findet man, indem man

$$u_\mu = \lambda v_\mu$$

setzt, woraus sich, wie es ja sein muß, ergiebt, daß die Ebenen, in die sie zusammenfallen, der Gleichung genügen

$$(\mathrm{c})\qquad u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2 = 0,$$

während λ mit den Größen $g_{\mu\nu}$, die die einzelnen Complexe bestimmen, durch die Gleichung verknüpft ist:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -g_{12} & -\lambda & g_{23} & g_{24} \\ g_{13} & g_{23} & -\lambda & -g_{34} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

die wir schreiben wollen:

$$(\lambda)\qquad \lambda^4-F\lambda^2+G = 0.$$

Die singulären Punktreihen der mit den Büschelcomplexen des quadratischen Systems vereinigt liegenden Punktreihencomplexe ergeben sich, indem man

$$y_\mu + \frac{1}{\lambda} z_\mu = 0$$

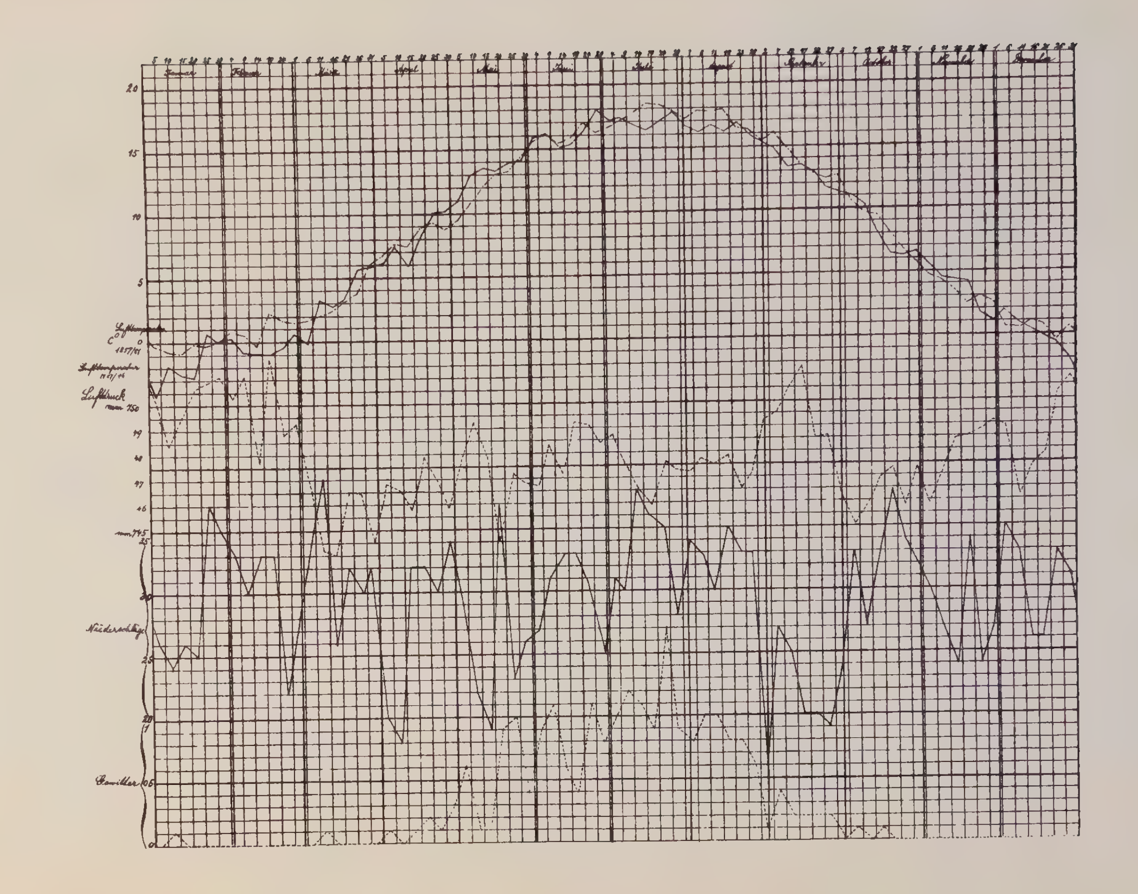
setzt. λ hat dann derselben Gleichung (λ) zu genügen, während die Coordinaten der Punkte, in die die singulären Punktreihen zusammenfallen, die Gleichung befriedigen:

(c') $$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber nur die Fläche (c) in Punktcoordinaten dar. So ergiebt sich:

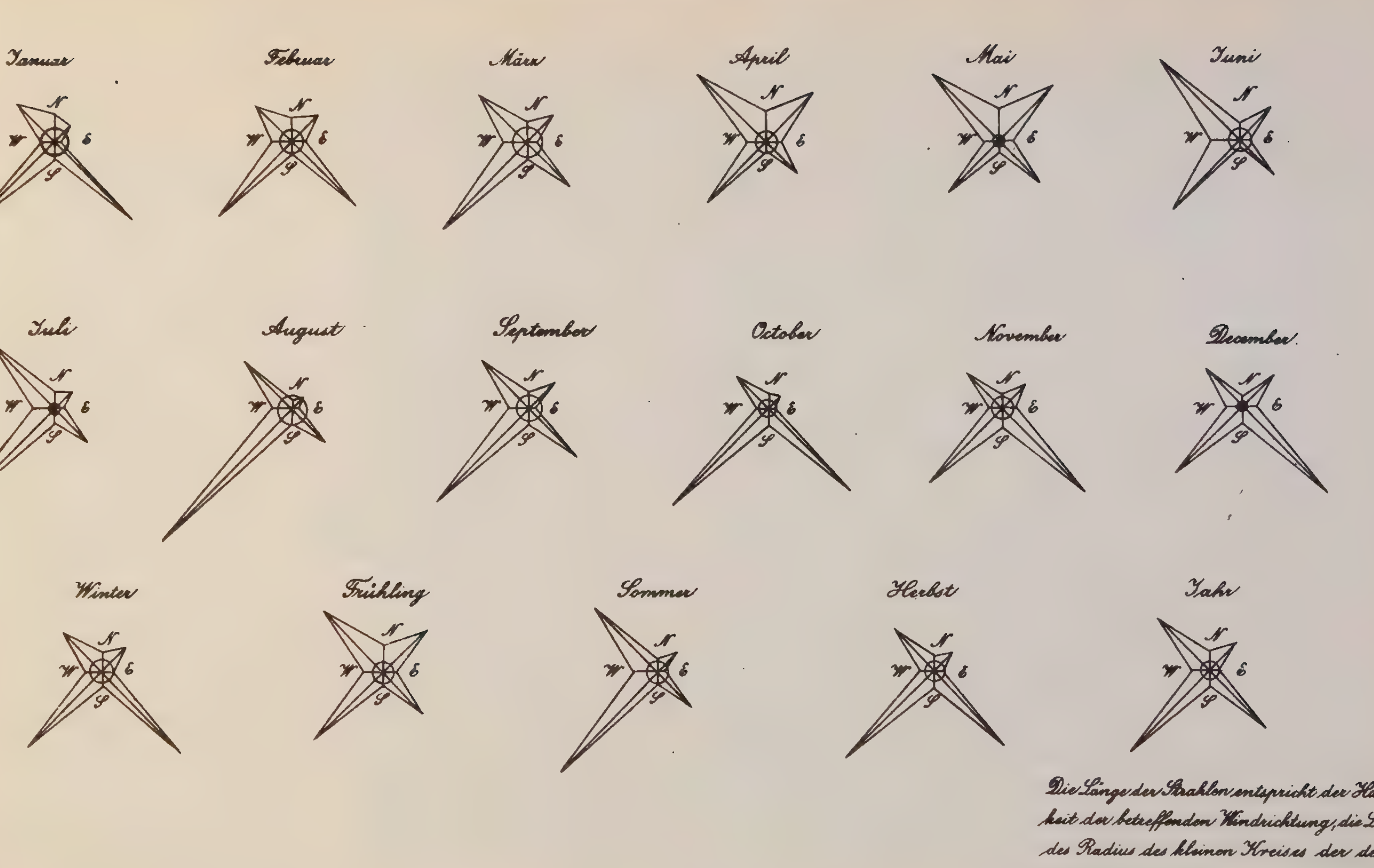
Mit dem quadratischen Systeme projektiver Ebenenbüschel ist ein ebensolches System projektiver Punktreihen vereinigt, welches die Eigenschaft hat, daß sich in jeder dazu gehörigen Punktreihe ein Paar conjugirter Punkte bez. einer bestimmten quadratischen Fläche findet, dem in jeder anderen Punktreihe des Systems wieder ein conjugirtes Punktepaar bez. derselben Fläche entspricht. Diese Fläche wird von den singulären Punktreihen des Systems erfüllt und ist dieselbe, bez. deren die ausgezeichneten Ebenenpaare in den Büscheln des Büschelsystems conjugirt sind und die von den singulären Büscheln desselben umhüllt wird. Die Büschelcomplexe, die dem Büschelsysteme, und die Punktreihencomplexe, die dem Punktreihensysteme angehören, treten derart zu Paaren zusammen, daß die Complexe eines Paares vereinigt liegen. Von ihren Haupttetraedern liegen allemal zwei Paar Gegenkanten auf der quadratischen Ordnungsfläche, und die Complexe sind insofern spezialisirt, als ihre Parameter, die der Gleichung (λ) genügen, paarweise einander entgegengesetzt gleich sind.

Straßburg, den 11. Juni 1898.

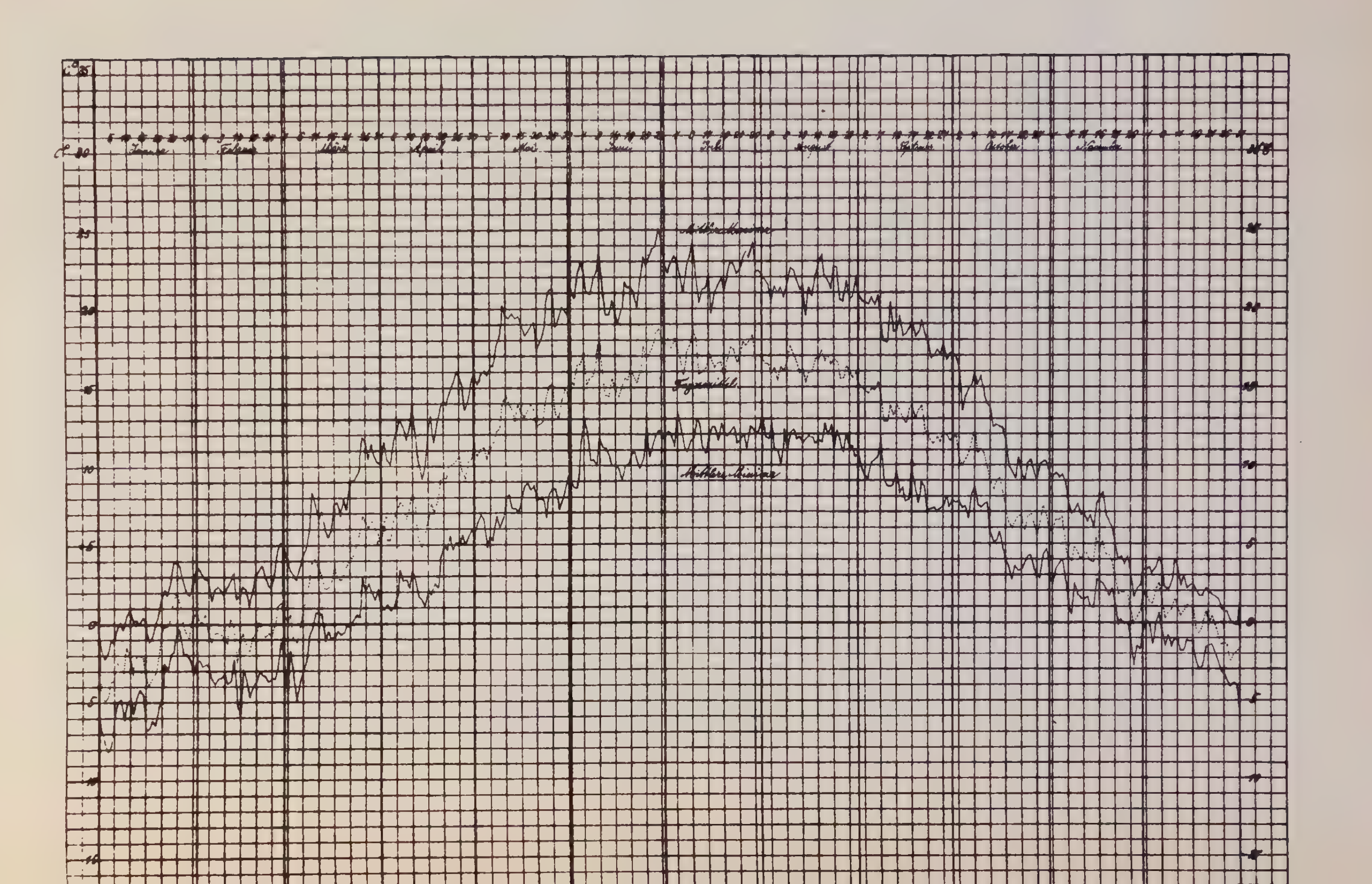


Windrosen

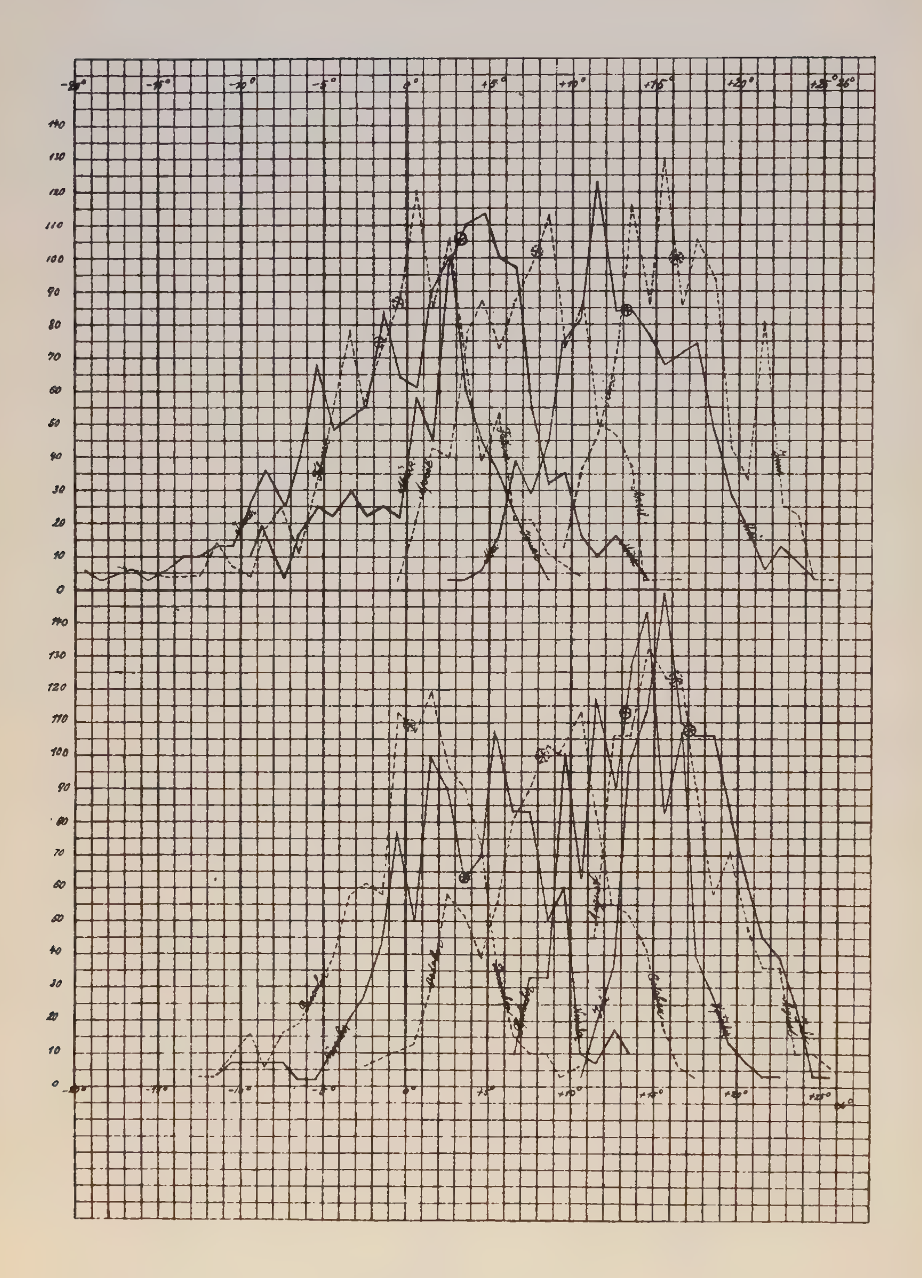
Häufigkeit der Winde und Windstillen.



Die Länge der Strahlen entspricht der Häufigkeit der betreffenden Windrichtung; die Länge des Radius des kleinen Kreises der der Windstille, beides in Procenten ausgedrückt.



Tafel 4.



-20° -15° -10° -5° 0° +5° +10° +15° +20° +25° 26°
140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

Ueber den Zusammenhang zwischen dem Zeeman'schen und dem Faraday'schen Phänomen[1]).

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. October 1898.

Die von Herrn Zeeman entdeckten Veränderungen des Schwingungszustandes einer Lichtquelle bei Einwirkung eines Magnetfeldes scheint mit der von Faraday gefundenen Drehung der Polarisationsebene einer lineär polarisirten Welle beim axialen Durchgang durch einen im Magnetfelde befindlichen Körper auf den ersten Blick wenig gemein zu haben. Der Zusammenhang tritt aber sogleich hervor, wenn man, statt des directen, das ihm nach dem Kirchoff'schen Gesetz entsprechende inverse Zeeman-Phänomen, nämlich die Veränderung der selectiven Absorption eines in einem Magnetfelde befindlichen Körpers in Betracht zieht.

Beschränkt man sich zunächst auf den ersten Hauptfall dieses Vorganges, nämlich den axialer, d. h. den Kraftlinien paralleler Fortpflanzung, und zieht man die Beobachtungen über die Polarisationsverhältnisse heran, so erhält man folgende Gegenüberstellung.

Bei dem Faraday-, wie bei dem betrachteten speciellen Zeeman-Phänomen wird eine einfallende Welle beliebigen, z. B. natürlichen Lichtes in zwei entgegengesetzt rotirende circularpolarisirte zerlegt.

Bei der ersteren Erscheinung kommt allein die verschiedene

1) Eine Uebersicht der im Folgenden entwickelten Resultate ist am 20. Sept. auf der Naturforscher-Versammlung in Düsseldorf vorgetragen worden und erscheint in deren Berichten.

Geschwindigkeit, bei der letzteren allein die verschiedene Absorption dieser beiden Wellen zur Geltung. Da aber eine wirkliche und nicht blos gedachte Zerlegung einer Welle in Componenten immer eine Geschwindigkeitsdifferenz zwischen ihnen fordert, und da Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Polarisationszuständen in andern Fällen absorbirender Körper der Regel nach bei gleicher Fortpflanzungsrichtung verschiedene Absorptionen erleiden, so erscheint es überaus plausibel, daß bei beiden Effecten verschiedene Geschwindigkeit und verschiedene Absorption nebeneinander bestehen. Man darf demgemäß — zunächst freilich nur in dem betrachteten ersten Hauptfall — vermuthen, daß das inverse Zeeman-Phänomen nichts anderes ist, als der Faraday-Effect in Körpern mit selectiver Absorption.

In dem zweiten Hauptfall, transversaler, d. h. normal zu den Kraftlinien liegender Fortpflanzungsrichtung scheint allerdings dieser Zusammenhang zu verschwinden. Einen specifischen auf die Geschwindigkeitsdifferenz zweier ebener Wellen zurückzuführenden Effect hat weder Faraday, noch sonst ein Forscher in dieser Richtung wahrgenommen, und die gewöhnlichen Erklärungssysteme des Faraday-Effectes ergeben überhaupt keine Wirkung eines Magnetfeldes auf transversal fortschreitende Lichtwellen; dagegen hat aber Zeeman die Zerlegung solcher Wellen in zwei geradlinig und normal zu einander polarisirte von verschiedener Absorption nachgewiesen.

Indessen kann dieser Widerspruch sehr wohl an jenen Erklärungssystemen liegen, die natürlich nur zur Darstellung der ehedem bekannten Faraday-Effecte erfunden sind.

In der That werde ich zeigen, daß von einem der bekannten Erklärungssysteme für die selective Absorption ausgehend man durch eine sehr plausible Erweiterung zu Formeln gelangen kann, die sowohl das Faraday-Phänomen, als auch den inversen Zeeman-Effect abzuleiten gestatten, und die somit der oben ausgesprochenen Vermuthung über den Zusammenhang beider eine außerordentliche Wahrscheinlichkeit geben. Bei ihrer Ableitung werde ich mich jener „neutralen“ Darstellungsweise bedienen, die, ohne sich an bestimmte Hypothesen über den Mechanismus des Vorganges zu binden, sich damit begnügt, zwischen einer Anzahl von Vectorgrößen solche Beziehungen aufzusuchen, daß durch sie die beobachteten Erscheinungen dargestellt werden. —

1) Im leeren Raum bestimme sich der Schwingungsvorgang allein durch den — etwa den Zustand des Aethers characterisi-

renden — Neumann'schen Polarisationsvector p mit den Componenten u, v, w. Die Formeln gewinnen an Einfachheit, wenn man neben ihm noch den Fresnel'schen Hülfsvector d = Quirl p einführt, dessen Componenten ξ, η, ζ gegeben sind durch

$$1)\qquad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

In ponderabeln Körpern treten hinzu die weiteren — etwa den Zustand der ponderabeln Theile characterisirenden — Vectoren P_h mit den Componenten U_h, V_h, W_h.

Die Aufstellung der Gleichungen für diese Vectoren geschieht am einfachsten mit Hülfe des Hamilton'schen Integrales, indem man für die in diesem auftretenden kinetischen und potentiellen Energien ψ_h und φ_h, resp. die Arbeiten $\delta'\alpha_k$ der nicht conservativen Kräfte geeignete Ansätze macht[1]). Es ist bekannt, daß gewisse fundamentale Erscheinungen für die ψ_h und φ_h Functionen zweiten Grades in den Vectorcomponenten verlangen, und daß aus den gleichen Gründen die $\delta'\alpha_k$ bilinear in den Vectorcomponenten und ihren Variationen sein müssen.

Zu einer speciellen Theorie der auswählenden Absorption in isotropen Körpern, welche den Einfluß der ponderabeln Theile auf die Lichtschwingungen ausschließlich durch die Vectoren P_h ausdrückt, gelangt man durch folgende Ansätze[2]):

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\psi_0 &= u'^2+v'^2+w'^2, \quad 2\psi_h = U_h'^2+V_h'^2+W_h'^2,\\ 2\varphi_0 &= v^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2), \quad 2\varphi_h = d_h(U_h^2+V_h^2+W_h^2),\\ \varphi_h' &= e_h(U_h\xi+V_h\eta+W_h\zeta),\\ -\delta'\alpha_h &= f_h(U_h'\delta U_h+V_h'\delta V_h+W_h'\delta W_h). \end{aligned}\right.$$

Hierin bezeichnen d_h, e_h, f_h Constanten, v ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, die obern Indices $'$ bezeichnen die Differentialquotienten nach der Zeit.

Eine Erweiterung dieses Ansatzes, die das im Eingang Geforderte leistet, wird durch Hinzufügung einer potentiellen Energie von der Form

$$3)\quad 2\varphi_h'' = g_h^{(1)}(V_h'W_h-W_h'V_h)+g_h^{(2)}(W_h'U_h-U_h'W_h)+g_h^{(3)}(U_h'V_h-V_h'U_h)$$

erhalten, worin die $g_h^{(i)}$ Constanten bedeuten.

Bildet man mit diesen Ausdrücken in bekannter Weise das Hamilton'sche Integral

1) s. W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, Bd. II, p. 563 u. f., Leipzig 1896.

2) W. Voigt l. c. p. 749.

$$4)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \int (\delta(\varphi-\psi)-\delta'\alpha)\, dk = 0,$$

wobei φ, ψ und $\delta'\alpha$ die resp. Summen der oben eingeführten, nur durch Indices unterschiedenen Glieder darstellen, und dk das Raumelement bezeichnet, so liefert dasselbe leicht die folgenden Hauptgleichungen:

$$5)\qquad u'' = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad v'' = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial \Xi}{\partial z}, \quad w'' = \frac{\partial \Xi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

wobei

$$6)\quad \Xi = v^2\xi + \sum e_h U_h, \quad H = v^2\eta + \sum e_h V_h, \quad Z = v^2\zeta + \sum e_h W_h$$

ist, und

$$7)\quad \begin{cases} U''_h + d_h U_h + f_h U'_h + g_h^{(2)} W'_h - g_h^{(3)} V'_h + e_h \xi = 0, \\ V''_h + d_h V_h + f_h V'_h + g_h^{(3)} U'_h - g_h^{(1)} W'_h + e_h \eta = 0, \\ W''_h + d_h W_h + f_h W'_h + g_h^{(1)} V'_h - g_h^{(2)} U'_h + e_h \zeta = 0. \end{cases}$$

Damit die Funktion φ'' sich, wie ersichtlich erforderlich ist, bei Coordinatentransformationen scalar verhalte, müssen $g_h^{(1)}$, $g_h^{(2)}$, $g_h^{(3)}$ mit den Componenten eines Vectors R_h proportional sein; handelt es sich um einen isotropen Körper in einem magnetischen Felde, so werden wir alle diese R_h mit der Stärke R des magnetischen Feldes identificiren, also bei Einführung der Feldcomponenten A, B, C und der neuen Constanten g_h setzen dürfen

$$8)\qquad g_h^{(1)} = g_h A, \qquad g_h^{(2)} = g_h B, \qquad g_h^{(3)} = g_h C\,[1].$$

Da der Körper isotrop ist, so können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Richtung von R der Z-Axe parallel legen, also setzen

$$9)\quad \begin{cases} U''_h + d_h U_h + f_h U'_h - g_h R V'_h + e_h \xi = 0, \\ V''_h + d_h V_h + f_h V'_h + g_h R U'_h + e_h \eta = 0, \\ W''_h + d_h W_h + f_h W'_h \qquad\qquad + e_h \zeta = 0. \end{cases}$$

Zugleich folgern wir aus den Gleichungen (5) und (6) als für die Anwendung bequemer

1) Es möge bemerkt werden, daß, wenn man die Annahme eines mit R proportionalen Antheiles von φ an die Spitze stellt, die Forderung eines Ausdrucks zweiten Grades in den Vectorcomponenten U, V, W zusammen mit der scalaren Natur von φ mit einer gewissen Nothwendigkeit zu dem Ansatz 8) mit den Werthen 8) führt.

$$10)\quad \xi'' = \Delta(v^2\xi + \sum e_h U_h) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum e_h U_h + \frac{\partial}{\partial y}\sum e_h V_h + \frac{\partial}{\partial z}\sum e_h W_h\right),$$

. . . .

wobei bereits berücksichtigt ist, daß gilt:

$$11)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \text{ —}$$

Wir beschränken uns weiterhin auf die speciellen Fälle ebener homogener Wellen, die sich parallel oder normal zu den Kraftlinien, d. h. zur Z-Axe fortpflanzen, und operiren dabei mit den complexen Lösungen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{U}_h$, $\mathfrak{V}_h$, $\mathfrak{W}_h$, von denen der reelle oder der imaginäre Theil an Stelle von u, v, w, ξ, η, ζ, U_h, V_h, W_h gesetzt werden darf.

2) Für den Fall einer parallel zur Z-Axe fortschreitenden ebenen homogenen Welle sind diese complexen Lösungen proportional mit

$$e^{i(t-z/\mathfrak{o})/\vartheta},$$

wobei $\vartheta = \tau/2\pi$ und $\mathfrak{o} = \omega/(1-i\varkappa)$ ist, unter τ die Periode, unter ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, unter $\varkappa$ den Absorptionsindex der Schwingung verstanden; $\mathfrak{o}$ kann dabei als die complexe Geschwindigkeit der Welle bezeichnet werden.

Hierdurch wird aus (9)

$$12)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_h(d_h\vartheta^2 + if_h\vartheta - 1) - ig_h\vartheta R\mathfrak{V}_h + e_h\mathfrak{x}\vartheta^2 = 0, \\ \mathfrak{V}_h(d_h\vartheta^2 + if_h\vartheta - 1) + ig_h\vartheta R\mathfrak{U}_h + e_h\mathfrak{y}\vartheta^2 = 0, \\ \mathfrak{W}_h(d_h\vartheta^2 + if_h\vartheta - 1) \qquad\qquad + e_h\mathfrak{z}\vartheta^2 = 0; \end{cases}$$

dagegen aus (10)

$$13)\quad \mathfrak{x}(\mathfrak{o}^2 - v^2) = \sum e_h\mathfrak{U}_h, \qquad \mathfrak{y}(\mathfrak{o}^2 - v^2) = \sum e_h\mathfrak{V}_h, \qquad \mathfrak{z} = 0.$$

Die letzte Formel führt mit der letzten Gleichung in (12) combinirt zu $\mathfrak{W}_h = 0$, woraus sich ergiebt, daß alle Vectoren p und P_h in dem vorliegenden Falle transversal schwingen.

Setzen wir abgekürzt

$$14)\quad d_h\vartheta^2 + if_h\vartheta - 1 = \Theta,$$

so lauten die beiden ersten Gleichungen (12)

$$15)\quad \begin{aligned} \Theta_h\mathfrak{U}_h - ig_h\vartheta R\mathfrak{V}_h + e_h\mathfrak{x}\vartheta^2 &= 0, \\ \Theta_h\mathfrak{V}_h + ig_h\vartheta R\mathfrak{U}_h + e_h\mathfrak{y}\vartheta^2 &= 0 \end{aligned}$$

und ergeben:

$$16)\quad \begin{aligned}(\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2)\mathfrak{U}_h + e_h \vartheta^2 (\mathfrak{x}\Theta_h + i\mathfrak{y} g_h \vartheta R) &= 0,\\ (\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2)\mathfrak{V}_h + e_h \vartheta^2 (\mathfrak{y}\Theta_h - i\mathfrak{x} g_h \vartheta R) &= 0.\end{aligned}$$

Entnimmt man diesen Formeln die Werthe von $\mathfrak{U}_h$, $\mathfrak{V}_h$ und setzt sie in (13) ein, so erhält man

$$17)\quad \begin{aligned}\mathfrak{x}\left(\mathfrak{v}^2 - v^2 + \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 \Theta_h}{\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2}\right) + i\mathfrak{y} \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 g_h R}{\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2} &= 0,\\ \mathfrak{y}\left(\mathfrak{v}^2 - v^2 + \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 \Theta_h}{\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2}\right) - i\mathfrak{x} \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 g_h R}{\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2} &= 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sprechen aus, daß sich parallel den Kraftlinien zwei entgegengesetzt rotirende circular polarisirte Wellen fortpflanzen; deren Geschwindigkeiten und Absorptionen bestimmt die aus 17) durch Elimination von $\mathfrak{x}/\mathfrak{y}$ folgende Formel

$$18)\quad \mathfrak{v}^2 = v^2 - \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2}{\Theta_h \pm g_h \vartheta R},$$

in der das obere Zeichen der e i n e n, das untere der a n d e r e n Welle zugehört. Für R gleich Null resultirt die bekannte Formel für die auswählende Absorption, resp. die anomale Dispersion.

Um den Ausdruck (18) in den reellen und den imaginären Theil zu zerlegen, führen wir noch die Abkürzung

$$19)\quad d_h \vartheta^2 \pm g_h \vartheta R - 1 = T_{\pm h}$$

ein und erhalten dann

$$20)\quad \frac{\omega^2(1-\varkappa^2)}{(1+\varkappa^2)^2} = v^2 - \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 T_{\pm h}}{T_{\pm h}^2 + f_h^2 \vartheta^2},$$

$$21)\quad \frac{2\omega^2 \varkappa}{(1+\varkappa^2)^2} = \sum \frac{e_h^2 f_h \vartheta^3}{T_{\pm h}^2 + f_h^2 \vartheta^2}. —$$

3) Die Verhältnisse sind am einfachsten, wenn nur e i n Hülfsparameter P in Betracht kommt, wo dann außerhalb des Magnetfeldes das Spectrum von durch den behandelten Körper geschicktem weißen Licht nur e i n e n Absorptionsstreifen zeigt.

Setzt man hier für die auf P bezüglichen Constanten

$$22)\quad e^2/d = q^2 v^2, \qquad 1/d = \vartheta^{\circ 2}, \qquad f/d = \vartheta', \qquad g/d = k,$$

so wird aus (18):

$$23)\quad \mathfrak{v}^2 = v^2\left(1 - \frac{q^2 \vartheta^2}{\vartheta^2 + i\vartheta\vartheta' - \vartheta^{\circ 2} \pm kR\vartheta}\right),$$

dagegen aus (20) und (21):

$$24)\qquad \frac{\omega^2(1-\varkappa^2)}{(1+\varkappa^2)^2} = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2 \pm kR\vartheta - \vartheta^{\circ 2})}{(\vartheta^2 \pm kR\vartheta - \vartheta^{\circ 2})^2 + \vartheta'^2\vartheta^2}\right),$$

$$25)\qquad \frac{2\omega^2\varkappa}{(1+\varkappa^2)^2} = \frac{v^2 q^2 \vartheta' \vartheta^3}{(\vartheta^2 \pm kR\vartheta - \vartheta^{\circ 2})^2 + \vartheta'^2\vartheta^2}.$$

Bei gegen ϑ° kleinem ϑ' liegt außerhalb des Magnetfeldes der Absorptionsstreifen des Körpers nahe bei $\vartheta = \vartheta^\circ$, d. h. bei $\tau = \tau^\circ$ die letzte Formel zeigt, daß derselbe sich durch die Wirkung eines Magnetfeldes in gewissem Sinne in zwei je einer der beiden circularpolarisirten Welle zugehörige Streifen zerlegt, die bei kleinem kR sehr nahe bei $\vartheta = \vartheta^\circ \mp kR/2$, d. h. bei $\tau = \tau^\circ \mp \pi k R$ liegen. Dies findet nun in der That bei dem inversen Zeeman'schen Phänomen statt und ist auf andere Weise auch durch eine schöne, neuerdings von Herrn Righi[1]) angegebene Methode bewiesen. —

Für Werthe von ϑ, die erheblich von ϑ° abweichen, ist bei kleinem ϑ' die Absorption unmerklich, gilt also

$$26)\qquad \omega^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2}{\vartheta^2 - \vartheta^{\circ 2} \pm kR\vartheta}\right).$$

Hier stellt sich das Faraday'sche Phänomen in ganzer Einfachheit ein; die Drehung χ der Polarisationsebene einer lineärpolarisirten Welle, die allgemein durch die Formel

$$27)\qquad \chi = \frac{\pi l}{\tau}\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)$$

dargestellt wird, (unter ω_1 und ω_2 die Geschwindigkeiten der beiden circularen Wellen und unter l den von ihnen zurückgelegten Weg verstanden) nimmt hier bei kleinem kR den Werth an

$$28)\qquad \chi = \frac{l v^2}{2\omega^3}\cdot\frac{q^2\vartheta^3 kR}{(\vartheta^2-\vartheta^{\circ 2})^2},$$

wobei ω eine mittlere Geschwindigkeit bezeichnet, z. B. die außerhalb des Magnetfeldes stattfindende, die gegeben ist durch

$$29)\qquad \omega^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2}{(\vartheta^2-\vartheta^{\circ 2})}\right).$$

Verbindet man diese beiden Formeln mit derjenigen

$$30)\qquad \bar{\vartheta}^\circ = \vartheta^\circ \mp kR/2,$$

1) A. Righi, Berl. Ber. LXXIX, p. 600, 1898.

welche die Lage der Absorptionsstreifen im Magnetfelde bestimmt, so ergiebt sich, daß in dem vorausgesetzten einfachsten Falle nur eines Absorptionsstreifens der Zeeman-Effect aus dem Gesetz der Dispersion und dem Faraday-Effect quantitativ ableitbar ist. —

Außer den Farben, die weit von der (außerhalb des Feldes) maximal absorbirten abliegen, führt noch die maximal absorbirte selbst zu einfachen Beziehungen. Setzt man nämlich in die Formeln (24) und (25) $\vartheta = \vartheta^o$ ein und versieht demgemäß die mit ϑ veränderlichen Größen ω und $\varkappa$ mit dem Index ^{o}, so erhält man

31) $$\frac{\omega^{o2}(1-\varkappa^{o2})}{(1+\varkappa^{o2})^2} = v^2\left(1 \mp \frac{q^2 \vartheta^o kR}{k^2 R^2 + \vartheta'^2}\right),$$

32) $$\frac{2\omega^{o2}\varkappa^o}{(1+\varkappa^{o2})^2} = \frac{v^2 q^2 \vartheta' \vartheta^o}{k^2 R^2 + \vartheta'^2}.$$

Bei den Körpern, welche für den Zeeman-Effect in Betracht kommen, ist die Absorption eine mäßige, $\varkappa^o$ für $R = 0$ also klein neben Eins. Um so mehr darf $\varkappa^{o2}$ bei nicht verschwindendem R neben Eins vernachlässigt werden. Wir erhalten somit

33) $$\omega^{o2} = v^2\left(1 \mp \frac{q^2 \vartheta^o kR}{k^2 R^2 + \vartheta'^2}\right), \qquad 2\omega^{o2}\varkappa^o = \frac{v^2 q^2 \vartheta' \vartheta^o}{k^2 R^2 + \vartheta'^2},$$

und in Rücksicht auf (27)

34) $$\chi = \frac{l}{2v} \cdot \frac{q^2 kR}{k^2 R^2 + \vartheta'^2}.$$

Hierbei ist bereits berücksichtigt, daß für $\vartheta = \vartheta^o$ der mittlere Werth der Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 mit v übereinstimmt.

Es ist bemerkenswerth, daß in dem betrachteten Falle der Drehungswinkel χ nicht, wie sonst, der Feldstärke R proportional wächst, sondern für $kR = \vartheta'$ ein Maximum

35) $$\bar{\chi} = \frac{lq^2}{4v\vartheta'}$$

erreicht und darauf wieder abnimmt. Der Werth $kR = \vartheta'$ liegt dabei keineswegs außerhalb des Erreichbaren; die zweite Formel (33) zeigt vielmehr, daß, sowie ein deutlicher Zeeman-Effect, d. h. eine deutliche Zerlegung des Absorptionsstreifens auftritt, kR neben ϑ' sehr merklich sein muß. Es ist daher wahrscheinlich, daß das aus den Formeln erschlossene singuläre Verhalten der maximal absorbirten Farbe bezüglich des Faraday-Phänomens

der Beobachtung zugänglich gemacht werden kann, um so mehr als der Werth von χ unter Umständen beträchtlich werden dürfte. Vorarbeiten für diese Untersuchung sind im Gange.

Der Ausdruck für χ nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn man den aus (33) folgenden Werth von $\varkappa^\circ$ heranzieht, in dem gleichfalls ω° mit v vertauscht werden darf; es ergiebt sich dann

36) $$\chi = \frac{2\pi l \varkappa^\circ}{\lambda^\circ} \cdot \frac{kR}{\vartheta'},$$

wobei λ° die der maximal absorbirten Periode im Luftraum zugehörige Wellenlänge bezeichnet. Die maximale Drehung $\bar{\chi}$ ist dann noch einfacher

37) $$\bar{\chi} = \frac{2\pi l \varkappa^\circ}{\lambda^\circ}.$$

Berücksichtigt man, daß auf dem Wege l die anfängliche Schwingungsamplitude a_0 auf $a_l = a_0 . e^{-2\pi l \varkappa/\tau\omega}$ herabgedrückt wird, und daß in unserm Falle $\varkappa$ mit $\varkappa^\circ$, $\tau\omega$ mit λ° identisch ist, so erkennt man, daß hier Absorption und Drehung in dem einfachen und merkwürdigen Zusammenhang $ln(a_0/a_l) = \bar{\chi}$ stehen.

4) Schreitet eine ebene homogene Welle parallel zur X-Axe fort, so sind die complexen Lösungen unserer Gleichungen proportional mit

$$e^{i(t - x/\mathfrak{o})/\vartheta}$$

zu setzen. Dabei behalten die Formeln (12) ihre Gestalt bei, statt (13) gilt aber nunmehr

38) $$\mathfrak{x} = 0, \qquad \mathfrak{y}(\mathfrak{o}^2 - v^2) = \sum e_h \mathfrak{V}_h, \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{o}^2 - v^2) = \sum e_h \mathfrak{W}_h.$$

Wegen des Verschwindens von $\mathfrak{x}$ ergeben die beiden ersten Gleichungen (12) jetzt gemäß der durch (14) eingeführten Abkürzung

39) $$\begin{aligned} (\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2)\mathfrak{U}_h + i e_h \vartheta^3 g_h R \mathfrak{y} &= 0, \\ (\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2)\mathfrak{V}_h + e_h \vartheta^2 \Theta_h \mathfrak{y} &= 0; \end{aligned}$$

die dritte wird zu

40) $$\Theta_h \mathfrak{W}_h + e_h \mathfrak{z} \vartheta^2 = 0.$$

Da $\mathfrak{U}_h$ von Null verschieden bleibt, so schwingen in diesem Falle die Vectoren P_h nicht transversal.

Die Combination der Formeln (38), (39) und (40) liefert nun für die Componente $\mathfrak{y}$

41) $$\mathfrak{o}_{\mathfrak{y}}^2 = v^2 - \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 \Theta_h}{\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2},$$

dagegen für die Componente $\mathfrak{z}$

$$42)\qquad \mathfrak{v}_\mathfrak{z}^2 = \mathfrak{v}^2 - \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2}{\Theta_h};$$

die beiden Componenten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ besitzen also sowohl verschiedene Geschwindigkeiten, als auch verschiedene Absorptionen.

Die letzte Gleichung ist vollkommen frei von R; die Vectorcomponente $\mathfrak{z}$ wird somit durch das magnetische Feld in keiner Hinsicht beeinflußt. Nicht so die vorletzte Formel; das Verhalten der Componente $\mathfrak{y}$ ist also von dem Feld abhängig.

Schreibt man die Gleichung 41) in der Form

$$43)\qquad \mathfrak{v}_\mathfrak{y}^2 = v^2 - \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 \vartheta^2}{\Theta_h - g_h \vartheta R} - \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 \vartheta^2}{\Theta_h + g_h \vartheta R},$$

so tritt sie ersichtlich in eine nahe Beziehung zu der Formel (18), die für den ersten Hauptfall galt.

Die Zerlegung in den reellen und den imaginären Theil liefert bei Benutzung der Abkürzung (19) aus (43)

$$44)\qquad \frac{\omega_y^2 (1 - \varkappa_y^2)}{(1 + \varkappa_y^2)^2} = v^2 - \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 T_{-h}}{T_{-h}^2 + f_h^2 \vartheta^2} - \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 T_{+h}}{T_{+h}^2 + f_h^2 \vartheta^2},$$

$$45)\qquad \frac{2\omega_y^2 \varkappa_y}{(1 + \varkappa_y^2)^2} = \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 f_h \vartheta^3}{T_{-h}^2 + f_h^2 \vartheta^2} + \tfrac{1}{2}\sum \frac{e_h^2 f_h \vartheta^3}{T_{+h}^2 + f_h^2 \vartheta^2};$$

analog folgt aus (42)

$$46)\qquad \frac{\omega_z^2 (1 - \varkappa_z^2)}{(1 + \varkappa_z^2)^2} = v_2 - \sum \frac{e_h^2 \vartheta^2 T_h}{T_h^2 + f_h^2 \vartheta^2},$$

$$47)\qquad \frac{2\omega_z^2 \varkappa_z}{(1 + \varkappa_z^2)^2} = \sum \frac{e_h^2 f_h \vartheta^3}{T_h^2 + f_h^2 \vartheta^2},$$

wobei T_h für $d_h \vartheta^2 - 1$ gesetzt ist. —

5) Beschränken wir uns nunmehr wieder auf Körper mit nur einem Hülfsvector P, also mit nur einem Absorptionsstreifen außerhalb des Magnetfeldes, so folgt aus (43) und (42) bei Benutzung der Abkürzungen aus (22)

$$48)\quad \mathfrak{v}_\mathfrak{y}^2 = v^2\left(1 - \frac{\tfrac{1}{2} q^2 \vartheta^2}{\vartheta^2 - i\vartheta\vartheta' - \vartheta''^2 - kR\vartheta} - \frac{\tfrac{1}{2} q^2 \vartheta^2}{\vartheta^2 - i\vartheta\vartheta' - \vartheta''^2 + kR\vartheta}\right),$$

$$49)\quad \mathfrak{v}_\mathfrak{z}^2 = v^2\left(1 - \frac{q^2 \vartheta^2}{\vartheta^2 - i\vartheta\vartheta' - \vartheta''^2}\right);$$

ebenso aus (44) bis (47)

50)
$$\frac{\omega_y^2(1-\varkappa_y^2)}{(1+\varkappa_y^2)^2} = v^2\left(1-\frac{\frac{1}{2}q^2\vartheta^2(\vartheta^2-kR\vartheta-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2-kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}-\frac{\frac{1}{2}q^2\vartheta^2(\vartheta^2+kR\vartheta-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2+kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right)$$

51)
$$\frac{2\omega_y^2\varkappa_y}{(1+\varkappa_y^2)^2} = \tfrac{1}{2}v^2q^2\vartheta'\vartheta^3\left(\frac{1}{(\vartheta^2-kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}+\frac{1}{(\vartheta^2+kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right)$$

52)
$$\frac{\omega_z^2(1-\varkappa_z^2)}{(1+\varkappa_z^2)^2} = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right),$$

53)
$$\frac{2\omega_z^2\varkappa_z}{(1+\varkappa_z^2)^2} = \frac{v^2q^2\vartheta'\vartheta^3}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}.$$

Nehmen wir ferner, wie früher, ϑ' klein neben ϑ^o an, so sagen diese Gleichungen aus, daß in dem Magnetfelde der Componente $\mathfrak{y}$ ein Absorptionsspectrum mit zwei (schwächeren) Absorptionsstreifen nahe bei $\vartheta = \vartheta^o \mp kR/2$ entsprechen, dagegen der Componente $\mathfrak{z}$ nur ein (stärkerer) Streifen bei $\vartheta = \vartheta^o$ zugehört. Auch dies ist in genauer Uebereinstimmung mit Herrn Zeeman's Beobachtungen, denn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ resp. ξ, η, ζ sind die Componenten des Fresnel'schen Vectors d, der normal auf dem Neumann'schen oder Polarisationsvector p steht, nach dessen Verhalten der Polarisationszustand des Lichtes beurtheilt wird. —

Für Werthe ϑ, die erheblich von ϑ^o abweichen, ist bei kleinem ϑ' die Absorption unmerklich, und wird demgemäß aus (50) und (52)

54)
$$\omega_y^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2})^2-k^2R^2\vartheta^2}\right),$$

55)
$$\omega_z^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2}{\vartheta^2-\vartheta^{o2}}\right).$$

Die Geschwindigkeiten ω_y und ω_z sind also zwar nicht gleich; sie unterscheiden sich aber nur um ein Glied, das in Bezug auf die magnetische Einwirkung vom zweiten Grade ist. Eine dem Faraday-Effect entsprechende und auf eine Geschwindigkeitsdifferenz zurückzuführende Wirkung von ebenen Wellen, die sich normal zu den magnetischen Kraftlinien fortpflanzen, fehlt zwar in dem vorausgesetzten Falle nicht ganz, wird aber äußerst

geringfügig sein. Dieselbe müßte übrigens nicht in einer Drehung, sondern in einer geringen Elliptisirung einfallenden lineär polarisirten Lichtes bestehen. —

Neben den Farben, die weit von der außerhalb des Magnetfeldes maximal absorbirten liegen, interessiren wiederum besonders diese selbst und die ihr unmittelbar benachbarten.

Setzt man zunächst $\vartheta = \vartheta^o$ (was dem Absorptionsstreifen der w-Componente entspricht), so wird aus (50) bis (53)

$$56)\qquad \frac{\omega_y^{o2}(1-\varkappa_y^{o2})}{(1+\varkappa_y^{o2})^2} = v^2, \quad \frac{2\omega_y^{o2}\varkappa_y^o}{(1+\varkappa_y^{o2})^2} = \frac{v^2 q^2 \vartheta' \vartheta^o}{k^2R^2+\vartheta'^2},$$

$$57)\qquad \frac{\omega_z^{o2}(1-\varkappa_z^{o2})}{(1+\varkappa_z^{o2})^2} = v^2, \quad \frac{2\omega_z^{o2}\varkappa_z^o}{(1+\varkappa_z^{o2})^2} = \frac{v^2 q^2 \vartheta^o}{\vartheta'}.$$

Bei mäßigen Absorptionen, die fast allein in Betracht kommen, giebt dies

$$58)\qquad \omega_y^o = v, \quad \varkappa_y^o = \frac{\frac{1}{2} q^2 \vartheta' \vartheta^o}{k^2R^2+\vartheta'^2},$$

$$59)\qquad \omega_z^o = v, \quad \varkappa_z^o = \frac{\frac{1}{2} q^2 \vartheta^o}{\vartheta'};$$

Hier sind somit die Geschwindigkeiten, mit denen sich die beiden Componenten v und w fortpflanzen, einander gleich.

Setzt man ferner $\vartheta^2 \pm kR\vartheta - \vartheta^{o2} = 0$, (was den beiden Absorptionsstreifen der v-Componente entspricht), so erhält man bei Beschränkung auf mäßige Absorptionen:

$$60)\qquad \begin{aligned} \omega_y^2 &= v^2\left(1 \pm \frac{q^2\vartheta kR}{4k^2R^2+\vartheta'^2}\right), \\ 2\omega_y^2\varkappa_y &= \tfrac{1}{2} v^2 q^2 \vartheta' \vartheta \left(\frac{1}{\vartheta'^2} + \frac{1}{4k^2R^2+\vartheta'^2}\right) \end{aligned}$$

$$61)\qquad \omega_z^2 = v^2\left(1 \pm \frac{q^2\vartheta kR}{k^2R^2+\vartheta'^2}\right), \quad 2\omega_z^2\varkappa_z = \frac{v^2q^2\vartheta'\vartheta}{k^2R^2+\vartheta'^2}.$$

Hier kann also bei neben ϑ' merklichem kR die Differenz zwischen den beiden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z recht beträchtlich sein, und ähnliche Beträge sind in der Nachbarschaft der betrachteten ϑ, z. B. also für die Farben zwischen den äußeren und dem inneren Absorptionsstreifen zu erwarten. Man erkennt, daß für den experimentellen Nachweis der durch die Theorie geforderten Geschwindigkeitsdifferenz Medien mit einem Absorptionsstreifen im

sichtbaren Spectrum vor solchen ohne dergleichen einen gewissen Vorzug haben.

6) Wir haben im Vorstehenden den allgemeinsten aus dem Ansatz (2) und (3) folgenden Formeln für die beiden Hauptfälle sogleich specielle Folgerungen für Körper zugeordnet, denen nur ein Hülfsvector P entspricht, und fügen nur nachträglich einige Bemerkungen über Körper mit mehreren Vectoren P_h zu. Diese Körper bieten nämlich nach mehrfacher Hinsicht Schwierigkeiten, die hier nicht mit Stillschweigen übergangen werden dürfen.

Geht man von dem obigen Ansatz (2) aus, der, wie schon früher bemerkt, nicht neu erfunden, sondern einfach von der gebräuchlichen Theorie der auswählenden Absorption übernommen ist, so erkennt man leicht, wie, so lange die verschiedenen Absorptionsstreifen sehr fein sind und so weit von einander liegen, daß die Entfernungen benachbarter als sehr groß neben ihren magnetischen Verschiebungen betrachtet werden dürfen, jeder Streifen sich im Magnetfelde ebenso verhält, als wenn er allein vorhanden wäre. Ein jeder verwandelt sich für parallel zu den Kraftlinien fortschreitende Wellen in ein „Doublet", für normal dazu fortgepflanzte in ein „Triplet", und da die Konstanten g_h für die verschiedenen Parameter P_h verschieden sein dürfen, so können diese Doublets und Triplets für verschiedene Linien desselben Spectrums in demselben Felde verschiedene Weiten haben.

Es scheint Körper zu geben, welche dies Verhalten in ganzer Einfachheit und Regelmäßigkeit zeigen, so insbesondere glühender Natriumdampf und vielleicht glühender Wasserstoff. Dagegen kommen aber auch Körper vor, die dies einfachste, normale Verhalten nicht besitzen, deren Spectra vielmehr nicht nur andere Streifentheilungen, sondern auch andere Polarisationsverhältnisse zeigen, als oben dargelegt sind. Es kann kein Zweifel sein, daß für solche, mit den obigen Formeln im Widerspruch stehende Körper, deren Verhalten anormal heißen möge, der zu Grunde gelegte Ansatz, insbesondere der Werth der Potentiale φ_h zu speciell ist. In der That ist es ja eine zwar in der Theorie der auswählenden Absorption zumeist gemachte, aber doch willkürliche Beschränkung, die einzelnen Vectoren P_h nur mit dem Hauptvector p, aber nicht unter einander in Beziehung zu setzen, wie letzteres z. B. durch Antheile am Potential von der Form

$$d_{hk}(U_h U_k + V_h V_k + W_h W_k)$$

geschehen würde. Aehnliche Erweiterungen gestatten die in (2) und (3) gegebenen Ansätze für $\delta' \alpha_k$ und φ_h''.

Die Einführung solcher Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Hülfsvectoren bewirkt, selbst in dem einfachsten Falle nur zweier Vectoren, sogleich eine außerordentliche Complication der Formeln und die Untersuchung der Wirkungen, welche sie übt, muß daher hier zunächst unterbleiben. Sie darf dies auch um so mehr, als die experimentelle Untersuchung von Körpern mit mehreren Absorptionsstreifen außerhalb des Magnetfeldes, welche derjenigen der Wirkung eines solchen Feldes rationeller Weise vorausgeschickt werden müßte, noch keineswegs weit gefördert ist. Dagegen mögen noch einige Folgerungen Platz finden, die sich für Körper mit mehreren Absorptionsstreifen, aber mit normalem Verhalten, ergeben und die ein Interesse besitzen, da solche Körper anscheinend in der Natur vorkommen, während ein Medium mit wirklich nur einem Streifen bisher nicht beobachtet ist, also als ein idealer Grenzfall gelten muß.

Eine große Zahl der oben für Körper mit einem Absorptionsstreifen entwickelten Formeln wird für solche mit mehreren erweitert, indem nur das dem einen Hülfsvector entsprechende Glied über alle Hülfsvectoren summirt wird. So liefern die für den ersten Hauptfall gültigen Formeln (28) und (29) für Farben, die hinreichend weit von einem Absorptionsstreifen liegen

$$62)\qquad \chi = \frac{l v^2 \vartheta^2 R}{2\omega^3} \sum \frac{q_h^2 k_h}{(\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})^2}, \quad \omega^2 = v^2 \left(1 - \vartheta^2 \sum \frac{q_h^2}{\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2}}\right);$$

dagegen behält (30) seine Gestalt bei.

Die Vergleichung dieser drei Formeln zeigt, daß wenn für jeden Absorptionsstreifen der Zeeman-Effect bestimmt wird, und wenn außerdem das allgemeine Gesetz der Geschwindigkeit ω bekannt ist, der Faraday-Effect sich quantitativ berechnen läßt. Aehnlich, aber minder sicher, ließe sich der Zeeman-Effect aus den beiden andern Gesetzen ableiten.

Die in dem ersten Hauptfall für die maximal absorbirte Farbe $\vartheta = \vartheta^o$ auf S. 336 abgeleiteten Gesetze finden bei normalen Körpern mit mehreren Absorptionsstreifen für jeden einzelnen, d. h. für jedes $\vartheta = \vartheta_h^o$, ungeänderte Anwendung.

Für den zweiten Hauptfall und für Farben, die keinem Absorptionsstreifen sehr nahe liegen, folgt aus (54) und (55)

$$63)\quad \omega_y^2 = v^2 \left(1 - \vartheta^2 \sum \frac{q_h^2 (\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})}{(\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})^2 - k_h^2 R^2 \vartheta^2}\right), \quad \omega_z^2 = v^2 \left(1 - \vartheta^2 \sum \frac{q_h^2}{\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2}}\right);$$

Die Geschwindigkeiten der beiden Componenten v und w, normal und parallel zu den Kraftlinien, unterscheiden sich um ein Glied, das in Bezug auf den Einfluß des Feldes von zweiter Ordnung

ist. Die Formeln würden u. a. für einen normalen Körper, dessen sämmtliche Absorptionsstreifen außerhalb des sichtbaren Spectrums liegen, für alle sichtbaren Farben gelten, und es ist kein Zweifel, daß analoge auch in dem Falle gelten werden, daß der Körper sich anormal verhält. Die letzten Formeln erklären somit, warum eine dem Faraday-Effect entsprechende, nämlich auf einer Geschwindigkeitsdifferenz beruhende Erscheinung an ebenen Wellen, die sich normal zu den Kraftlinien fortpflanzen, an sogenannten durchsichtigen Körpern bisher noch nicht beobachtet ist. Sie lassen es aber zugleich möglich erscheinen, daß eine solche durch Anwendung sehr feiner Hülfsmittel aufgedeckt werden könnte.

Für das Verhalten der Farben, die den maximal absorbirten äußerst nahe liegen, sind die oben S. 340 entwickelten Gesetze auch im Falle mehrerer Absorptionsstreifen anwendbar.

7) Anhangsweise mögen noch einige Worte über das Verhältniß der oben auseinandergesetzten Theorie des Faraday- und Zeeman-Effectes zu dem Kerr'schen Phänomen, d. h. den bei der Reflexion an der Oberfläche eines stark magnetischen Körpers beobachteten Erscheinungen, gesagt werden.

Herr Drude hat gezeigt[1]), daß das für magnetisirte durchsichtige Körper bewährte, zwei Constanten, resp. Functionen der Periode, a und b enthaltende Erklärungssystem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u + b\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}(a\eta + b(A\zeta' - C\xi')) - \frac{\partial}{\partial y}(a\zeta + b(B\xi' - B\eta')),$$

. . . .

für absorbirende Körper nicht in der Weise erweitert werden darf, daß man nur, wie bei nicht activen Körpern, $a\xi$, $a\eta$, $a\zeta$ mit $a\xi + a'\xi'$, $a\eta + a'\eta'$, $a\zeta + a'\zeta'$ vertauscht. Die Beobachtungen lassen sich dagegen befriedigend darstellen, wenn man zugleich auch $b\xi'$, $b\eta'$, $b\zeta'$ durch $b\xi' + b'\xi''$, $b\eta' + b'\eta''$, $b\zeta' + b'\zeta''$ ersetzt. Bei Einführung der complexen Lösungen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und der complexen Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann man sonach das Drude'sche Erklärungssystem auf die Form bringen:

$$64)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{a}\mathfrak{y} + \mathfrak{b}(A\mathfrak{z}' - C\mathfrak{x}')) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{a}\mathfrak{z} + \mathfrak{b}(B\mathfrak{x}' - A\mathfrak{y}')),$$

. . . .

Daß diese Formeln indessen einer befriedigenden physikalischen Begründung und Deutung noch bedürfen, hat Herr Drude wie-

1) P. Drude, Wied. Ann. Bd. 46, p. 353 u. f., 1892.

derholt hervorgehoben. Demgegenüber ist es vielleicht von einigem Interesse, daß die obige Theorie ganz direct auf das Drude'sche Erklärungssystem führt.

Bei Anwendung der complexen Lösungen und der Abkürzung (14) folgt nämlich aus (7)

$$\mathfrak{U}_h \Theta_h (\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 R^2) = -e_h \vartheta^2 [\mathfrak{x}(\Theta_h^2 - g_h^2 \vartheta^2 A^2) + i\mathfrak{y} g_h \vartheta (C\Theta_h + i g_h \vartheta AB) - i\mathfrak{z} g_h \vartheta (B\Theta_h - i g_h \vartheta CA)],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Das Drude'sche Erklärungssystem berücksichtigt nun nur die in Bezug auf die Feldcomponenten A, B, C linearen Glieder. Bei derselben Beschränkung giebt das letzte System unter Benutzung der Beziehungen $i\vartheta\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$, ...

65) $$\mathfrak{U}_h = -e_h \vartheta^2 \left(\frac{\mathfrak{x}}{\Theta_h} + \frac{g_h}{\Theta_h^2} (C\mathfrak{y}' - B\mathfrak{z}') \right).$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (6) für Ξ, H, Z und die Resultate hierauf in (5) ein, so gelangt man zu dem Drude'schen Erklärungssystem (64) mit den Constantenwerthen

66) $$\mathfrak{a} = v^2 - \sum \frac{e_h \vartheta^2}{\Theta_h}, \quad \mathfrak{b} = -\sum \frac{e_h g_h \vartheta^2}{\Theta_h^2};$$

da Θ_h complex ist, so gilt gleiches von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Für Körper mit nur einem Hülfsvector P und somit nur einem Absorptionsstreifen außerhalb des Feldes folgt aus (66) eine numerische Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Setzt man nämlich, ähnlich wie oben, $d\vartheta^2 - 1 = T$, und macht außerdem $\mathfrak{a} = a + i\alpha$, $\mathfrak{b} = b + i\beta$, so wird

67) $$a = v^2 - \frac{e\vartheta^2 T}{T^2 + f^2\vartheta^2}, \quad \alpha = \frac{ef\vartheta^3}{T^2 + f^2\vartheta^2},$$
$$b = -\frac{eg\vartheta^2(T^2 - f^2\vartheta^2)}{(T^2 + f^2\vartheta^2)^2}, \quad \beta = \frac{2efg\vartheta^3 T}{(T^2 + f^2\vartheta^2)^2}.$$

Hieraus folgt

68) $$\frac{\alpha}{a - v^2} = -\frac{f\vartheta}{T}, \quad \frac{\beta}{b} = -\frac{2f\vartheta T}{T^2 - f^2\vartheta^2}.$$

Ist also $-\alpha/(a - v^2) = \operatorname{tg} \varphi$, so $-\beta/b = \operatorname{tg} 2\varphi$. Eine Prüfung dieser Beziehung ist bisher noch nicht möglich.

Göttingen, October 1898.

Ueber eine bemerkenswerte Eigenschaft gewisser Gleichungen in der Theorie der charakteristischen Planeten.

Von

H. Ludendorff.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. November 1898.

In seiner „Theorie der kleinen Planeten" [1]) verwendet Herr Brendel für den Radius Vector des gestörten Körpers den bekannten Ausdruck Gyldéns:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+R+(\varrho)},$$

wo (ϱ) die elementaren, R alle übrigen Glieder enthält. R wird in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Die Bestimmung der Coefficienten derselben macht nur dann einige Schwierigkeit, wenn der Planet zu den „charakteristischen" Planeten gehört, d. h. wenn seine mittlere Bewegung zu derjenigen Jupiters nahe in einem niedrigzahligen Commensurabilitäts-Verhältnis steht. In diesem Falle führt die Bestimmung der Coefficienten der charakteristischen Glieder in R zu komplicierten Rechnungen, namentlich bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse, d. h. denjenigen, bei welchen der Zähler des Commensurabilitätsverhältnisses nur um die Einheit kleiner ist als der Nenner, wie dies bei den Planeten vom Hecuba-Typus und Hilda-Typus ($\mu = \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$) zutrifft. Herr Brendel zeigt im VII. Kapitel seiner citierten

1) Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten. (Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Neue Folge, Band 1, No. 2.)

Abhandlung, daß man bei diesen schließlich zu linearen Gleichungen zwischen den Coefficienten β_k der charakteristischen Glieder in R geführt wird. Mit diesen Gleichungen wird sich die vorliegende Notiz*) beschäftigen. Es stellt sich nämlich heraus, daß eine große Anzahl der Coefficienten dieser Gleichungen untereinander gleich sind, wenn man die Genauigkeit nicht zu weit treibt.

Für die Planeten vom Hecuba-Typus habe ich in meiner Dissertation[1]) die in Rede stehenden Gleichungen entwickelt. Mir sind indessen damals die Beziehungen zwischen den Coefficienten entgangen. — Der charakteristische Teil nullten und ersten Grades von R lautet für die Planeten vom Hecuba-Typus:

$$1)\qquad \text{pars } R = \beta_1 \cos 2w + \beta_2 \eta \cos(2w - \mathrm{v}) + \beta_3 \eta \cos(4w - \mathrm{v}) \\ + \beta_4 \eta' \cos(2w - \mathrm{v}_1) + \beta_5 \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1).$$

Nachdem man β_1 berechnet hat, findet man für β_2 bis β_5 Gleichungen von folgender Gestalt:

$$2)\qquad \begin{aligned} a_1 \beta_2 + a\ \beta_3 &= b_1 \qquad & a'_1 \beta_4 + a'_2 \beta_5 &= b'_1 \\ a_3 \beta_2 + a_4 \beta_3 &= b_2 \qquad & a'_3 \beta_4 + a'_4 \beta_5 &= b'_2 \end{aligned}$$

Die a und a', b und b' sind numerisch bekannte Größen. Hier interessieren uns nur die a und a', deren Werte in den Formeln (51) und (52) meiner Dissertation gegeben sind. Vernachlässigen wir die sehr kleinen Größen ς und $\varsigma_1 = \mu \varsigma'$, auf deren Bedeutung ich hier nicht einzugehen brauche, da sie die in der Gyldén'schen Theorie allgemein übliche ist, so haben wir:

$$3)\qquad \begin{aligned} a_1 &= 1 - \delta^2, \qquad a_2 = -\frac{2q_3^{(3)}}{\delta} \\ a_3 &= -2q_4^{(2)} + p_4^{(2)} + 2\lambda_1, \qquad a_4 = 1 - (1+2\delta)^2 + p_4^{(3)} - \lambda_1\left(\frac{q_3^{(3)}}{\delta} + 3\beta_1\right) \\ a'_1 &= 1 - \delta^2, \qquad a'_2 = -\frac{2q_6^{(5)}}{\delta} \\ a'_3 &= -2q_7^{(4)} + p_7^{(4)} + 2\lambda_1, \qquad a'_4 = 1 - (1+2\delta)^2 + p_7^{(5)} - \lambda_1\left(\frac{q_6^{(5)}}{\delta} + 3\beta_1\right). \end{aligned}$$

δ ist durch die Gleichung $\mu = \dfrac{1-\delta}{2}$ definiert. λ_1 ist eine

---

1) Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Inaugural-Dissertation. Berlin 1897.

numerisch bekannte Größe von der Ordnung $\frac{m'}{\delta}$. Die $q_i^{(k)}$ und $p_i^{(k)}$ sind sehr einfache lineare Functionen der in Gyldéns Hülfstafeln [1]) tabulierten A- und B-Coefficienten. Ihre Werte in Function dieser Coefficienten sind in Tafel II und III meiner Dissertation gegeben. Aus diesen Tafeln ergiebt sich nun unmittelbar, daß:

$$q_3^{(3)} = q_6^{(5)}, \qquad q_4^{(2)} = q_7^{(4)}, \qquad p_4^{(2)} = p_7^{(4)}, \qquad p_4^{(3)} = p_7^{(5)},$$

und daher folgt:

$$4) \qquad a_1 = a'_1, \qquad a_2 = a'_2, \qquad a_3 = a'_3, \qquad a_4 = a'_4.$$

Wenn man ς und ς_1 nicht vernachlässigt, so hören diese Gleichungen auf zu bestehen. Es ist übrigens eine Kleinigkeit, die a nachträglich wegen dieser Vernachlässigung, die man sich anfangs auch aus andern Gründen stets erlauben wird, zu verbessern.

In betreff der Genauigkeit, welche bei den Gleichungen 2) und 3) überhaupt innegehalten ist, muß ich auf meine Dissertation verweisen.

Noch auffallender und für die numerische Rechnung noch wichtiger ist die Gleichheit der entsprechenden Coefficienten bei den Gliedern 2ten Grades, auf die ich ohne Beweisführung nur ganz kurz eingehen will. Der charakteristische Teil zweiten Grades von R lautet:

$$\begin{aligned}
\text{pars}\, R = {} & \beta_6\,\eta^2 \cos 2w + \beta_7\,\eta^2 \cos(2w - 2\mathrm{v}) \\
& + \beta_8\,\eta^2 \cos(4w - 2\mathrm{v}) + \beta_9\,\eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) \\
& + \beta_{10}\,\eta\eta' \cos(2w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \beta_{11}\,\eta\eta' \cos(2w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) + \beta_{12}\,\eta\eta' \cos(2w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \beta_{13}\,\eta\eta' \cos(4w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \beta_{14}\,\eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \beta_{15}\,\eta'^2 \cos 2w + \beta_{16}\,\eta'^2 \cos(2w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + \beta_{17}\,\eta'^2 \cos(4w - 2\mathrm{v}_1) + \beta_{18}\,\eta'^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen zur Berechnung der β haben folgende Form:

$$\begin{array}{r|l}
a_5\beta_6 = b_3, & a'_5\beta_{15} = b'_3 \\
a_6\beta_7 + a_7\beta_8 + a_8\beta_9 = b_4, & a'_6\beta_{12} + a'_7\beta_{13} + a'_8\beta_{14} = b'_4 \\
a_9\beta_7 + a_{10}\beta_8 + a_{11}\beta_9 = b_5, & a'_9\beta_{12} + a'_{10}\beta_{13} + a'_{11}\beta_{14} = b'_5 \\
a_{12}\beta_7 + a_{13}\beta_8 + a_{14}\beta_9 = b_6, & a'_{12}\beta_{12} + a'_{13}\beta_{13} + a'_{14}\beta_{14} = b'_6
\end{array}$$

---

1) H. Gyldén, Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Publication XXI. der Astr. Ges. Leipzig 1896.

$$a''_6\,\beta_{16}+a''_7\,\beta_{17}+a''_8\,\beta_{18} = b''_4$$
$$a''_9\,\beta_{16}+a''_{10}\beta_{17}+a''_{11}\beta_{18} = b''_5$$
$$a''_{12}\beta_{16}+a''_{13}\beta_{17}+a''_{14}\beta_{18} = b''_6$$

$$a_{15}\beta_{10}+a_{16}\beta_{11} = b_7$$
$$a'_{16}\beta_{10}+a'_{15}\beta_{11} = b'_7.$$

Die Bedeutung der a und b ergiebt sich aus der Vergleichung mit den Formeln (75) meiner Dissertation. Es läßt sich leicht beweisen, daß, wenn man auch hier in den a die Größen ς und ς_1 vernachlässigt, ganz allgemein

$$a_k = a'_k = a''_k$$

ist.

Man kann also in den letzten Gleichungen die oberen Indices der a überall fortlassen, wodurch die Berechnung der β natürlich wesentlich erleichtert wird.

Ganz Entsprechendes wie für die Glieder ersten und zweiten Grades wird offenbar auch für diejenigen höheren Grades gelten, und ebenso muß auch für die anderen charakteristischen Planeten der ersten Klasse dasselbe zutreffen, da für diese die Entwicklungen ganz analog sind. Ich bemerke noch, daß bei der Bestimmung der Coefficienten der Funktion $\mathfrak{Z}$, d. h. der Breitenstörungen, ganz analoge Relationen sich zeigen müssen.

Wenden wir uns nun zu den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse, bei denen der Zähler des Commensurabilitäts-Verhältnisses um 2 kleiner als der Nenner ist. Als Beispiel für dieselben können die Planeten vom Hestia-Typus ($\mu = \frac{1}{3}$) gelten. Hier liegen die Dinge bedeutend einfacher als bei den Planeten der ersten Klasse. Man findet für jede der Größen β, welche zu Gliedern ersten Grades gehören, eine Gleichung von der Form $a_k\beta_k = b_k$, und es ergiebt sich, daß die a_k untereinander gleich sind, wenn man ς und ς_1 vernachlässigt. Entsprechendes gilt dann auch für die Glieder zweiten Grades. Doch sind die a_k hier so einfach gebildet, daß ein merklicher Vorteil für die Rechnung aus diesem Umstande nicht erwächst.

Potsdam, Astrophysikalisches Observatorium, 1898 Juli 29.

Zur Theorie der von den Herren Macaluso und Corbino entdeckten Erscheinungen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. November 1898.

In der ersten Sitzung dieses Semesters vom 29. October hatte ich die Ehre, der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eine gemeinsame Theorie des Faraday'schen und des Zeeman'schen Phänomens vorzulegen, von der ich schon einen Monat früher an anderer Stelle mündlichen Bericht erstattet hatte. Diese Theorie kündigte eine Reihe eigenthümlicher Erscheinungen an, die zwar damals noch nicht beobachtet waren, die aber doch zuverlässig erwartet werden durften, da andere merkwürdige Folgerungen aus der Theorie bereits durch die Beobachtung bestätigt worden waren.

Nach der Vollendung des Druckes jener Abhandlung ist mir eine Arbeit der Herren D. Macaluso und O. M. Corbino[1]) bekannt geworden, die, in der Zeit zwischen der ersten Besprechung und der Publication jener Theorie erschienen, also ganz ohne Rücksicht auf sie geschrieben ist und dabei eine Reihe der von ihr vorausgesagten Resultate in der Wirklichkeit nachweist, sodaß sie eine sehr willkommene, völlig unparteiische Bestätigung meiner Formeln liefert. Einige interessante Ergänzungen der von den italienischen Gelehrten gefundenen Thatsachen hat wenig später Herr H. Becquerel[2]) mitgetheilt. Ich werde im Folgenden auseinandersetzen, wie weitgehend diese Beobachtungen durch die Theorie wiedergegeben werden.

1) D. Macaluso und O. M. Corbino, C. R. 127, S. 548, 1898.

2) H. Becquerel, C. R. 127, S. 647, 1898.

Die Beobachtungen der Herren M. und C. beziehen sich auf die Drehung der Polarisationsebene lineär-polarisirten Lichtes, welches eine im Magnetfelde befindliche Natriumflamme parallel zu den Kraftlinien des Feldes durchsetzt.

Für diesen Vorgang gelten die Formeln (24) bis (37) meiner Arbeit, und zwar beziehen sich (24), (25) und (27) auf den allgemeinsten Fall, (26), (28) auf Farben, welche von der außerhalb des Feldes maximal absorbirten so weit abliegen, daß ihre Absorption unbedeutend ist, (31) bis (37) auf jene maximal absorbirte Farbe selbst. Daß sie nur einen Absorptionsstreifen voraussetzen, während Natriumdampf schon allein im sichtbaren Spectrum deren zwei besitzt, kommt nicht in Betracht, da hier der auf der 13. Seite der früheren Arbeit erörterte Fall vorliegt, wo das Licht in der Nähe jedes dieser Streifen sich so verhält, als wäre derselbe allein vorhanden.

Es erscheint vortheilhaft, hier zunächst an die für beliebige Farben geltenden Formeln (24) und (25) anzuknüpfen. Dieselben liefern bei mäßiger Absorption für die Geschwindigkeiten ω und die Absorptionsindices $\varkappa$ der beiden parallel zu den Kraftlinien fortgepflanzten circular-polarisirten Wellen die Werthe

$$1)\qquad \omega_{\pm}^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2-\vartheta^{o2}\pm kR\vartheta)}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2}\pm kR\vartheta)^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right),$$

$$2)\qquad 2\omega_{\pm}^2\varkappa_{\pm} = \frac{v^2q^2\vartheta'\vartheta^3}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2}\pm kR\vartheta)^2+\vartheta'^2\vartheta^2},$$

wobei $\vartheta = \tau/2\pi$ und τ die Periode der fortgepflanzten Schwingung ist, ϑ^o, ϑ', q, k aber Constanten bezeichnen. Bei neben ϑ^o kleinem ϑ' ist ϑ^o sehr nahe der Werth von ϑ, bei dem außerhalb des Feldes der Absorptionsstreifen liegt; im Felde haben die beiden Wellen ihre Absorptionsstreifen bei $\vartheta = \vartheta^o \mp \frac{1}{2} k R$.

Es ist in der früheren Publication auf den Drehungssinn der beiden Wellen kein besonderer Werth gelegt, da auf die beobachtbaren Erscheinungen das Vorzeichen von k einwirkt, das sich nicht von vornherein bestimmen läßt. Für die folgenden speciellen Anwendungen ist es aber nützlich, zu bemerken, daß dem oberen Zeichen in den Ausdrücken auf der rechten Seite eine positive, dem unteren eine negative Rotationsrichtung entspricht wobei der Richtungssinn von einem Beobachter beurtheilt angenommen ist, auf den die betreffende Welle zuläuft. Demgemäß sind die Buchstaben ω und $\varkappa$ mit dem Index $_{\pm}$ versehen worden.

Die Drehung χ der Polarisationsebene beim Zurücklegen einer

Strecke l in einer den Kraftlinien parallelen Richtung wird allgemein durch die Formel

$$\chi = \frac{\pi l}{\tau}\left(\frac{1}{\omega_-} - \frac{1}{\omega_+}\right)$$

gegeben, falls χ in positiver Richtung gezählt wird. Bei kleinen Unterschieden zwischen ω_+ und ω_- kann man auch schreiben

3) $$\chi = \frac{\pi l}{2\tau\,\omega_0^3}(\omega_+^2 - \omega_-^2) = \frac{l}{4\omega_0^3 \vartheta}(\omega_+^2 - \omega_-^2),$$

wobei ω_0 eine mittlere Geschwindigkeit, z. B. $2\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)$ bezeichnet.

Wir wollen nun die nähere Umgebung der Periode betrachten, bei der außerhalb des Feldes der Absorptionsstreifen liegt, also

4) $$\vartheta - \vartheta^\circ = \delta$$

setzen und in den Endformeln δ neben ϑ° vernachlässigen.

Dann erhält man aus (1) und (2)

5) $$\omega_\pm^2 = v^2\left(1 - \frac{q^2\vartheta^\circ(2\delta \pm kR)}{(2\delta \pm kR)^2 + \vartheta'^2}\right)$$

6) $$2\omega_\pm^2 \varkappa_\pm = \frac{v^2 q^2 \vartheta' \vartheta^\circ}{(2\delta \pm kR)^2 + \vartheta'^2}.$$

Aus (3) und (5) aber folgt ohne weitere Vernachlässigung:

7) $$\chi = \frac{v^2 q^2 lkR}{2\omega_0^3}\,\frac{4\delta^2 - k^2R^2 - \vartheta'^2}{(4\delta^2 - k^2R^2 - \vartheta'^2)^2 + 16\vartheta'^2\delta^2},$$

welche Formel die Grundlage der weiteren Darlegung bildet. —

Sei zunächst δ groß gegen kR und ϑ', sodaß ihm keine merkliche Absorption entspricht. Dann wird aus (7)

8) $$\chi = \frac{v^2 q^2 lkR}{8\omega_0^3 \delta^2},$$

was sachlich mit der früheren Formel (28) übereinstimmt.

Die Gleichung (8) spricht das einfache Gesetz der Beobachtungen der Herren M. und C. in einiger Entfernung von einem Absorptionsstreifen aus. Die Drehung hat überall denselben Sinn und ist zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens in gleichen Entfernungen von ihm gleich groß; sowohl ihr absoluter Betrag, als ihr Gefälle nimmt mit wachsender Entfernung ab. Beiläufig bestimmt das Resultat, daß die Drehung im Sinne des magnetisirenden Stromes stattfindet, das Vorzeichen der Constante k positiv,

was mit den Ergebnissen des Zeeman-Effectes bezüglich der Polarisationsverhältnisse der beiden parallel den Kraftlinien ausgesandten Wellen übereinstimmt.

Weiter ergiebt sich in den vorausgesetzten Entfernungen vom Absorptionsstreifen die Drehung mit der Feldstärke R und mit der Constanten q^2 proportional, die nach (6) wesentlich die Stärke der Absorption bestimmt. —

In größerer Nähe des Absorptionsstreifens muß auf das allgemeinere Gesetz (7) zurückgegangen werden. Dasselbe zeigt, daß die Drehung χ verschwindet, wenn

$$9)\qquad 4\delta^2 = k^2R^2 + \vartheta'^2,$$

daß sie ein Maximum oder Minimum annimmt, wenn

$$4\delta^2 = k^2R^2 + \vartheta'^2 \pm 2\vartheta'\sqrt{k^2R^2 + \vartheta'^2}$$

ist. Da $4\delta^2 = k^2R^2$ angenähert die Lage der beiden Absorptionsstreifen angiebt, in die der ursprünglich bei $\delta = 0$ gelegene durch die Feldwirkung zerlegt wird, und da bei den Macaluso- und Corbino'schen Beobachtungen die beiden Streifen nicht merklich getrennt waren, so haben wir nur die Werthe von $\delta^2 > \frac{1}{4}k^2R^2$ zu betrachten, d. h. die Maxima, die nach dem oben Gesagten bei

$$10)\qquad 4\delta^2 = k^2R^2 + \vartheta'^2 + 2\vartheta'\sqrt{k^2R^2 + \vartheta'^2}$$

liegen müssen.

Die durch (9) gegebenen Stellen verschwindender Drehung sind nicht beobachtet worden, was dahin gedeutet werden muß, daß ϑ' bei den betreffenden Versuchen eine sehr kleine Größe gewesen ist. Wenn trotzdem die Stellen maximaler Drehung beobachtbar waren, so muß bei den benutzten Feldstärken kR groß gegen ϑ' gewesen sein.

Der Betrag der maximalen Drehung findet sich leicht zu

$$11)\qquad \bar{\chi} = \frac{v^2q^2lkR}{8\omega_0^8\vartheta'(\sqrt{k^2R^2+\vartheta'^2}+\vartheta')}.$$

Ist, wie oben erörtert, ϑ' klein gegen kR, so giebt dies angenähert

$$12)\qquad \bar{\chi} = \frac{v^2q^2l}{8\omega_0^8\vartheta'};$$

die maximale Drehung ist dann von der Feldstärke fast unabhängig. Eben dies sonderbare Resultat haben aber die Herren M. und C. aus ihren Beobachtungen geschlossen; man muß dem-

gemäß annehmen, daß die Feldstärken, bei denen die Erscheinungen deutlich waren, kR groß gegen ϑ' werden ließen.

Der Factor q^2/ϑ' bestimmt nach (6) in erster Linie die Absorption außerhalb des Feldes für $\delta = 0$, d. h. für $\vartheta = \vartheta^o$; ϑ' bestimmt die Breite des Absorptionsstreifens. Wenn daher die Breite des Streifens variirt, ohne daß sich dabei die Stärke der Absorption erheblich ändert, so muß dieser Wechsel nach (12) die maximale Drehung gleichfalls unberührt lassen. Es scheint, daß ein solcher Fall von den Herren M. und C. wirklich beobachtet worden ist. Dabei kömmt in Betracht, daß bei wachsendem ϑ', also bei verbreitertem Absorptionsstreifen gemäß der Formel (10) die Stellen größter Drehung nach beiden Seiten hin auseinanderrücken, also voraussichtlich sichtbar bleiben, wenn sie ursprünglich sichtbar waren. Uebrigens würde wegen der langsamen Veränderlichkeit von χ in der Nähe des Maximalwerthes selbst ein Vorrücken der Absorption in jenem Gebiet nur geringen Einfluß haben.

Nach den Beobachtungen der Herren M. und C. geht nahe den Rändern des Absorptionsstreifens das lineär-polarisirte Licht in elliptisch- und schließlich in circular-polarisirtes über. Die Rotationsrichtung fällt auf der nach Roth gelegenen Seite des Absorptionsstreifens mit der des magnetisirenden Stromes zusammen; auf der nach Violett liegenden ist sie letzterer entgegengesetzt. Auch dies — wohl nicht ganz neue — Resultat folgt, wie leicht zu sehen, vollständig aus meinen Formeln. Ebenso ergeben sie in Uebereinstimmung mit einer Bemerkung von Herrn Becquerel, daß die bei parallelen oder gekreuzten Nicols wahrnehmbaren Erscheinungen sich durch die Umkehrung des Feldes nicht ändern, wohl aber die bei anderen Stellungen wahrgenommenen. Der Nachweis ist so einfach, daß er hier nicht geführt zu werden braucht.

Die fraglichen Phänomene werden also in allen frappirenden Details durch die zu einem ganz andern Zweck aufgestellte Theorie wiedergegeben [1]). — Daß diese übrigens keineswegs die einzige ist, die solches leistet, werde ich an einer andern Stelle zeigen.

---

1) Beiläufig möge erwähnt werden, daß auch die von Herrn H. Becquerel aus Beobachtungen geschlossene Beziehung, die in unserer Bezeichnung lauten würde $\chi = lR\mu\vartheta\frac{d\,1/\omega_0}{d\vartheta}$ — unter ω_0 die Geschwindigkeit der durch ϑ characterisirten Farbe außerhalb des Magnetfeldes und unter μ einen Parameter verstanden — mit der Theorie nicht in Widerspruch steht. Letztere liefert nämlich unter gewissen Voraussetzungen $\chi = lR\mu\Theta\frac{d\,1/\omega_0}{d\Theta}$, wobei Θ eine Function von ϑ ist, die ähnlich wie ϑ verlaufen kann.

Es mag befremdlich scheinen, daß ich, schon längere Zeit im Besitz dieser Theorie, nicht selbst sofort nach den oben beschriebenen und durch sie signalisirten Erscheinungen suchte, welche doch auf der Naturforscherversammlung in Düsseldorf der Gegenstand einer ausführlichen Discussion im kleineren Kreise gewesen waren. In Bezug hierauf sei bemerkt, daß mir eben durch die Theorie eine etwas andere Erscheinung zur Untersuchung besonders empfohlen wurde, nämlich die Drehung lineär-polarisirten Lichtes, welches, von einer außerhalb des Magnetfeldes aufgestellten Natriumflamme ausgehend, eine im Felde befindliche Flamme parallel den Kraftlinien durchschreitet. Während nämlich das Gesetz für die Drehung der Polarisationsebene einer beliebigen Farbe Parameter enthält, die zunächst nicht bekannt sind, und demnach einen vorläufigen Ueberschlag der zu erwartenden Wirkung nicht gestattet, hat die Formel für die Drehung von Licht, das außerhalb des Magnetfeldes maximale Absorption erleidet, einen viel einfacheren Character und gestattet leicht zu übersehen, daß unter erreichbaren Umständen das bezügliche Phänomen in sehr beträchtlicher Stärke auftreten muß. Ich habe dies auf der 8. Seite meiner Arbeit — wo, beiläufig gesagt, gleichfalls auf die Feststellung des Drehungssinnes kein Gewicht gelegt ist — ausführlich dargestellt.

Inzwischen sind die bezüglichen Untersuchungen durch widrige Umstände sehr verzögert und durch die schöne Entdeckung der Herren Macaluso und Corbino überholt worden. Die von mir versuchte Feststellung des singulären Verhaltens des Natriumlichtes unter den geschilderten Umständen hat durch sie auch jede entscheidende Bedeutung verloren. Es kann jetzt wohl keinem Zweifel mehr unterliegen, daß der Vorgang sich wirklich so abspielt, wie die Theorie sagt.

Göttingen, November 1898.

Doppelbrechung von im Magnetfelde befindlichem Natriumdampf in der Richtung normal zu den Kraftlinien.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. November 1898.

Eine von mir entwickelte gemeinsame Theorie des Faraday'schen und des Zeeman'schen Phänomens signalisirte nach zwei Richtungen hin zuvor noch nicht in dieser Weise beobachtete Vorgänge. Für Wellen, die parallel zu den Kraftlinien fortschreiten, kündigte sie eine abnorme Drehung der Polarisationsebene an, falls ihre Farbe einem schmalen Absorptionsstreifen nahe liegt, dagegen für Wellen, die normal zu den Kraftlinien fortschreiten, eine gewöhnliche Doppelbrechung.

Die erstere Erscheinung ist von den Herren Macaluso und Corbino ohne Kenntniß der Theorie aufgefunden worden und, wie in der vorstehenden Notiz gezeigt ist, in allen Details mit jener in Uebereinstimmung. Die letztere war bisher noch nicht nachgewiesen, und man hatte umsoweniger Ursache, ihr nachzuspüren, als die bisherigen Theorien der optischen Wirkung eines Magnetfeldes alle oder zumeist ihr Vorhandensein überhaupt ausschließen.

Bevor ich die Beobachtungen beschreibe, durch welche das Vorhandensein einer solchen Doppelbrechung nunmehr festgestellt worden ist, will ich die auf diesen Vorgang bezüglichen Formeln der von mir gegebenen Theorie entwickeln, wobei ich mich zunächst wieder auf ein Medium mit nur einem Hülfsvector, und daher mit nur einem Absorptionsstreifen, beschränke. Warum dieselben auf Natriumdampf anwendbar sind, ist oben dargethan.

Es kommen hier die mit (50) und (52) bezeichneten Gleichun-

gen meiner früheren Publication in Betracht, die, auf den Fall mäßiger Absorption angewandt, lauten:

$$1)\quad \omega_\eta^2 = v^2\left(1-\frac{\frac{1}{2}q^2\vartheta^2(\vartheta^2-kR\vartheta-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2-kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}-\frac{\frac{1}{2}q^2\vartheta^2(\vartheta^2+kR\vartheta-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2+kR\vartheta-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right),$$

$$2)\quad \omega_\zeta^2 = v^2\left(1-\frac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2-\vartheta^{o2})}{(\vartheta^2-\vartheta^{o2})^2+\vartheta'^2\vartheta^2}\right).$$

Hierin bezeichnen ω_η und ω_ζ die Geschwindigkeit der normal und parallel zu den Kraftlinien schwingenden Componenten η und ζ des Fresnel'schen Lichtvectors; die Bedeutung von $q, k, \vartheta^o, \vartheta'$ und ϑ ist dieselbe, wie in der vorigen Arbeit.

Für die Phasendifferenz zweier Wellen, welche mit diesen Geschwindigkeiten die Strecke l zurücklegen, gilt allgemein

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\tau}\left(\frac{1}{\omega_\eta}-\frac{1}{\omega_\zeta}\right),$$

oder bei geringer Verschiedenheit von ω_η und ω_ζ wegen $\vartheta = \tau/2\pi$ auch

$$3)\quad \Delta = \frac{l}{2\omega_o^3\vartheta}(\omega_\zeta^2-\omega_\eta^2),$$

wobei ω_o etwa gleich $\frac{1}{2}(\omega_\eta+\omega_\zeta)$ ist.

Beschränkt man sich wieder auf die Nachbarschaft des Absorptionsstreifens, setzt also $\vartheta-\vartheta^o = \delta$ und läßt in den Endformeln δ neben ϑ^o fort, so resultirt

$$4)\quad \omega_\eta^2 = v^2\left(1-\frac{2q^2\vartheta^o\delta(4\delta^2-k^2R^2+\vartheta'^2)}{(4\delta^2-k^2R^2+\vartheta'^2)^2+4\vartheta'^2k^2R^2}\right),$$

$$5)\quad \omega_\zeta = v^2\left(1-\frac{2q^2\vartheta^o\delta}{4\delta^2+\vartheta'^2}\right).$$

In der gleichen Annäherung folgt für Δ der Ausdruck

$$6)\quad \Delta = \frac{v^2lq^2\delta}{\omega_o^3}\left(\frac{4\delta^2-k^2R^2+\vartheta'^2}{(4\delta^2-k^2R^2+\vartheta'^2)^2+4\vartheta'^2k^2R^2}-\frac{1}{4\delta^2+\vartheta'^2}\right).$$

Nach den Resultaten der vorigen Arbeit kann man schon bei mäßigen Feldstärken für Natriumdampf k^2R^2 als groß gegen ϑ'^2 betrachten und erhält dann, da die Beobachtung nur für $4\delta^2 > k^2R^2$ möglich ist, bei geeigneter Vernachlässigung den einfachen Ausdruck

7) $$\Delta = \frac{v_0^2 l q^2 \delta}{\omega_0^3}\left(\frac{1}{4\delta^2 - k^2 R^2} - \frac{1}{4\delta^2}\right).$$

Für eine nur qualitative Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung genügt sogar die hieraus folgende rohe Annäherungsformel

8) $$\Delta = \frac{v^2 l q^2 k^2 R^2}{16\,\delta^3 \omega_0^3}.$$

Dieselbe ergiebt die Phasendifferenz Δ direct proportional mit der für die Stärke der Absorption characteristischen Constanten q^2; ferner proportional mit dem Quadrat der Feldstärke R, und somit unabhängig von deren Vorzeichen; endlich indirect proportional mit δ^3, d.h. mit $(\vartheta - \vartheta_0)^3$, also zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens von entgegengesetztem Vorzeichen, und bei Annäherung an denselben rapid anwachsend. Das letzte Resultat giebt an die Hand, die Größe Δ in möglichster Nähe des Absorptionsstreifens zu untersuchen.

Demgemäß wurde für die von Prof. Wiechert und mir angestellten Beobachtungen folgende Versuchsanordnung gewählt.

Die etwa 8 cm breiten Polschuhe eines großen Electromagneten wurden einander bis auf etwa $1\frac{1}{2}$ cm Abstand genähert und in der zwischen ihnen bleibenden Spalte eine gleichfalls ca. 8 cm breite Natriumflamme angebracht. Das mit Hülfe eines Nicols linear im Winkel 45^0 gegen die Kraftlinien polarisirte Licht einer electrischen Lampe durchsetzte die Flamme in ihrer ganzen Breite und fiel sodann auf den Spalt eines Spectrometers, dessen Tischchen ein Rowlandsches Gitter trug. Das Beobachtungsfernrohr war auf die Natriumlinien des zweiten Spectrums und ein vor dem Ocular befestigter Nicol auf größte Dunkelheit eingestellt. Die Natriumflamme war so regulirt, daß die Breite der Linien etwa $1/5$ bis $1/6$ ihres gegenseitigen Abstandes betrug.

Nunmehr wurde vor dem Spalt des Spectrometers ein Babinet'scher doppelter Quarzkeil mit horizontalliegenden Schneiden angebracht. Hierdurch hellte sich das Gesichtsfeld auf, und außer den dunkeln Natriumlinien durchzog nun ein schwarzer, nahezu horizontaler Interferenzstreifen das Gesichtsfeld, wie nachstehend schematisch dargestellt ist:

roth —|—|— violett.

Bei Erregung des Electromagneten durch einen gleichförmig anwachsenden Strom änderte sich zunächst nichts in merklicher Weise, dann hoben sich die von rechts her an die beiden Natrium-

linien grenzenden Theile des Interferenzstreifens mit wachsender Geschwindigkeit nach oben, während die von links ihnen benachbarten Theile ebenso herabsanken. Bei einer Feldstärke von ca. 8000 absoluten Einheiten hatten diese Verschiebungen ungefähr den Betrag des Abstandes der beiden Natriumlinien, was einer Phasendifferenz $\varDelta$ von nahezu $= \pi/10$ entsprechen mochte. Der Theil des Interferenzstreifens zwischen diesen Linien war somit von rechts nach links steil aufgerichtet, die äußeren Theile waren resp. nach oben und nach unten gekrümmt.

Die Erscheinung blieb beim Umkehren des Magnetfeldes ungeändert.

Um den Sinn der zur Wirkung gelangenden Phasendifferenz festzustellen, ist zu benutzen, daß von der Quarzcombination der Keil, dessen Schneide normal zur optischen Axe stand, mit der Schneide nach oben vor dem Spalt befestigt war. Im oberen Theile der Combination erlitt somit die vertical polarisirte, im unteren die horizontal polarisirte Welle die größere Verzögerung. Nun stellt $\varDelta$ in Formel (8) die Verzögerung der horizontal polarisirten Welle gegen die vertical polarisirte dar. Ist $\varDelta$ positiv, so verschieben sich hiernach bei der benutzten Beobachtungsmethode die Interferenzstreifen auf der Keilcombination nach oben, ist es negativ, nach unten. Da das Fernrohr das Bild umkehrt, so gilt für die Bewegung im Gesichtsfelde das Entgegengesetzte.

Nach seiner Definition ist $\delta > 0$ auf der nach roth gelegenen, linken Seite eines Absorptionskreises; ebenda ist nach (8) $\varDelta > 0$, diese Seite des Interferenzstreifens muß somit nach der Theorie bei der Erregung des Feldes nach unten gehen. Die Beobachtung hat, wie oben gesagt, das gleiche Resultat geliefert.

Im Magnetfelde befindlicher Natriumdampf zeigt sonach in der Richtung normal zu den Kraftlinien eine Doppelbrechung, die durchaus dem Gesetz folgt, welches die von mir gegebene Theorie liefert.

Da diese Doppelbrechung eine der überraschendsten Folgerungen der Theorie darstellt, so giebt ihr Nachweis dieser eine ziemlich gewichtige Bestätigung. Doch ist zu bemerken, daß, wie ich schon in meiner ersten Publication betonte, die von mir zunächst entwickelte Theorie, keineswegs die einzige ist, welche zu den abgeleiteten Resultaten führt. Ich werde auf diesen Punkt an einer andern Stelle zurückkommen.

Auf eine nicht unwichtige Folgerung aus dem durch obige

Beobachtung Gewonnenen möge zum Schluß noch aufmerksam gemacht werden.

Bisher hat man häufig die natürlich- und die magnetisch-activen isotropen Körper in einen gewissen Gegensatz dadurch gebracht, daß man den ersteren eine Wellenfläche mit zwei völlig getrennten Hüllen zusprach, den letzteren eine solche, deren Hüllen im Aequator, d. h. in der zu den Kraftlinien des Feldes normalen Ebene zusammenhängen. Dieser Gegensatz ist nach den vorstehend erhaltenen Resultaten in der Wirklichkeit nicht vorhanden: auch die Wellenfläche der magnetisch-activen isotropen Körper besitzt zwei nirgends zusammenhängende Hüllen.

Ein natürlich-activer einaxiger Krystall und ein isotroper, aber magnetisch erregter Körper haben darnach Wellenflächen von äußerst nahe entsprechendem Character; nur liegen sich bei ersterem die beiden Hüllen in der Axenrichtung, bei letzterem in der Aequatorebene am nächsten.

Bei beiden Körpern pflanzen sich parallel zur Axe zwei entgegengesetzt rotirende circularpolarisirte, normal zur Axe zwei angenähert oder streng lineär polarisirte und normal zu einander schwingende Wellen fort. Beim Passiren des Aequators bleibt im natürlich-activen einaxigen Krystall die Rotationsrichtung einer jeden Welle erhalten, in dem magnetisch-activen isotropen Körper kehrt sie sich um.

Göttingen, November 1898.

Ueber die numerische Auflösung transcendenter Gleichungen durch successive Approximationen.

Von

A. Sommerfeld.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 10. Dezember 1898.

Bei Gelegenheit einer Aufgabe aus der Elektrodynamik wurde ich auf eine transcendente Gleichung geführt, für deren numerische Auflösung sich ein Verfahren successiver Approximationen sehr geeignet erwies. In den folgenden Zeilen verallgemeinere ich dieses Verfahren nach Besprechung des speziellen Beispiels in naheliegender Weise.

1a. Die Gleichung, auf welche die erwähnte Aufgabe führt, lautet in vereinfachter Form $x \log x = z$; hier sei z zunächst eine negative, reelle Zahl, größer als $-\frac{1}{e}$. Es ist bequem, $-y$ statt z und etwa $\operatorname{Log} x$ statt $-\log x$ zu schreiben. Die fragliche Gleichung lautet dann

$$x \operatorname{Log} x = y.$$

Sie besitzt, wie man leicht sieht, unter der Annahme $y < \frac{1}{e}$ eine reelle Wurzel, welche zwischen 0 und $\frac{1}{e}$, und eine zweite, welche zwischen $\frac{1}{e}$ und 1 gelegen ist. Wir befassen uns zunächst mit der Berechnung der ersteren.

Zu dem Zweck bilden wir uns die Reihe der Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mittels der folgenden Gleichungen:

$$(1) \qquad x_1 = y, \qquad x_2 \operatorname{Log} x_1 = y, \qquad x_3 \operatorname{Log} x_2 = y, \ldots$$

Um die Convergenz des Verfahrens zu beweisen, zeigen wir, daß unsere Näherungswerte eine Reihe abnehmender, positiver Zahlen bilden, daß nämlich

(2) $$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > 0$$

ist. In der That wird unter der Voraussetzung $y < \frac{1}{e}$ der erste Näherungswert $x_1 < \frac{1}{e}$, also $\mathrm{Log}\, x_1 > 1$. Mithin folgt durch Division der ersten und zweiten Gleichung (1):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\mathrm{Log}\, x_1} < 1, \qquad \text{d. h. } x_2 < x_1.$$

Setzt man nun allgemein voraus $x_n < x_{n-1} < \cdots \frac{1}{e}$, so gilt $\mathrm{Log}\, x_n > \mathrm{Log}\, x_{n-1}$. Durch Division der n^{ten} und der $(n+1)^{\text{ten}}$ Gleichung (1) ergiebt sich daher

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\mathrm{Log}\, x_{n-1}}{\mathrm{Log}\, x_n} < 1, \qquad \text{d. h. } x_{n+1} < x_n.$$

Daß überdies alle x_i positiv ausfallen, ist an sich klar.

Aus den somit bewiesenen Ungleichungen (2) folgt nun, daß die x_i gegen eine bestimmte Grenze x convergiren, welche Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. In der That haben wir für $\mathrm{Lim}\, x_n = \mathrm{Lim}\, x_{n+1} = x$ in Folge der Definitionsgleichungen (1)

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} (x_{n+1} \mathrm{Log}\, x_n) = x\, \mathrm{Log}\, x = y.$$

Dieser Grenzwert x ist überdies von Null verschieden, weil $\mathop{\mathrm{Lim}}_{x=0}(x\, \mathrm{Log}\, x) = 0$, also nicht gleich y ist.

Man kann unseren ganzen Näherungsproceß auch in die folgende, Kettenbruch-ähnliche Schreibweise zusammenfassen:

(3) $$x = \cfrac{y}{\mathrm{Log}\cfrac{y}{\mathrm{Log}\cfrac{y}{\mathrm{Log}\ddots}}}$$

Es handelt sich, wie man sieht, um fortgesetzte „Iteration“ des Functionszeichens $\frac{y}{\mathrm{Log}}$.

Für die praktische Anwendung ist es schließlich noch erfor-

derlich, den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man das Verfahren nach n Schritten abbricht. Dies kann mit Hülfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung geschehen. Es sei x der wahre Wert der Wurzel, so daß $x \operatorname{Log} x = y$ und x_n der n^{te} Näherungswert. Setzt man $y_n = x_n \operatorname{Log} x_n$, so wird nach dem Mittelwertsatze:

$$\frac{y_n - y}{x_n - x} = \operatorname{Log} x' - 1.$$

In dem rechterhand stehenden Differentialquotienten von $x \operatorname{Log} x$ bedeutet x' einen Mittelwert zwischen x und x_n, so daß jedenfalls $x' < x_n$ und $\operatorname{Log} x' > \operatorname{Log} x_n$ wird. Für den fraglichen Fehler $x_n - x$ erhalten wir daher aus der letzten Gleichung die folgende Abschätzung:

(4) $$x_n - x < \frac{y_n - y}{\operatorname{Log} x_n - 1}.$$

Nehmen wir z. B. $y = \frac{1}{100}$, so berechnen wir successive

$$x_1 = 0{,}01000, \quad x_2 = 0{,}00217, \quad x_3 = 0{,}00163, \quad x_4 = 0{,}00156,$$
$$x_5 = 0{,}00155$$

und

$$\operatorname{Log} x_5 = 6{,}46951, \qquad y_5 = x_5 \operatorname{Log} x_5 = 0{,}01000.$$

Wir haben mithin

$$y - y_5 < 10^{-5}, \qquad \operatorname{Log} x_5 - 1 > 5, \qquad x_5 - x < \tfrac{1}{5} \cdot 10^{-5}.$$

Der Näherungswert x_5 giebt also die Wurzel unserer Gleichung in den ersten 5 Decimalen richtig wieder.

1b. Es handle sich jetzt darum, die andere Wurzel der Gleichung

$$x \operatorname{Log} x = y$$

zu finden, welche größer als $\frac{1}{e}$ ist, unter der abermaligen Voraussetzung $0 < y < \frac{1}{e}$.

Zu dem Ende bestimmen wir die Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jetzt durch die folgenden Gleichungen:

(5) $$\operatorname{Log} x_1 = y, \qquad x_1 \operatorname{Log} x_2 = y, \qquad x_2 \operatorname{Log} x_3 = y, \ldots$$

Die Convergenz des Verfahrens ist dargethan, wenn wir die fol-

gende Serie von Ungleichungen beweisen können:

(6) $$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > \frac{1}{e}.$$

Aus der ersten Gleichung (5) folgt zunächst (wegen $y > 0$) $\operatorname{Log} x_1 > 0$, d. h. $x_1 < 1$ und $\left(\text{wegen } y < \frac{1}{e}\right) \operatorname{Log} x_1 < \frac{1}{e} < 1$ d. h. $x_1 > \frac{e}{1}$. Die Division der ersten und zweiten Gleichung liefert alsdann

$$\frac{\operatorname{Log} x_2}{\operatorname{Log} x_1} = \frac{1}{x_1}$$

also (wegen $x_1 < 1$)

$$\operatorname{Log} x_2 > \operatorname{Log} x_1 \qquad \text{d. h. } x_2 < x_1.$$

Andrerseits besagt die zweite Gleichung (5) $\left(\text{wegen } y < \frac{1}{e} \text{ und } x_1 > \frac{1}{e}\right)$

$$\operatorname{Log} x_2 < 1 \qquad \text{d. h. } x_2 > \frac{1}{e}.$$

Sei nun allgemein $\frac{1}{e} < x_n < x_{n-1} < \cdots x_1$. Dann folgt durch Division zweier geeigneter Gleichungen (5)

$$\frac{\operatorname{Log} x_{n+1}}{\operatorname{Log} x_n} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

also (wegen $x_n < x_{n-1}$)

$$\operatorname{Log} x_{n+1} > \operatorname{Log} x_n \qquad \text{d. h. } x_{n+1} < x_n.$$

Andrerseits ist $\left(\text{wegen } y < \frac{1}{e}, \quad x_n > \frac{1}{e}\right)$

$$\operatorname{Log} x_{n+1} = \frac{y}{x_n} < 1 \qquad \text{d. h. } x_{n+1} > \frac{1}{e}.$$

Somit haben wir die Ungleichungen (6) und die Convergenz unseres Näherungsprocesses bewiesen. Der Grenzwert x, dem die Näherungswerte x_i zustreben, liefert uns die gesuchte zweite Wurzel der vorgelegten Gleichung.

Die Fehlerabschätzung ist dabei etwas anders zu bewirken, wie unter 1a. Man überzeugt sich leicht, daß der negative Differenzenquotient $-\frac{y-y_n}{x-x_n}$, in welchem wieder $y_n = x_n \operatorname{Log} x_n$ gesetzt

ist, mit von x_n aus abnehmendem x beständig abnimmt. Wählt man also für x das eine mal den gesuchten Wurzelwert unserer Gleichung, das andere mal den Wert $\frac{1}{e}$, in welchem Falle auch $y = \frac{1}{e}$ wird, so erkennt man:

$$\frac{y-y_n}{x_n-x} > \frac{\frac{1}{e}-y_n}{x_n-\frac{1}{e}}$$

oder

$$x_n - x < (y-y_n)\frac{x_n-\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}-y_n}. \tag{7}$$

Nehmen wir als Beispiel wie oben $y = \frac{1}{100}$, so berechnen wir:

$$x_1 = 0{,}99005, \qquad x_2 = 0{,}98997, \qquad \operatorname{Log} x_2 = 0{,}01010$$

und

$$y_2 = 0{,}009999, \qquad y - y_2 = 1\cdot 10^{-6}, \qquad x_2 - \frac{1}{e} = 0{,}62,$$

$$\frac{1}{e} - y_2 = 0{,}36;$$

mithin wird

$$x_2 - x < \frac{0{,}62}{0{,}36}\cdot 10^{-6} < 2\cdot 10^{-6}.$$

Der Näherungswert x_2 stellt also bereits in den ersten fünf Decimalen die Wurzel der Gleichung richtig dar.

Wollen wir auch hier das Resultat unseres Verfahrens in eine einzige Formel zusammenfassen, so können wir nach (5) schreiben:

$$\frac{1}{x_1} = e^y, \quad \frac{1}{x_2} = e^{y\cdot e^y}, \quad \frac{1}{x_3} = e^{y\cdot e^{y\cdot e^y}} \ldots$$

also schließlich, wenn wir noch der bequemeren Schreibweise wegen $\frac{1}{x} = \xi$, $e^y = \eta$ setzen:

$$\xi = \eta^{\eta^{\eta^{\cdot^{\cdot}}}} \tag{8}$$

Unser Näherungsverfahren erweist sich also im vorliegenden Falle identisch mit jener eigentümlichen Potenzbildung, deren Betrachtung von Eisenstein[1]) begonnen und von Seidel[2]) weitergeführt ist.

2a. Wir gehen zu unserer Ausgangsgleichung

$$x \log x = z$$

zurück, in welcher z jetzt eine positive Zahl, größer als e bedeuten möge. Um diese Gleichung zu lösen, wenden wir abermals das in 1a beschriebene Verfahren an. Wir berechnen nämlich die Näherungswerte x_1, x_2, x_3 .. durch die folgenden Gleichungen:

(9) $$x_1 = z, \qquad x_2 \log x_1 = z, \qquad x_3 \log x_2 = z, \ldots$$

Zwischen diesen Größen bestehen dann die Ungleichungen:

(10) $$x_2 < x_4 < x_6 \cdots < x_{2n} < x_{2n+1} < \cdots x_5 < x_3 < x_1$$

Wir beweisen dieselben folgendermaßen: Infolge der Voraussetzung über z haben wir zunächst $e < x_1 < \infty$, also $\log x_1 > 1$. Aus der zweiten Gleichung (9) folgt dann $x_2 < x_1$. Da überdies der kleinste Wert, dessen die Größe $x_2 = \frac{z}{\operatorname{Log} z}$ zwischen $z = e$ und $z = \infty$ fähig ist, für $z = e$ eintritt und gleich e ist, so haben wir $x_2 > e$. Infolge dessen wird $\operatorname{Log} x_2 > 1$ und (wegen $x_2 < x_1$) $\operatorname{Log} x_2 < \operatorname{Log} x_1$. Die dritte Gleichung (9) zeigt daher, daß $x_2 < x_3 < x_1$. Durch den Schluß von $2n-2$ und $2n-1$ auf $2n$ und $2n+1$ kann man darauf den Nachweis der Ungleichungen (10) zu Ende führen.

Wie man sieht, liegen hier die Dinge wesentlich anders, als in den Fällen 1a und b. Aus den Ungleichungen (10) kann man nämlich nicht ohne Weiteres schließen, daß unser Verfahren convergirt und als Grenze die gesuchte Wurzel der vorgelegten Gleichung liefert. Vielmehr müssen wir die Möglichkeit offen lassen, daß sich die Näherungswerte ungerader und die gerader Ordnung je zwei verschiedenen Grenzen nähern, welche x' und x'' heißen mögen. Zwischen diesen und dem Werte z würden dann die beiden Relationen bestehen:

(11) $$x' \log x'' = z \text{ und } x'' \log x' = z,$$

1) Crelles Journal, Bd. 28.

2) Abh. der Kgl. bayerischen Academie der Wiss. Bd. 11. 1874: Ueber die Grenzwerte eines unendlichen Potenzausdrucks. Der im Text gegebene Convergenzbeweis findet sich im § 1 dieser Arbeit in etwas anderer Form vor.

während keine der beiden Grenzen der ursprünglichen Gleichung zu genügen braucht.

Man erkennt nun aber trotzdem, daß unter der gemachten Voraussetzung $e < z < \infty$ die Grenzen x' und x'' zusammenfallen. Aus (11) folgt nämlich

$$\text{(12)} \qquad \frac{\log x'}{x'} = \frac{\log x''}{x''}.$$

Da nun die Function $\frac{\log x}{x}$ von ihrem maximalen Werte $\frac{1}{e}$ bis zur Null monoton abnimmt, während man x von e bis ∞ wachsen läßt, so nimmt sie jeden Wert nur an einer Stelle an. Die Gleichung (12) hat daher unter der oben als richtig erkannten Voraussetzung $x' > e$ und $x'' > e$ die andere Gleichung zur Folge $x' = x''$. Daraufhin gehen die Relationen (11) in die vorgelegte Gleichung über. Man erhält also in der gemeinsamen Grenze der geraden und ungeraden Näherungswerte wirklich die gesuchte Wurzel. Der Fehlerabschätzung ist man in diesem Falle ersichtlich überhoben, da die Wurzel immer zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerten enthalten ist.

Als Beispiel wählen wir $z = 100$ und berechnen der Reihe nach:

$x_1 = 100$, $x_2 = 21{,}714$, $x_3 = 32{,}490$, $x_4 = 28{,}728$,
$x_5 = 29{,}780$, $x_6 = 29{,}466$, $x_7 = 29{,}558$, $x_8 = 29{,}530$,
$x_9 = 29{,}539$, $x_{10} = 29{,}536$.

Von dem folgenden Näherungswert und also auch von dem gesuchten Wurzelwerte x unterscheidet sich x_{10} in den ersten fünf Ziffern nicht mehr.

2b. Es bleibt uns noch übrig, den Fall $0 < z < e$ zu besprechen, für welchen die Anordnung 2a unseres Näherungsverfahrens nicht zum Ziele führt. Hier haben wir vielmehr wieder ein dem Verfahren 1b analoges einzuschlagen, indem wir setzen:

$$\text{13)} \qquad \log x_1 = z, \qquad x_1 \log x_2 = z, \qquad x_2 \log x_3 = z, \; \ldots\ldots$$

Da, wie wir sahen, dieses Verfahren auf die Eisenstein'sche Potenzbildung herauskommt und letztere von Seidel mit aller Gründlichkeit untersucht ist, brauchen wir auf die Convergenzfrage in diesem Falle nicht einzugehen, sondern verweisen auf die §§ 2 bis 4 der genannten Abhandlung. Das Resultat ist dem unter 2a abgeleiteten ganz analog: Es convergiren die Näherungswerte gerader Ordnung in zunehmendem, die ungerader in ab-

nehmendem Sinne nach zwei Grenzen x' und x'', welche in dem Intervalle $0 < z < e$ unter sich zusammenfallen und daher die gesuchte Wurzel der Gleichung darstellen.

Als charakteristischer Unterschied zwischen den Fällen 1a, b und den Fällen 2a, b ist hervorzuheben, daß sich dort die x_i von einer Seite her, hier von beiden Seiten ihrem Grenzwerte nähern. Der Grund hiervon wird im Folgenden klar werden, wo wir uns zur Verallgemeinerung unseres Verfahrens wenden.

I. Es sei jetzt

$$f(x)\varphi(x) = y$$

die vorgelegte Gleichung. Wir setzen voraus, daß die Functionen f und φ sowie ihre inversen Functionen für alle im Folgenden vorkommenden Argumente in bestimmter und stetiger Weise definirt sind. Außerdem sollen sich beide Functionen mit x monoton ändern, u. zw. zunächst im entgegengesetzten Sinne.

Wir berechnen eine unendliche Reihe von Näherungswerten $x_1, x_2, x_3, \dots$ durch die folgenden Gleichungen

$$(14)\quad f(x_1) = y, \quad f(x_2)\varphi(x_1) = y, \quad f(x_3)\varphi(x_2) = y, \dots$$

und behaupten, daß für diese die Ungleichungen

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots \quad \text{oder} \quad x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

gelten, je nachdem, bei monoton zunehmendem f, $\varphi(x_1) > 1$ oder < 1 bez., bei monoton abnehmendem f, $\varphi(x_1) < 1$ oder > 1 ist.

Sei z. B. f die zunehmende, also φ die abnehmende Function und $\varphi(x_1) > 1$. Dann ist $\frac{y}{\varphi(x_1)} < y$, also nach den Gleichungen (14) $f(x_2) < f(x_1)$, mithin $x_2 < x_1$ und $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$. Hieraus folgt weiter $\frac{y}{\varphi(x_2)} < \frac{y}{\varphi(x_1)}$, also $f(x_3) < f(x_2)$ etc. In derselben Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit der vorstehenden Angaben in den übrigen Fällen.

Für die Convergenz ist nur noch erforderlich, daß man im Falle einer abnehmenden Reihe von Näherungswerten x_i eine untere, im Falle einer zunehmenden Reihe eine obere Grenze fixiren kann, welche die x_i nicht überschreiten. Dies läßt sich jedoch nur mit Hülfe speciellerer Voraussetzungen über f und φ erreichen. Daß die Grenze x, der sich im Falle der Convergenz die x_i nähern,

die vorgelegte Gleichung befriedigt, folgt aus der angenommenen Stetigkeit von f und φ.

Nehmen wir insbesondere $f = x$, $\varphi = \operatorname{Log} x$, so haben wir unser Beispiel 1a. Hier besteht wegen der Annahme $0 < y < \frac{1}{e}$ die Bedingung $\varphi(x_1) = \operatorname{Log} y > 1$, so daß die x_i eine abnehmende Reihe bilden mußten. Nehmen wir andrerseits $f = \operatorname{Log} x$, $\varphi = x$, so haben wir unser Beispiel 1b. In diesem Falle wird $\operatorname{Log} x_1 = y$ also $x_1 = e^{-y}$, was unter der früheren Voraussetzung $0 < y < \frac{1}{e}$ die Bedingung $\varphi(x_1) = x_1 < 1$ ergiebt. Da hier f mit x monoton abnimmt, so folgt nach unserem allgemeinen Kriterium, daß die x_i abermals eine beständig abnehmende Reihe bilden mußten.

Auf alle Fälle werden wir, wenn der eine Factor der linken Seite unserer Gleichung mit wachsendem x monoton wächst, der andere monoton abnimmt, und wenn überhaupt Convergenz stattfindet, auf einseitige Annäherung an den Grenzwert geführt.

II. Indem wir an den übrigen Voraussetzungen über f und φ festhalten, nehmen wir jetzt an, daß sich beide Functionen monoton im gleichen Sinne ändern u. zw. etwa beide mit wachsendem x zunehmen. Die Näherungswerte x_i berechnen wir wieder durch die Gleichungen (14) und behaupten, daß zwischen ihnen die folgenden Beziehungen bestehn:

$$x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_5 < x_3 < x_1, \text{ wenn } \varphi(x_1) > 1 \text{ und } \varphi(x_2) > 1;$$
$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots < x_6 < x_4 < x_2, \text{ wenn } \varphi(x_1) < 1 \text{ und } \varphi(x_2) < 1;$$
$$\cdots x_6 < x_4 < x_2 < x_1 < x_3 < x_5 < \cdots, \text{ wenn } \varphi(x_1) > 1 \text{ und } \varphi(x_2) < 1;$$
$$\cdots x_5 < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 < x_6 < \cdots, \text{ wenn } \varphi(x_1) < 1 \text{ und } \varphi(x_2) > 1.$$

Betrachten wir z. B. den ersten Fall, wo $\varphi(x_1) > 1$ und $\varphi(x_2) > 1$. Dann ist $\frac{y}{\varphi(x_1)} < y$ und $\frac{y}{\varphi(x_2)} < y$, also nach den Gleichungen (14) $f(x_2) < f(x_1)$ und $f(x_3) < f(x_1)$, d. h. $x_2 < x_1$ und $x_3 < x_1$. Andrerseits ist aber $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, also $\frac{y}{\varphi(x_2)} > \frac{y}{\varphi(x_1)}$ und nach den Gleichungen (14) $f(x_3) > f(x_2)$, d. h. $x_3 > x_2$. Weiter schließt man $\varphi(x_1) > \varphi(x_3) > \varphi(x_2)$ und hieraus vermöge der Gleichungen (14): $f(x_2) < f(x_4) < f(x_3)$ d. h. $x_2 < x_4 < x_3$ etc. In ähnlicher Weise erledigen sich die anderen Fälle.

Man ersieht nun sofort aus unseren Ungleichungen, daß in den beiden ersten Fällen die geraden und die ungeraden Näherungs-

werte nach zwei bestimmten Grenzen convergiren müssen und daß diese Grenzen unter Umständen zusammenfallen können, daß dagegen in den beiden letzten Fällen die Grenzen der geraden und der ungeraden Näherungswerte, wenn sie überhaupt existiren, sicher verschieden sind. In den Beispielen 2a und 2b lag der erste Fall vor. Wenn die Functionen f und φ beide monoton abnehmen, bleiben dieselben Ungleichungen bestehen, nur mit Vertauschung der Zeichen $>$ und $<$.

In jedem Falle ergiebt sich, daß, wenn sich die beiden Factoren der linken Seite unserer Gleichung mit wachsendem x in demselben Sinne monoton ändern und wenn unser Verfahren überhaupt convergirt, die Annäherung an den Wurzelwert eine doppelseitige ist.

Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Dezember 1898.

§ 1.

In meiner Abhandlung „Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers" [1]) habe ich die Theorie der quadratischen Reste innerhalb eines algebraischen Grundkörpers k vollständig für den Fall entwickelt, daß der Grundkörper k nebst seinen sämmtlichen conjugirten Körpern imaginär ist und überdies eine ungerade Klassenanzahl besitzt. Die wichtigsten der in der genannten Abhandlung aufgestellten Sätze sind das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste in k und der Satz, demzufolge in einem relativquadratischen Körper in Bezug auf k stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten sind. Ich habe in jener Abhandlung zu zeigen versucht welch ein Reichthum an arithmetischen Wahrheiten in diesen Sätzen enthalten ist; dennoch offenbart sich die volle Bedeutung der genannten Sätze erst, wenn wir ihre Gültigkeit auf beliebige algebraische Grundkörper k ausdehnen. In einem auf der Mathematiker-Vereinigung zu Braunschweig gehaltenen Vortrage [2]) habe ich einige kurze Bemerkungen über den Fall gemacht, daß der Grundkörper k reell ist, bez. reelle conjugirte Körper aufweist oder die Klassenanzahl 2 besitzt. In der gegenwärtigen Note beabsichtige ich, die wichtigsten Sätze aus der Theorie der quadra-

1) Math. Ann. Bd. 51 S. 1—127.

2) Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung VI 1897 S. 88—94.

tischen Reste innerhalb eines beliebigen Grundkörpers k in möglichst leicht faßlicher Weise darzustellen und zugleich auf die Abänderungen hinzuweisen, welche die Beweise in meiner zu Anfang genannten Abhandlung erfahren müssen, wenn man für den Grundkörper k die dort gemachten beschränkenden Annahmen beseitigen will.

§ 2.

Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heiße m und die $m-1$ zu k conjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k werde h genannt. Wir übertragen das bekannte Symbol aus der Theorie der rationalen Zahlen auf den hier zu behandelnden Fall, wie folgt: [1])

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: dann bedeute das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{p}$ congruent ist oder nicht. Ist ferner $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 primes Ideal in k und hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{w}$ Primideale in k sind und ist α eine zu $\mathfrak{a}$ prime ganze Zahl in k, so möge das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ durch die folgende Gleichung definirt werden:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right).$$

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige zu 2 prime Ideale in k und α eine zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ prime ganze Zahl in k, so gilt offenbar die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right).$$

Bezeichnet μ irgend eine ganze Zahl in k, die nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ist, so bestimmt $\sqrt{\mu}$ zusammen mit den Zahlen des Körpers k einen Körper vom Grade $2m$, welcher relativquadratisch in Bezug auf den Körper k ist und mit $K(\sqrt{\mu})$ oder auch kurz mit K bezeichnet werde. Sind in Bezug auf k mehrere relativquadratische Körper vorgelegt, so heißen dieselben *von einander unabhängig*, sobald keiner derselben als Unterkörper in demjenigen Körper enthalten ist, der aus den übrigen durch Zusammensetzung entsteht.

---

1) Vergl. meine Abhandlung „Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers", Definition 1 und 5.

Ein relativquadratischer Körper K heiße *unverzweigt* in Bezug auf k, wenn die Relativdiskriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das gleich dem Quadrat eines Primideals in K wird.

§ 3.

Wir machen zunächst über den zu Grunde gelegten Körper k solche zwei Annahmen, unter denen die Theorie des relativquadratischen Körpers bereits in meiner Abhandlung ausführlich entwickelt worden ist; es sind dies folgende Annahmen:

1. Der Körper k vom m^{ten} Grade sei nebst allen conjugirten Körpern $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ imaginär.
2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Wegen der späteren Ausführungen wiederholen wir hier die hauptsächlichsten in Frage kommenden Definitionen und Resultate in einer Fassung, die von der in meiner Abhandlung gegebenen Darstellung ein wenig abweicht.

Definition 1. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das für jede Einheit ξ in k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heiße ein *primäres Ideal*.

Definition 2. Eine solche zu 2 prime ganze Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt, heiße eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des ersten Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine primäre Zahl α, so daß $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine primäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein primäres Ideal.

Wir zerlegen nun die Zahl 2 im Körper k in Primideale wie folgt:

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z},$$

wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_z$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 in k und $l_1, l_2, \ldots l_z$ die Potenzexponenten bedeuten, zu denen bez. jene Primideale in der Zahl 2 aufgehen.

Definition 3. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Kör-

pers k, in Bezug auf das nicht nur für jede Einheit ξ in k, sondern auch für jede in 2 aufgehende ganze Zahl λ des Körpers k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heiße ein *hyperprimäres Ideal.*

Definition 4. Eine solche zu 2 prime Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\,\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_g^{2l_g+1}$ ausfällt, heiße eine *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des zweiten Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 2. Wenn $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine hyperprimäre Zahl α, so daß $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine hyperprimäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein hyperprimäres Ideal.

Der wesentliche Inhalt des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k lautet wie folgt:

Satz 3. Wenn ν, μ, ν', μ' irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k sind derart, daß die beiden Producte $\nu\nu'$ und $\mu\mu'$ primär ausfallen und ν zu μ, ν' zu μ' prim ist, so ist stets

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right).$$

Wenn die Klassenanzahl h des Körpers k nicht gleich 1, sondern eine beliebige ungerade Zahl ist, so wird nur eine geringfügige und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmende Abänderung im Ausdrucke der Sätze 1—3 nothwendig.

Satz 4. Jede Einheit in k, welche primär (eine primäre Zahl) ist, ist das Quadrat einer Einheit in k.

Satz 5. Es giebt in Bezug auf k keinen relativquadratischen unverzweigten Körper.

Die beiden letzten Sätze gelten unverändert für den Fall, daß die Klassenanzahl h des Körpers k eine beliebige ungerade Zahl ist.

§ 4.

Wir legen nunmehr für den Körper k folgende Annahmen zu Grunde:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (> 0) reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Bei diesen Annahmen wird die Definition 1 des primären Ideals unverändert beibehalten, dagegen wird es nöthig, den Begriff einer primären Zahl enger zu fassen.

Definition 5. Eine Zahl α des Körpers k heißt *total positiv in* k, falls die s zu α conjugirten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Wenn eine zu 2 prime Zahl α des Körpers k congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt und wenn außerdem α total positiv in k ist, so heiße α eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Bei Anwendung der so festgesetzten Bezeichnungsweise gilt der erste Ergänzungssatz 1 und das allgemeine Reciprocitätsgesetz 3 wiederum genau in der früheren Fassung und, wenn man in entsprechender Weise den Begriff der hyperprimären Zahl enger faßt, so bleibt auch der zweite Ergänzungssatz 2 in der früheren Fassung gültig.

§ 5.

Wir erörtern ferner die Frage, ob es unter den in § 4 für den Körper k zu Grunde gelegten Annahmen relativquadratische unverzweigte Körper in Bezug auf k giebt. Zu dem Zwecke setzen wir zunächst allgemein fest, daß, wenn ε irgend eine Einheit in k bedeutet, stets $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ die zu ε conjugirten bez. in k', $k'', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Einheiten bezeichnen sollen.

Nunmehr nehmen wir $\varepsilon_1 = -1$: wie die Einheit ε_1 fallen offenbar alle zu ε_1 conjugirten Einheiten negativ aus. Ferner möge es in k eine Einheit ε_2 geben, welche in k positiv ist, während mindestens eine der conjugirten Einheiten $\varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_2^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k' gelegene Einheit ε_2' negativ. Sodann möge es in k eine Einheit ε_3 geben, welche positiv ist und für welche auch ε_3' positiv wird, während mindestens eine der conjugirten Einheiten $\varepsilon_3'', \varepsilon_3''', \ldots, \varepsilon_3^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k'' gelegene Einheit ε_3'' negativ. In dieser Weise fahren wir fort; wir mögen schließlich eine Einheit ε_p $(p \leqq s)$ erhalten von der Beschaffenheit, daß $\varepsilon_p, \varepsilon_p', \varepsilon_p'', \ldots, \varepsilon_p^{(p-2)}$ sämmtlich positiv sind, dagegen $\varepsilon_p^{(p-1)}$ negativ ausfällt und nun soll das eingeschlagene Verfahren sein Ende erreicht haben, d. h. wenn irgend eine Einheit ε in k nebst ihren $p-1$ conjugirten Einheiten ε', $\varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(p-1)}$ positiv ausfällt, so sei nunmehr auch stets jede der übrigen $s-p$ conjugirten Einheiten $\varepsilon^{(p)}, \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ positiv.

Die Zahl $s-p$ erhält eine besonders einfache Bedeutung, wenn wir dem Aequivalenz- und Klassenbegriff eine engere Fassung er-

theilen, als bisher geschehen ist. Wir wollen nämlich fortan zwei Ideale $\mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ des Körpers k nur dann als aequivalent bezeichnen, wenn $\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{k}} = \alpha$ gesetzt werden kann, so daß α eine ganze oder gebrochene Zahl in k ist, die selbst nebst den sämmtlichen bez. in $k', k'', \ldots k^{(s-1)}$ gelegenen zu α conjugirten Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(s-1)}$ positiv ausfällt, d. h., die total positiv in k ist. Rechnen wir alle solchen Ideale des Körpers k, die in diesem engeren Sinne untereinander aequivalent sind, zu einer Klasse, so besitzt der Körper k, wie leicht ersichtlich ist, genau $\bar{h} = 2^{s-p}$ Idealklassen.

Nach diesen Vorbereitungen findet die oben aufgeworfene Frage nach den unverzweigten Körpern in Bezug auf k in folgender Weise ihre Beantwortung:

Satz 6. Für den Körper k giebt es ein System von $s-p$ unabhängigen relativquadratischen unverzweigten Körpern in Bezug auf k. Durch Zusammensetzung dieser $s-p$ Körper entsteht ein Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h} = 2^{s-p}$ in Bezug auf k, der sämmtliche unverzweigten Körper in Bezug auf k als Unterkörper enthält und der *Klassenkörper* von k heißen möge. Die Anzahl $\bar{H}$ der Idealklassen dieses Körpers Kk ist, auch wenn wir den Klassenbegriff in der vorhin (für k) angegebenen engeren Fassung nehmen, stets eine ungerade Zahl.

Eine der merkwürdigsten Eigenschaften des Klassenkörpers Kk besteht darin, daß die Primideale des Körpers k, welche einer und der nämlichen Idealklasse von k im engeren Sinne angehren, im Klassenkörper Kk stets die nämliche Zerlegung in Primideale dieses Körpers Kk erfahren d. h. so daß die Anzahl der verschiedenen Primideale und ihre Grade die gleichen sind; die Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper Kk hängt somit nur von der Klasse ab, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

§ 6.

Um die genannten Thatsachen zu beweisen und unter den in § 4 gemachten Annahmen die Theorie des relativquadratischen Körpers in Bezug auf k vollständig aufzubauen, bedürfen wir eines Symbols, welches ich bereits in meinem in Braunschweig gehaltenen Vortrage erklärt habe.

Definition 6. Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k, nur daß μ nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ausfällt; wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ congruent ist und wenn außerdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets

eine solche ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, daß $\nu \equiv N(A)$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so setze ich

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1;$$

in jedem anderen Falle dagegen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = -1.$$

Fällt μ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl $\neq 0$ in k aus, so werde stets

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gesetzt. Ferner definiren wir noch die s Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right), \left(\frac{\nu, \mu}{1'}\right), \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(s-1)}}\right);$$

wir setzen stets

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right) = +1,$$

wenn wenigstens eine der beiden Zahlem ν, μ positiv ausfällt; dagegen setzen wir

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right) = -1,$$

wenn jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ausfällt. Ferner bezeichnen wir allgemein die in $k^{(i)}$ gelegenen zu ν, μ conjugirten Zahlen bez. mit $\nu^{(i)}, \mu^{(i)}$ und setzen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1'}\right) = \left(\frac{\nu', \mu'}{1}\right), \left(\frac{\nu, \mu}{1''}\right) = \left(\frac{\nu'', \mu''}{1}\right), \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(s-1)}}\right) = \left(\frac{\nu^{(s-1)}, \mu^{(s-1)}}{1}\right).$$

Ist nun ein bestimmter relativquadratischer Körper $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k vorgelegt, so wird eine naturgemäße Definition des Geschlechtsbegriffes aus der Definition 12 meiner Abhandlung gewonnen, wenn man sich des verallgemeinerten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ bedient, wo ω die in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale und überdies diejenigen Zeichen $1^{(i)}$ durchläuft, wofür die in $k^{(i)}$ gelegene zu μ conjugirte Zahl $\mu^{(i)}$ negativ ausfällt. Es gelingt dann ohne erhebliche Schwierigkeit die ganze in meiner Abhandlung entwickelte Theorie der relativquadratischen Körper

auf den hier in Rede stehenden Fall, daß der Körper k die in § 4 gemachten Annahmen erfüllt, auszudehnen.

Das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Körper k erhält mit Benutzung des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\omega}\right)$ die folgende einfache Fassung:

Satz 7. Wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k sind, so ist stets

$$\prod_{(\omega)} \left(\frac{\nu,\mu}{\omega}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche Primideale $\omega = \mathfrak{w}$ in k und über die s Zeichen $\omega = 1, 1', 1'', \ldots, 1^{(s-1)}$ erstreckt werden soll.

Auch die Sätze 41, 64, 65, 67 in meiner Abhandlung lassen sich mit Hülfe des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\omega}\right)$ unmittelbar auf den Fall des hier betrachteten Grundkörpers k übertragen.

Wenn die in ursprünglichem Sinne verstandene Klassenzahl h des Körpers k nicht 1, sondern irgend eine ungerade Zahl ist, so bedürfen die Sätze in § 4 — § 6 nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 7.

Wenn für den Körper k insbesondere $s-p = 0$ ausfällt, so wird $\bar{h} = 1$ und Satz 6 lehrt dann, daß es keinen unverzweigten Körper in Bezug auf k giebt. Wir wollen den nächst einfachen Fall $s-p = 1$, $\bar{h} = 2$ betrachten und vor Allem die am Schluß von § 5 angedeuteten Gesetze der Zerlegung der Primideale in k näher erörtern. Es mögen daher fortan für den Grundkörper k folgende speziellere Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (>0) reelle Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne verstanden, sei gleich 1; die Anzahl $\bar{h}$ der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der in § 5 erwähnte Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 8a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf h die Relativdiskriminante 1; d. h. er ist unverzweigt in Bezug auf k.

Satz 8b. Die Klassenanzahl $\bar{H}$ des Klassenkörpers Kk, in engerem Sinne verstanden, ist ungerade.

Satz 8c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale im engeren Sinne sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale im engeren Sinne sind, bleiben in Kk Primideale.

Von diesen drei Eigenschaften 8a, 8b, 8c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Köper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk.

Zum Beweise der Existenz des Klassenkörpers Kk ist es erforderlich zu zeigen, daß es unter den hier gemachten Annahmen stets eine Einheit ε in k giebt, die primär ist, d. h. congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach dem Modul 2^2 ausfällt und die nebst ihren conjugirten Einheiten $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ positive Werthe aufweist, ohne daß sie das Quadrat einer Einheit in k wird. Der verlangte Klassenkörper Kk ist dann der Körper $K(\sqrt{\varepsilon})$. Der Beweis für die Existenz einer solchen Einheit ε läßt sich durch eine ähnliche Schlußweise führen, wie sie im § 10 beim Beweise der Sätze 12a, 12b, 12c angewandt werden wird. An Stelle des Satzes 4 gilt unter den gegenwärtigen Annahmen vielmehr die folgende Thatsache:

Satz 9. Im Körper k giebt es stets eine primäre Einheit ε, welche nicht das Quadrat einer Einheit in k ist. Jede Einheit in k von der gleichen Beschaffenheit ist das Produkt dieser Einheit ε in das Quadrat einer Einheit in k.

§ 8.

Es sei endlich k ein völlig beliebiger Zahlkörper. Wir treffen folgende Festsetzungen, in denen keine beschränkende Annahme für k liegt:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei eine beliebige Zahl $\bar{h}$.

Ein in Bezug auf k relativ-Abel'scher Körper K heiße unverzweigt, wenn die Relativdiskriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt, oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das durch das Quadrat eines Primideals in K theilbar wird. Wir stellen zunächst folgende Theoreme auf:

Satz 10. Es giebt in Bezug auf k stets einen völlig bestimmten relativ-Abel'schen unverzweigten Körper Kk vom Relativgrade h; dieser Körper Kk heiße

der Klassenkörper von k. Der Klassenkörper Kk enthält sämmtliche in Bezug auf k relativ-Abel'schen unverzweigten Körper als Unterkörper.

Die Relativgruppe des Klassenkörpers Kk ist mit derjenigen Abel'schen Gruppe holoedrisch isomorph, die durch die Zusammensetzung der Idealklassen in k bestimmt wird[1]).

Diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k, welche der nämlichen Idealklasse von k, im engeren Sinne verstanden, angehören, erfahren im Klassenkörper Kk eine Zerlegung in Primideale der nämlichen Anzahl und der nämlichen Grade, so daß die weitere Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K nur von der Klasse abhängt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

Definition 7. Eine ganze Zahl A des Klassenkörpers Kk heiße eine Ambige dieses Körpers Kk, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die ganze Zahl A sei total positiv (Vgl. Definition 5); d. h. das durch A dargestellte Ideal gehöre auch im engeren Sinne der Hauptklasse in Kk an.

b) Jede zu A relativconjugirte Zahl soll sich von A nur um einen Factor unterscheiden, welcher eine Einheit in Kk ist.

Eine Ambige heiße eine Primambige, wenn sie nicht eine Einheit ist und sich nicht als ein Product von zwei Ambigen darstellen läßt, von denen keine eine Einheit ist.

Satz 11. Jede Ambige des Klassenkörpers Kk stellt ein Ideal des Grundkörpers k dar und umgekehrt jedes Ideal des Grundkörpers k läßt sich durch eine Ambige des Klassenkörpers Kk darstellen; diese ist abgesehen von einem Einheitsfactor durch jenes Ideal bestimmt.

Jede Ambige des Klassenkörpers Kk ist mithin auf eine und nur auf eine Weise in ein Product von Primambigen zerlegbar, wenn man dabei von der Willkür der auftretenden Einheitsfactoren absieht.

Die in diesem Satze aufgestellte Eigenschaft

---

1) Man vergleiche hierzu die Untersuchungen von H. Weber, Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern, Mathematische Annalen Bd. 48 S. 433 und Bd. 49 S. 83.

kommt unter allen relativ-Abel'schen Körpern in Bezug auf k allein dem Klassenkörper Kk zu.

Das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste drückt sich auch in dem beliebigen Körper k durch die Formel des Satzes 7 aus. Auch das Reciprocitätsgesetz für höhere Potenzreste gestattet eine ebenso einfache und allgemeingültige Fassung [1]).

Endlich sei noch bemerkt, daß die gehörige Verallgemeinerung dieser Entwickelungen zur Begründung einer Theorie der „Ringklassenkörper" führt, d. h. solcher relativ-Abel'scher Körper in Bezug auf k, die zu den Idealklassen eines Ringes in k in einem entsprechenden engen Zusammenhange stehen, wie der hier behandelte Klassenkörper Kk zu den gewöhnlichen Idealklassen des Körpers k.

§ 9.

Im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung wollen wir für einige besondere Fälle die angedeuteten Gesetze der Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Klassenkörper Kk genau erörtern und die Beweise der aufgestellten Behauptungen erbringen. Es mögen in diesem Paragraphen für den Grundkörper k folgende specielle Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne, stimme mit der im engeren Sinne verstandenen Klassenanzahl $\bar{h}$ überein und sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 12a. Der Klassenkörper Kk ist unverzweigt in Bezug auf k, d. h. er hat die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k.

Satz 12b. Die Klassenanzahlen H und $\bar{H}$ des Klassenkörpers Kk, im weiteren sowie im engeren Sinne verstanden, sind ungerade ($H = \bar{H}$).

Satz 12c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in Kk Primideale; sie werden jedoch in Kk Hauptideale.

---

1) Vgl. die Preisaufgabe der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen für das Jahr 1901. Math. Ann. Bd. 51, S. 159.

Von diesen drei Eigenschaften 12a, 12b, 12c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit die Sätze:

Satz 13a. Es giebt außer Kk keinen anderen relativquadratischen Körper, der in Bezug auf k unverzweigt ist.

Satz 13b. Wenn ein zu k relativquadratischer Körper eine ungerade Klassenanzahl hat, so stimmt derselbe mit dem Klassenkörper Kk überein.

Satz 13c. Wenn alle Primideale in k, die in k Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper zerfallen, oder wenn alle Primideale in k, die in k nicht Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper Primideale bleiben, so folgt jedesmal, daß dieser relativquadratische Körper kein anderer als der Klassenkörper Kk ist.

§ 10.

Um die Existenz des Klassenkörpers Kk und sodann die Sätze 12a, 12b, 12c zu beweisen, machen wir der Kürze halber die Annahme, daß der Grundkörper k und seine sämmtlichen conjugirten Körper imaginär sind und nennen dann wie in § 3 eine ganze Zahl in k primär, wenn sie zu 2 prim ist und dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent ausfällt.

Wir bestimmen jetzt ein System von Grundeinheiten in k und bezeichnen dieselben mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$; ferner sei $\mathfrak{r}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und es werde $\mathfrak{r}^2 = (\varrho)$ gesetzt, wo ϱ eine gewisse ganze Zahl in k bedeutet. Fügen wir sodann den obigen $\frac{m}{2}-1$ Einheiten noch folgende Zahlen hinzu

$$\varepsilon_{\frac{m}{2}} = -1, \qquad \varepsilon_{\frac{m}{2}+1} = \varrho,$$

so bilden die $\frac{m}{2}+1$ Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ ein System von Zahlen dieser Beschaffenheit: jede ganze Zahl ξ in k, welche das Quadrat eines Ideals in k ist, läßt sich in der Gestalt

$$\xi = \varepsilon_1^{x_1} \varepsilon_2^{x_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{x_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2$$

darstellen, wo die Exponenten $x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und α eine ganze oder gebrochene Zahl in k bedeutet.

Endlich bestimmen wir mit Hinblick auf Satz 18 meiner Abhandlung ein System von Primidealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in k, die zu 2 prim sind, so daß

$$(1) \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1, \qquad (i \neq j)$$
$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1\right)$$

ausfällt und zu diesen solche Exponenten $w_1, \ldots, w_{\frac{m}{2}+1}$ mit Werthen 0, 1, daß die Producte

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1}, \mathfrak{q}_2 \mathfrak{r}^{w_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}}$$

Hauptideale in k werden; es sei etwa

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1} = (\varkappa_1), \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}} = (\varkappa_{\frac{m}{2}+1}),$$

wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse ganze Zahlen in k sind.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir den Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}};$$

derselbe stellt, wenn man rechter Hand für die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ beliebige Werthe 0, 1 und für die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ irgend welche der Congruenzbedingung

$$(3) \qquad v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_{\frac{m}{2}+1} w_{\frac{m}{2}+1} \equiv 0, \qquad (2)$$

genügende Werthe 0, 1 nimmt, im Ganzen 2^{m+1} Zahlen dar. Rechnet man jetzt allgemein zwei ganze zu 2 prime Zahlen ω_1, ω_2 in k zu derselben Art, wenn ihr Product $\omega_1 \omega_2$ eine primäre Zahl ist, so lehrt die Betrachtung am Schlusse von § 21 meiner Abhandlung, daß es im Körper k genau 2^m verschiedene Arten von Zahlen giebt und es müssen also unter den Zahlen von der Gestalt (2) nothwendig wenigstens zwei Zahlen vorhanden sein, die derselben Art angehören. Das Product zweier solcher Zahlen ist eine primäre Zahl von der Gestalt

$$(4) \qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2,$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe 0,1 haben oder nicht sämmtlich gleich 0 sind und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wenn in dem Ausdrucke (4) für die Zahl ω die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich sich gleich 0 heraustellten, so wäre nach Satz 4 und 5 meiner Abhandlung der Körper $K(\sqrt{\omega})$ ein in Bezug auf k unverzweigter relativquadratischer Körper und somit der verlangte Beweis für die Existens des Klassenkörpers mit der Eigenschaft 12a erbracht.

Wir nehmen nun im Gegentheil an, es habe wenigstens einer der Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ den Werth 1 und zwar sei t deren genaue Anzahl; es sei etwa $v_{i_1} = 1, v_{i_2} = 1, \ldots, v_{i_t} = 1$, wo die Indices $i_1, i_2, \ldots, i_t$ gewisse t Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1$ bedeuten. Bei dieser Annahme müssen die t Primideale $\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \ldots \mathfrak{q}_{i_t}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ aufgehen; wegen der Bedingung (3) und da ω primär ist, folgt ferner, daß es außer diesen t Primidealen kein weiteres giebt, welches in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\omega})$ enthalten wäre. Die genannten t Primideale des Körpers k werden bez. die Quadrate gewisser t ambiger Primideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$, und die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ fällt daher genau gleich 2^t aus. Auch die weiteren Bezeichnungen des Satzes 22 in § 15 meiner Abhandlung benutzen wir: es möge der Körper k genau 2^{v^*} Einheitenverbände besitzen, die aus Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, und es sei 2^{a^*} die Anzahl der ambigen Klassen, in denen ambige Ideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten sind.

Was das Verhalten der Ideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt{\omega})$ betrifft, so sind hier die folgenden zwei Fälle möglich:

I. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale.

II. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden auch in $K(\sqrt{\omega})$ nicht Hauptideale.

Indem wir das Verfahren, welches ich in meiner Abhandlung beim Beweise des Satzes 22 angewendet habe, auf den Körper $K(\sqrt{\omega})$ übertragen, finden wir leicht im Falle I die Gleichung

$$(5) \qquad a^* = t + v^* - \frac{m}{2}$$

und im Falle II die Gleichung

$$(6) \qquad a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1.$$

§ 11.

Wir wollen ferner für die Zahl v^* eine obere von t und m abhängige Grenze ableiten. Zu dem Zweck mögen $x_1, \ldots, x_{\frac{m}{2}}$ irgend welche Exponenten 0,1 bedeuten; soll dann die Einheit

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{x_{\frac{m}{2}}}$$

die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ sein, so müssen nothwendig die t Bedingungen

$$(7) \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = +1$$

erfüllt sein.

Wir stellen nun der Reihe nach folgende Hülfssätze auf, welche für beide Fälle I, II gelten:

Hülfssatz 1. Jede Einheit ε des Körpers k, die den Bedingungen (7) genügt, ist nothwendig die Relativnorm einer Einheit des Relativkörpers $K(\sqrt{\omega})$.

Zum Beweise dieses Hülfssatzes unterscheiden wir, ob unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ vorkommt oder nicht. Im ersteren Falle sei $i_t = \frac{m}{2}+1$. Wir schließen dann aus (7) mit mit Rücksicht auf (1), daß gewiß die Gleichungen

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_{t-1}} = 0$$

bestehen müssen, und hieraus entnehmen wir, daß die Anzahl v^* der voneinander unabhängigen Einheitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, höchstens gleich $\frac{m}{2} - t + 1$ ist.

Kommt andererseits unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ nicht vor, so schließen wir auf die nämliche Weise

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_t} = 0$$

und mithin ist die Anzahl v^* der von einander unabhängigen Ein-

heitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, in diesem Falle höchstens gleich $\frac{m}{2}-t$.

Wir erkennen leicht, daß im Falle I unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ nicht vorkommen kann. Wäre nämlich im Gegentheil das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten und bezeichnet P die ganze Zahl in $K(\sqrt{\omega})$, welche das Ideal $\mathfrak{r}$ darstellt, so muß die Relativnorm dieser Zahl P gleich einer Zahl in k von der Gestalt $\varepsilon\varrho$ werden, wo ε eine Einheit in k bezeichnet und $\varrho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat. Die hieraus folgende Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\varrho}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right)$$

steht im Widerspruch mit der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Die bisherigen Ueberlegungen führen im Falle I zu der Ungleichung

$$(8) \qquad v^* \leqq \frac{m}{2} - t$$

und im Falle II zu der Ungleichung

$$(9) \qquad v^* \leqq \frac{m}{2} - t + 1.$$

Die Gleichungen (5), (6) und die Ungleichungen (8), (9) zeigen, daß in beiden Fällen I und II die Ungleichung $a^* \leqq 0$ gilt und da gewiß auch $a^* \geqq 0$ sein muß, so folgt nothwendig $a^* = 0$, d. h. es ist im Falle I

$$(10) \qquad v^* = \frac{m}{2} - t$$

und im Falle II

$$(11) \qquad v^* = \frac{m}{2} - t + 1.$$

Nunmehr können wir auch einsehen, daß im Falle II das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ vorkommen muß. Wäre nämlich im Gegentheil die Zahl $\frac{m}{2}+1$

unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ nicht enthalten, so müßte, wie die vorhin angestellte Ueberlegung zeigt, die Ungleichung (8) gelten, was der Gleichung (11) widerspricht.

Wir sehen mit Rücksicht hierauf, daß die Einheiten ε in k, welche den Bedingungen (7) genügen, im Falle I genau $\frac{m}{2} - t$ und im Falle II genau $\frac{m}{2} - t + 1$ voneinander unabhängige Einheitenverbände ausmachen. Da diese Zahl wegen (10), (11) in beiden Fällen I, II gleich v^* ausfällt, so liefern jene Einheiten ε im ganzen 2^{v^*} Einheitenverbände; dieselben müssen daher mit denjenigen Einheitenverbänden übereinstimmen, deren Einheiten Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ sind, d. h. in beiden Fällen I, II ist jede Einheit ε in k, die den Bedingungen (7) genügt, nothwendig die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ und damit ist Hülfssatz 1 bewiesen.

Hülfssatz 2. Wenn $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, dessen Quadrat einem Ideal in k aequivalent ausfällt, so ist auch $\mathfrak{J}$ stets einem Ideal in k aequivalent.

Beim Beweise verstehen wir unter S die Relativsubstitution $(\sqrt{\omega} : -\sqrt{\omega})$ und unter N die Relativnorm einer Zahl oder eines Ideals in $K(\sqrt{\omega})$. Da die Relativnorm des Ideals $\mathfrak{J}$

$$N(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J} . S\mathfrak{J}$$

jedenfals ein Ideal in k ist und nach Voraussetzung $\mathfrak{J}^2$ einem Ideal in k aequivalent sein soll, so folgt, daß auch der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k aequivalent sein muß.

Im Falle I ist $\mathfrak{j}$ gewiß in $K(\sqrt{\omega})$ ein Hauptideal. Wir beweisen andererseits, daß im Falle II das Ideal $\mathfrak{j}$ im Körper k Hauptideal ist. Wäre nämlich $\mathfrak{j}$ in k nicht Hauptideal, so wäre $\mathfrak{j}\mathfrak{r} \sim 1$, wo $\mathfrak{r}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat; setzen wir dann

$$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}\mathfrak{r} = A,$$

wo A eine gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so folgt offenbar, indem wir auf beiden Seiten die Relativnorm bilden,

$$\varepsilon\varrho = N(A), \tag{12}$$

wo ε eine Einheit und $\varrho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher bestimmte Zahl in k bezeichnet. Da das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ im Falle II in der Relativdis-

kriminante von $K(\sqrt{\omega})$ vorkommt, so erhalten wir wegen (12) die Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\,\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = +1,$$

und diese widerspricht der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Wir haben somit erkannt, daß in beiden Fällen I, II der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ in $K(\sqrt{\omega})$ aequivalent 1 ausfällt; wir setzen demgemäß

(13) $$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}} = A,$$

wo A eine ganze oder gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Bilden wir dann die Relativnorm

(14) $$\varepsilon = N(A),$$

so ist ε eine Einheit in k, die den Bedingungen (7) genügen muß und diese Einheit ε wird daher nach dem oben bewiesenen Hülfssatz 1 gleich der Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$; wir setzen

(15) $$\varepsilon = N(E^{-1}),$$

wo E eine Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Aus (14) und (15) folgt

(16) $$N(AE) = 1.$$

Setzen wir

$$B = 1 + S(AE),$$

(bez. $B = 1$, wenn etwa $AE = -1$ ist), so wird wegen (16)

$$\frac{SB}{B} = EA \text{ (bez. } = 1),$$

und hieraus entnehmen wir mit Rücksicht auf (13) die Gleichung für Ideale

$$\frac{S(B\mathfrak{J})}{B\mathfrak{J}} = 1,$$

d. h. $B\mathfrak{J}$ ist das Product eines ambigen Ideals des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ in ein Ideal des Körpers k. Da nun für beide Fälle I, II früher die Gleichung $a^* = 0$ bewiesen worden ist und folglich alle ambigen Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale sind, so folgt, daß auch das Ideal $\mathfrak{J}$ einem Ideal des Körpers k aequivalent sein muß. Hiermit ist der Beweis für den Hülfssatz 2 erbracht.

Hülfssatz 3. Wenn $\mathfrak{J}$ irgend ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so giebt es stets einen ungeraden Exponenten u, so daß $\mathfrak{J}^u$ einem Ideal in k aequivalent ist.

In der That, ist H die Klassenanzahl des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ und setzen wir $H = 2^a u$, wo a einen gewissen Exponenten und u eine ungerade Zahl bedeutet, so folgt, daß $\mathfrak{J}^{2^a u} \sim 1$ sein muß und hieraus schließen wir mit Rücksicht auf Hülfssatz 2 der Reihe nach, daß die Ideale $\mathfrak{J}^{2^{a-1}u}, \mathfrak{J}^{2^{a-2}u}, \ldots, \mathfrak{J}^{2u}, \mathfrak{J}^u$ gewissen Idealen in k aequivalent ausfallen.

Hülfssatz 4. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k bedeutet, für welches

$$(17) \qquad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ausfällt, so ist $\mathfrak{p}$ stets im Körper k ein Hauptideal.

Zum Beweise bedenken wir, daß wegen der Voraussetzung (17) das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ zerlegbar sein muß; wir setzen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P},$$

wo $\mathfrak{P}, S\mathfrak{P}$ zu einander relativconjugirte Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ sind und verstehen dann mit Rücksicht auf Hülfssatz 3 unter u einen solchen ungeraden Potenzexponenten, daß $\mathfrak{P}^u$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k aequivalent wird. Hieraus folgt offenbar

$$\mathfrak{p}^u \sim \mathfrak{j}^2 \sim 1, \text{ d. h. } \mathfrak{p} \sim 1.$$

§ 12.

Der gewünschte Nachweis für die Existenz der Klassenkörper mit den Eigenschaften 12a, 12b, 12c gelingt mittelst der folgenden Schlüsse. Wir wählen an Stelle der in § 10 bestimmten den Bedingungen (1) genügenden Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ irgend $\frac{m}{2}+1$ andere zu 2 prime Primideale $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ mit den entsprechenden Eigenschaften

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}'_i}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}'_i}\right) = +1, \qquad (i \neq j)$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1\right)$$

und wählen wiederum die Exponenten $w'_1, \ldots, w'_{\frac{m}{2}+1}$ in geeigneter Weise so, dass

$$\mathfrak{q}'_1\,\mathfrak{r}^{w'_1} = (\varkappa'_1), \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}\,\mathfrak{r}^{w'_{\frac{m}{2}+1}} = \left(\varkappa'_{\frac{m}{2}+1}\right)$$

und darin $\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\frac{m}{2}+1}$ ganze Zahlen in k sind; sodann denken wir uns die sämmtlichen Schlußfolgerungen in § 10 — § 11 für das neue System von Primidealen $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ wiederholt. Auf diese Weise gelangen wir zu einem Ausdruck

$$\omega' = \varepsilon'\,\varkappa_1'^{\,v'_1} \ldots \varkappa'^{\,v'_{\frac{m}{2}+1}}_{\frac{m}{2}+1}, \tag{18}$$

in dem ε' eine gewisse Einheit in k und $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Exponenten 0,1 bedeuten; falls wir wie vorhin annehmen, daß diese Exponenten $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ nicht sämmtlich gleich 0 ausfallen, folgern wir wiederum für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ die Gültigkeit der Hülfssätze 1—4, und entsprechend dem Hülfssatz 4 ist mithin jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k, für welches

$$\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ausfällt, stets nothwendig ein Hauptideal des Körpers k.

Wir bezeichnen nun kurz mit $\mathfrak{w}_\omega$ alle diejenigen Primideale in k, für welche

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_\omega}\right) = +1$$

ist, und mit $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ diejenigen Primideale in k für welche zugleich

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = -1 \text{ und } \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = +1$$

ausfällt, ferner mit $\mathfrak{w}^{(+)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche Hauptideale in k sind, dagegen mit $\mathfrak{w}^{(-)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche nicht Hauptideale in k sind.

Da die Zahlen ω, ω' sicher nicht Quadrate von ganzen Zahlen in k sind und bei unseren Annahmen wegen der Verschiedenheit der Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}, \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ das Nämliche auch für das Produkt $\omega\,\omega'$ gilt, so folgen aus Satz 17 meiner Abhandlung die Gleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(\mathfrak{w}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{s-1} + f_\omega(s), & (s>1) \\ \displaystyle\sum_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} = \frac{1}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_{\omega\omega'}(s), & (s>1); \end{cases}$$

hier sind die unendlichen Summen über alle Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ bez. $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ zu erstrecken und $f_\omega(s)$, $f_{\omega\omega'}(s)$ bedeuten Functionen der reellen Veränderlichen s, welche stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn s sich dem Werthe 1 nähert; n bezeichnet stets die Norm im Körper k.

Die Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ sind offenbar sämmtlich von den Primidealen $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ verschieden und da nach dem vorhin Bewiesenen die Primideale $\mathfrak{w}_\omega, \mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ sämmtlich unter den Primidealen $\mathfrak{w}^{(+)}$ vorkommen so haben wir

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \sum_{(\mathfrak{w}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} \qquad (s>1)$$

und folglich wegen (19)

$$(20) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \frac{3}{4} \log \frac{1}{s-1} + f_\omega(s) + f_{\omega\omega'}(s);$$

hier sind die unendlichen Summen wiederum über alle Primidiale mit den betreffenden Eigenschaften zu erstrecken.

Die Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}, \mathfrak{w}^{(-)}$ erschöpfen offenbar die sämmtlichen Primideale $\mathfrak{w}$ in k, und es ist daher

$$(21) \quad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s),$$

wo die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{w})}$ über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll und $f(s)$ wiederum eine für Werte $s>1$, die sich dem Werte 1 nähern, zwischen endlichen Grenzen bleibende Größe bezeichnet. Aus (20) und (21) zusammen folgt die Ungleichung

$$(22) \quad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \geqq \frac{1}{2} \log \frac{1}{s-1} + 2 f_\omega(s) + 2 f_{\omega\omega'}(s) - f(s).$$

Nunmehr stellen wir folgenden Hülfssatz über die Ideale des Körpers k auf:

Hülfssatz 5. Wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s}, \qquad (s>1)$$

die erste Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}$ und die zweite Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(-)}$ erstreckt wird, so stellt dieselbe eine solche Function der reellen Veränderlichen s dar, welche stets unterhalb einer positiven endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Der Beweis dieses Satzes wird durch die nämliche Schluß-

weise geführt, wie sie beim Beweise des Satzes 31 in meiner Abhandlung angewandt worden ist.

Wir erkennen, daß die Ungleichung (22) unmittelbar einen Widerspruch gegen den Hülfssatz 5 enthält, und mithin ist unsere ursprüngliche Annahme zu verwerfen, d. h. es müssen in der Gleichung (4) die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ oder das zweite Mal in der entsprechenden Gleichung (18) die Exponenten $v'_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich 0 sein; in der Zahl ω bez. ω' haben wir also eine Zahl des Körpers k, welche als Ideal das Quadrat eines Ideals in k darstellt, die überdies congruent dem Quadrat einer Zahl in k nach dem Modul 2^2 wird und doch nicht das Quadrat einer Zahl in k ist.

Der Körper $K(\sqrt{\omega})$ bez. $K(\sqrt{\omega'})$ ist der gesuchte Klassenkörper Kk zum Grundkörper k, da er die in Satz 12a ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Damit ist die schwierigste Aufgabe in der hier erörterten Theorie gelöst.

§ 13.

Der Beweis für den Satz 12b sowie für die zweite Aussage des Satzes 12c ist aus den bisherigen Entwickelungen leicht zu entnehmen. Nicht so einfach gelingt der Nachweis für die erste Aussage des Satzes 12c, wonach jedes Primideal des Körpers k, das in k der Hauptklasse angehört, im Klassenkörper Kk, der jetzt $K(\sqrt{\omega})$ ist, weiter verlegbar sein muß. Wir führen diesen Nachweis in folgender Weise:

Nach dem in § 12 Bewiesenen ist die Zahl ω von der Gestalt (4):

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}},$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe 0,1 haben, aber nicht sämmtlich gleich 0 sind: es sei etwa $u_i = 1$; dann bezeichnen wir die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ bez. mit $\varepsilon^*_1, \ldots, \varepsilon^*_{\frac{m}{2}}$ und bestimmen $\frac{m}{2}$ von $\mathfrak{r}$ verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ in k derart, daß

$$\left(\frac{\varepsilon^*_h}{\mathfrak{p}_h}\right) = -1, \left(\frac{\varepsilon^*_h}{\mathfrak{p}_k}\right) = +1, \qquad (h \neq k)$$

$$\left(h, k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_h}\right) = +1, \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right) \tag{23}$$

wird. Wegen (23) sind nach der zweiten Aussage des Satzes 12c

diese Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich Hauptideale in k; wir setzen

$$\mathfrak{p}_1 = (\pi_1), \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}} = (\pi_{\frac{m}{2}}),$$

wo $\pi_1, \ldots, \pi_{\frac{m}{2}}$ ganze Zahlen in k bedeuten. Nunmehr wollen wir zeigen, daß ein Ausdruck von der Gestalt

$$\omega^* = \varepsilon_1^{*u_1^*} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{*u_{\frac{m}{2}}^*} \pi_1^{v_1} \ldots \pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}, \tag{24}$$

$$(u_1^*, \ldots, u_{\frac{m}{2}}^*, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}} = 0,1)$$

nur dann eine primäre Zahl in k darstellen kann, wenn die Exponenten $u_1^*, \ldots, u_{\frac{m}{2}}^*, v_1, \ldots v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich den Werth 0 haben. In der That, wäre ω^* primär und wenigstens einer dieser Exponenten gleich 1, so beweisen wir wie oben durch Hülfssatz 4, daß alle Primideale in k, welche in $K(\sqrt{\omega^*})$ zerlegbar werden, in k Hauptideale sind, d. h. es müßten dann alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach welchen ω^* quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sein. Die Thatsache, daß zugleich auch alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach denen ω quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sind, führt uns wie früher in § 12 auf einen Widerspruch.

Aus der soeben erkannten Thatsache, daß der Ausdruck (24) außer der Zahl 1 niemals eine primäre Zahl darstellen kann, ziehen wir leicht durch ein ähnliches Schlußverfahren, wie wir es früher angewandt haben, diese Folgerung: wenn $\varkappa$ eine beliebige zu 2 prime ganze Zahl in k ist, so läßt sich stets ein System von Exponenten $u_1^*, \ldots, u_{\frac{m}{2}}^*, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ finden derart daß der Ausdruck

$$\varkappa \varepsilon_1^{*u_1^*} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{*u_{\frac{m}{2}}^*} \pi_1^{v_1} \ldots \pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} \tag{25}$$

eine primäre Zahl in k darstellt.

Es sei nun $\mathfrak{q}$ irgend ein Primideal der Hauptklasse in k; wir setzen $\mathfrak{q} = (\varkappa)$, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl in k bedeutet und nehmen entgegen der zu beweisenden Behauptung an, es sei $\mathfrak{q}$ in $K(\sqrt{\omega})$ unzerlegbar. Wir bilden für die Zahl $\varkappa$ den Ausdruck (25) und bezeichnen denselben mit α. Endlich bestimmen wir in k ein von $\mathfrak{r}$ verschiedenes Primideal $\tilde{\mathfrak{r}}$, welches in k nicht Hauptideal ist, und eine Zahl σ in k, so dass $\sigma = \mathfrak{r}\tilde{\mathfrak{r}}$ wird; wir setzen $\tilde{\omega} = \frac{\omega\sigma^2}{\varrho^2}$ oder $\tilde{\omega} = \omega$, jenachdem ω den Faktor $\mathfrak{r}^2$ enthält oder nicht.

Da nach Satz 12b der Körper $K(\sqrt{\omega})$ eine ungerade Klassen-

anzahl besitzt, so gilt mit Rücksicht darauf, daß α primär ist, nach dem in meiner Abhandlung für diesen Fall bewiesenen quadratischen Reciprocitätsgesetz die Formel

$$\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{\omega}}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}}}{\alpha}\right\}; \tag{26}$$

hierbei habe die geschwungene Klammer für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ die entsprechende Bedeutung des quadratischen Restcharakters, wie die gewöhnliche Klammer für den Körper k. Das Hauptideal $\sqrt{\tilde{\omega}}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ ist entweder gleich 1 oder gleich dem Primideal $\mathfrak{r}$. Fällt nun $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ aus, so ist gewiß auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = -1$, so wird wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = -1$ nothwendig $\left(\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ und umsomehr $\left\{\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Andererseits ist wegen $\omega = (\sqrt{\omega})^2$ nothwendig $\left\{\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$ und folglich auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Wir haben also in jedem Falle gewiß $\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{\omega}}}\right\} = +1$ und wegen (26) folgt hieraus

$$\left\{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}}}{\alpha}\right\} = +1. \tag{27}$$

Wenn A irgend eine ganze zu $\mathfrak{q}$ prime Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet, so gelten nach dem Primideal $\mathfrak{q}$ des Körpers k, das auch in $K(\sqrt{\omega})$ Primideal bleiben sollte, folgende Congruenzen

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} \equiv A^{\frac{n(\mathfrak{q})^2-1}{2}}, \quad (\mathfrak{q})$$

$$\left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right) \equiv (NA)^{\frac{n(\mathfrak{q})-1}{2}}, \quad (\mathfrak{q})$$

und da

$$SA \equiv A^{n(\mathfrak{q})}, \qquad NA \equiv A^{n(\mathfrak{q})+1}, \qquad (\mathfrak{q})$$

ausfällt, so wird mithin

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} = \left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right).$$

Nehmen wir insbesondere $A = \sqrt{\tilde{\omega}}$, so erhalten wir

$$\left\{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}}}{\varkappa}\right\} = \left(\frac{-\tilde{\omega}}{\varkappa}\right). \tag{28}$$

Andererseits ist wegen (23) allgemein das Primideal $\mathfrak{p}_h$ in $K(\sqrt{\omega})$ zerlegbar; wir setzen

$$\mathfrak{p}_h = \mathfrak{P}_h \cdot S\mathfrak{P}_h, \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

wo $\mathfrak{P}_h$ ein Primideal in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet. Da

$$\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{P}_h}\right\}\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}, \qquad \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left\{\frac{-\sqrt{\bar{\omega}}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}$$

wird, so haben wir

$$\text{(29)} \qquad \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{-1}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}_h}\right).$$

Wegen (27), (28), (29) ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von α

$$\left(\frac{-\bar{\omega}}{\varkappa}\right)\left(\frac{-1}{\pi_1}\right)^{v_1} \cdots \left(\frac{-1}{\pi_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} = +1$$

und folglich

$$\text{(30)} \qquad \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\bar{\omega}}{\varkappa}\right) = +1.$$

Da die Zahl α primär ist, d. h. dem Quadrat einer ganzen Zahl in k congruent nach 2^2 ausfällt, so folgt leicht, daß $n(\alpha) \equiv 1$ nach 2^2 und mithin

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{n(\alpha)-1}{2}} = +1$$

sein muß; wir erhalten mithin aus (30) die Gleichung

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\varkappa}\right) = +1 \text{ und somit auch } \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right) = +1,$$

welche der Annahme widerspricht, wonach $\mathfrak{q}$ in k unzerlegbar sein sollte; diese Annahme ist somit als unzutreffend erkannt, d. h. jedes Primideal des Körpers k, welches der Hauptklasse in k angehört, zerfällt in $K(\sqrt{\omega})$ in das Product zweier Primideale, wie Satz 12c in seinem ersten Theile aussagt.

§ 14.

Wir erörtern jetzt die Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste im Körper k unter den besonderen Annahmen $h = \bar{h} = 2$, wie sie in § 9 über den Körper k gemacht worden sind. Der

erste Ergänzungssatz läßt sich wieder genau wie früher in der Form des Satzes 1 aussprechen, sobald wir dem Begriff „primäres Ideal" die folgende engere Fassung geben: wir nennen in dem zu Grunde gelegten Körper k ein zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ dann *primär*, wenn für dasselbe

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt — nicht nur für alle Einheiten ξ, sondern auch für diejenigen ganzen Zahlen ξ in k, die Quadrate von Idealen sind, d. h. wenn

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

wird. Indem wir in entsprechender Weise den Begriff eines hyperprimären Ideals in dem zu Grunde liegenden Körper k enger fassen, gilt auch der zweite Ergänzungssatz in der früher aufgestellten Form des Satzes 2 und ebenso auch das allgemeine Reciprocitätsgesetz in der Fassung des Satzes 3.

Um den Beweis für diese Reciprocitätsgesetze zu führen, bedenken wir, daß der Klassenkörper $K(\sqrt{\omega})$ eine ungerade Klassenanzahl hat. Für einen solchen Körper habe ich das Reciprocitätsgesetz in meiner Abhandlung bereits bewiesen. Aus diesem Reciprocitätsgesetz für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ gewinnen wir sodann ohne Schwierigkeit durch ein geeignetes Schlußverfahren die eben genannten Reciprocitätsgesetze für den Körper k.

In meiner Abhandlung habe ich unter den in § 3 der vorliegenden Arbeit gemachten Annahmen gezeigt, wie die Idealklassen eines beliebigen in Bezug auf k relativquadratischen Körpers in Geschlechter einzutheilen sind. Unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 2$, die wir im § 9 für den Körper k gemacht haben, theilen wir die Idealklassen eines beliebigen relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k auf folgende Weise in Geschlechter ein. Es sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Wir definiren zunächst wie in dem Falle, den meine Abhandlung betrifft, das Charakterensystem einer Zahl des Körpers k. Sodann verstehen wir unter $\mathfrak{r}$ ein bestimmtes zu 2 primes Ideal, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und wählen dann den Exponenten $u = 0, 1$ derart, daß im Körper k das Product der Relativnorm von $\mathfrak{J}$ dem Ideal $\mathfrak{r}^u$ aequivalent wird: es sei etwa

$$N(\mathfrak{J})\mathfrak{r}^u = (\iota),$$

wo ι eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Endlich bilden wir das Charakterensystem für die Zahl ι und fügen diesem noch die Einheit $(-1)^u$ hinzu. Das so erhaltene System von Einheiten ± 1 heiße das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$. Alle Ideale, die dasselbe Charakterensystem besitzen, bilden ein Geschlecht. Es gilt wiederum der Fundamentalsatz, daß stets genau die Hälfte aller möglichen Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter in $K(\sqrt{\mu})$ vertreten sind.

Wenn für einen Körper k der Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne zusammenfallen und nicht gleich 2, sondern das Doppelte irgend einer ungeraden Zahl sind, so bedürfen die in § 9 — § 14 ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 15.

Es möge endlich kurz die Annahme behandelt werden, daß der Grundkörper k die Klassenanzahlen $h = \bar{h} = 4$ besitzt; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Es giebt eine Klasse C in k derart, daß $C, C^2, C^3, C^4 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

B. Es giebt zwei Klassen C_1, C_2 in k derart, daß $C_1, C_2, C_1 C_2 = C_3$, $C_1^2 = C_2^2 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

Im Falle A. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativcyklisch vom Relativgrade 4 in Bezug auf k und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 14a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 14b. Die Klassenanzahl $H, \bar{H}$ des Klassenkörpers Kk im ursprünglichen bez. im engeren Sinne ist eine ungerade Zahl. Der Klassenkörper Kk besitzt einen und nur einen relativquadratischen Unterkörper UKk. Die Klassenanzahl von UKk ist das Doppelte einer ungeraden Zahl.

Satz 14c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von 4 Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C^2 angehören, zerfallen in UKk in das Product zweier solcher Primideale, die im Körper Kk unzerlegbar bleiben. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C oder C^3 angehören, bleiben in Kk unzerlegbar; sämtliche Ideale in k werden in Kk Hauptideale.

Von diesen 3 Eigenschaften 14a, 14b, 14c charakterisirt jede für sich allein bei unserer Annahme über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit insbesondere folgende Sätze:

Satz 15a. Wenn ein relativquadratischer Körper die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k besitzt, so stimmt derselbe mit UKk überein. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1 besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Satz 15b. Wenn ein relativquadratischer Körper in Bezug auf k eine Klassenanzahl besitzt, die das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, so stimmt dieser Körper mit UKk überein.

Satz 15c. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k eine ungerade Klassenanzahl besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Im Falle B. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativ-Abel'sch vom Relativgrade 4 und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 16a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 16b. Die Klassenanzahl des Körpers Kk ist stets ungerade. Der Klassenkörper Kk besitzt drei relativquadratische Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3 in Bezug auf k. Die Klassenanzahl eines jeden dieser 3 Unterkörper ist gleich dem Doppelten einer ungeraden Zahl.

Satz 16c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von 4 Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_1 angehören, zerfallen in einem jener 3 Unterkörper, etwa in UKk_1, in das Product von 2 Primidealen und sind in jedem der beiden anderen Unterkörper, also in UKk_2, UKk_3 unzerlegbar. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_2 bez. C_3 angehören, zerfallen etwa in UKk_2 bez. UKk_3 in das Product von 2 Primidealen und sind in UKk_1, UKk_3 bez. in UKk_1, UKk_2 unzerlegbar. Sämtliche Ideale des Körpers k werden in jedem der drei relativquadratischen Körper UKk_1, UKk_2, UKk_3 Hauptideale.

Von diesen Eigenschaften charakterisirt wiederum jede für sich vollständig den Klassenkörper Kk und die drei Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3.

Die eben aufgestellten Sätze 14a, 14b, 14c, 15a, 15b, 15c, 16a, 16b, 16c bestätigen, wie wir leicht erkennen, unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 4$ sowohl im Falle A. wie im Falle B. die Gültigkeit der allgemeinen Sätze 10 und 11.

Zum Beweise der Sätze 14, 15, 16 ist vor Allem nöthig, zu zeigen, daß für den Grundkörper k bei der gemachten Annahme stets wenigstens ein relativquadratischer Körper mit der Relativdiskriminante 1 existirt. Sodann hat man in Bezug auf diesen noch einen weiteren relativquadratischen Körper mit der Relativdiskriminante 1 zu construiren, was auf Grund des schon bewiesenen Satzes 12a stets möglich ist.

Wenn für einen Körper k der gemeinsame Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne nicht gleich 4, sondern das Vierfache irgend einer ungeraden Zahl ist, so bedürfen die hier ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 16.

Die im Vorstehenden aufgestellten Sätze zeigen, daß für die vollständige Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften eines beliebig vorgelegten Grundkörpers k vor Allem die Kenntniß des zu k gehörigen Klassenkörpers Kk erforderlich ist. Unsere Entwickelungen setzen uns in den Stand, in jedem besonderen Falle auf arithmetischem Wege den Klassenkörper Kk wirklich zn finden. Im Folgenden wollen wir auf eine transcendente Bestimmungsweise des Klassenkörpers hinweisen, die der bekannten von Dirichlet ersonnenen Methode der transcendenten Bestimmung der Klassenanzahl entspricht.

Wir machen für den Grundkörper k die besondere Annahme $h = \bar{h} = 2$ und bezeichnen mit $\varkappa$ die in meinem Berichte „Ueber die Theorie der algebraischen Zahlkörper" [1]) im § 25 definirte, dem Körper k eigenthümliche Zahl; ferner mögen H die Klassenanzahl des Klassenkörpers Kk und K die entsprechend definirte Zahl für den Klassenkörper Kk bezeichnen: dann gilt die folgende Formel

$$(31) \qquad \underset{s=1}{\mathrm{L}} \left\{ \sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s} \right\} = \frac{H\mathsf{K}}{h\varkappa}, \qquad (s > 1),$$

worin die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(+)})}$ über alle Hauptideale $\mathfrak{j}^{(+)}$ in k und die Summe

1) Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV 1894—95 S. 229.

$\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(-)})}$ über alle diejenigen Ideale $\mathfrak{j}^{(-)}$ erstreckt werden soll, die nicht Hauptideale in k sind. Der Ausdruck K enthält in gewisser Weise die Logarithmen der Einheiten des Klassenkörpers Kk, so dass durch denselben die erwünschte Bestimmung des Klassenkörpers ermöglicht ist.

Zum Beweise der Formel (31) betrachten wir das Product

$$\zeta(s) = \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1-n(\mathfrak{w})^{-s}}, \tag{32}$$

in welchem $\mathfrak{w}$ alle Primideale des Körpers k durchläuft; dasselbe convergirt für reelle Werthe von $s > 1$ und es ist

$$\underset{s=1}{\mathrm{L}}\left\{(s-1)\zeta(s)\right\} = h\varkappa. \tag{33}$$

Das entsprechende Product für den Körper Kk lautet

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{W})} \frac{1}{1-nN(\mathfrak{W})^{-s}}, \qquad (s > 1),$$

wo rechter Hand $\mathfrak{W}$ alle Primideale von Kk durchläuft und nN die Norm der Relativnorm von $\mathfrak{W}$ in k, d. h. die Norm in Kk bedeutet. Es ist dann

$$\underset{s=1}{\mathrm{L}}\left\{(s-1)Z(s)\right\} = H\mathsf{K}. \tag{34}$$

Wir unterscheiden nun unter den Primidealen $\mathfrak{W}$ diejenigen, die durch Zerlegung irgend eines Primideals in k entstehen, und diejenigen, die Primideale in k sind. Wegen Satz 12c fällt für die ersteren $N(\mathfrak{W})$ gleich einem Primideal $\mathfrak{w}^{(+)}$ der Hauptklasse in k aus; für die letzteren dagegen ist $N(\mathfrak{W})$ gleich dem Quadrat eines Primideals $\mathfrak{w}^{(-)}$ in k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört. Mit Rücksicht hierauf wird

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{(1-n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s})^2} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1-n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-2s}}$$

und hieraus folgt wegen (32)

$$\frac{Z(s)}{\zeta(s)} = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{1-n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s}} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1+n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-s}} = \sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s};$$

diese Gleichung liefert, wenn wir zur Grenze $s = 1$ übergehn, mit Rücksicht auf (33), (34) den verlangten Beweis der Formel (31).

Ueber Palolo (Eunice viridis Gr.).

Von

E. Ehlers.

Vorgelegt in der Sitzung vom 10. December 1898.

Herr Dr. B. Friedländer in Berlin bat mich zur Ergänzung seiner Mittheilungen[1]) über den Palolowurm eine systematische Bearbeitung des Thieres zu unternehmen. Dazu stellte er mir das gesammte von ihm gesammelte Material zur Verfügung. Dieses enthielt einmal die hinlänglich bekannten Palolo-Massen, wie sie freischwimmend auftreten und eingesammelt werden mit einer Anzahl von Palolo-Begleitern, meist Anneliden; das andere Mal aus dem Corallenriff ausgemeißelte Anneliden, die zum Theil die Verbindung mit echtem „Palolo" zeigten, worauf Herr B. Friedländer schon hingewiesen hat, zum anderen Theil sich mir aber als Thiere erwiesen, in denen die Entwicklung des „Palolo" noch nicht voll ausgebildet oder überhaupt noch nicht eingetreten war. Alle Thiere waren in Stücke zerbrochen, diese aber in einigen Fällen soweit sie einem Thiere angehörten, einzeln aufbewahrt, so daß damit die Möglichkeit einer zutreffenden Beschreibung gegeben war; daneben fanden sich zahlreiche kopftragende Vorderstrecken, die ohne Zweifel derselben Art angehörten und die für die Beurtheilung der Form des Thieres wichtig waren.

Herr Friedländer hat schon hervorgehoben, dass Palolo nicht zu Lysidice gehört, wie nach den älteren Angaben Mac Donalds angenommen werden mußte, sondern zu Eunice, und daß Palolo die „zu besonderen Fortpflanzungskörpern umgewandelten Hinterenden" einer Eunice sind. Ich ergänze das im Voraus damit, daß ich die Eunice, die nun den Namen Eunice viridis (Gray) erhält, in den Kreis der Eunice siciliensis Gr. bringe, und

1) B. Friedländer, Ueber den sogenannten Palolowurm. Biolog. Centralblatt. Bd. XVIII. No. 10. 1898.

an ihr die Ausbildung des „Palolo" als eine Form der Epitokie auffasse, wie sie zum ersten Male aus der Familie der Euniciden, und in ihrer Besonderheit abweichend von allen Erscheinungen der Epitokie, die von Borstenwürmern bekannt sind, sich darstellt. Demnach ist in der Art eine atoke und epitoke Form, in der letzteren eine atoke und epitoke Körperstrecke zu unterscheiden.

Der Wurm lebt nach Friedländers Darstellung in Höhlen und Spalten des Corallenriffes im Litoralbezirk, in denen Whitmee[1]) bereits einen Palolo gefunden hatte. Hier entwickelt er sich zur vollen Geschlechtsreife. Das Aussehen der mir vorliegenden, aus dem Riff ausgemeißelten Thiere spricht zum Theil dafür, daß sie hier in dünnwandigen Umhüllungen leben, deren Reste den Thieren noch anhängen. Die epitoken Strecken sind pelagisch. — Ich lasse die Beschreibung der epitoken Form vorangehen.

Dafür dient mir zunächst ein aus dem Corallenriff herausgemeißeltes, in viele Stücke zerfallenes Thier, dasselbe an dem Herr Friedländer den Zusammenhang der atoken und epitoken Segmente feststellte, einen Zusammenhag, den ich an dem einen dieser Bruchstücke bestätigen kann. Unsicher ist, ob alle Theilstücke des Wurmes erhalten sind; vielleicht fehlen einige Segmente in der atoken Strecke; im übrigen fügen sich die vorhandenen ganz wohl zusammen. Dann tritt die scharfe Sonderung in zwei vollständig ungleich erscheinende Strecken, eine atoke und eine epitoke, deutlich hervor.

Der Wurm hat 544 Rudertragende Segmente, von denen 205 auf die atoke Vorderstrecke fallen. Seine ganze Länge bestimmte ich durch Fadenmessung der atoken Strecken und mit einer Rechnung, die sich aus der Zahl der epitoken Segmente und deren mittlerer Länge ergiebt; solch eine Längenbestimmung reicht für die Vergleichung mit den verwandten Euniceen-Arten aus, zumal da wir wissen, daß deren Größen individuell erheblich schwanken. Danach war das in Weingeist conservirte Thier 312 mm lang, und hiervon entfielen 105 mm auf die atoke Vorderstrecke. Die epitoke Strecke ist also beträchtlich länger als die atoke. — Die größte Breite des gleichen Thieres betrug in der atoken Strecke 4 mm, während die epitoke 1 mm oder wenig darüber breit war; am Kopfende bestand eine geringe Verschmälerung, das Schwanzende war allmälig zugespitzt.

Die Größen weichen von früher gemachten Angaben ab, die

1) S. J. Whitmee, On the habits of Palola viridis. Proceed. Zool. Soc. London 1875. pg. 497.

sich auf die epitoke Strecke beziehen. Whitmee[1]) giebt dafür 18 inches = 468 mm als Maximum an, damit fällt zusammen, wenn Collin[2]) die Strecke bis zu 50 cm lang sein läßt. Ob solche Längen als die regelmäßigen anzusehen sind, und ob die von mir gegebenen Zahlen durch Ausfall von Bruchstücken entstanden sind, kann ich nicht entscheiden. Der Unterschied zwischen den Angaben kann auf Variation zurückgehen, indem ältere oder jüngere Thiere mit größerer oder geringerer Segmentzahl epitok werden. — Dagegen zweifle ich an der Richtigkeit der Angaben, die Powell[3]) über die größte Breite der epitoken Glieder gemacht hat; er giebt dafür $^1/_4$ inch = 6,5 mm an; epitoke Segmente von solcher Breite habe ich in dem reichen Material, das mir vorliegt, nicht gesehen; im Gegentheil, die Breitendimension variirt wenig. Sollte der Beobachter etwa einen der Palolo-Begleiter bei seiner Größenbestimmung vor Augen gehabt haben?

Die beiden Buccalsegmente sind etwas schmäler als die folgenden und fast drehrund, das erste doppelt so lang als das zweite und etwa so lang als die vier folgenden zusammen. Von den rudertragenden Segmenten sind die vorderen 15—20 etwa neunmal breiter als lang, dann erfolgt rasch eine große Verkürzung der einzelnen Segmente, so daß die Segmentfurchen dicht auf einander folgen, die Ruder hart an einander gerückt sind; das einzelne Segment ist dann etwa zwanzigmal breiter als lang. Weiterhin werden die Segmente etwas schmäler und länger, bis plötzlich mit scharfem Absatz die Reihe der viel schmäleren epitoken Segmente aus dem letzten atoken hervorgeht. Diese sind nun sogleich im Gegensatz zu den vorangehenden atoken gestreckt, und etwa dreimal länger als breit, ein Verhältnis, das nur in den letzten Segmenten der zugespitzten Schwanzstrecke sich zu Gunsten der Breite ändert.

Die Segmente der atoken Strecke sind im vorderen Körpertheile auf der Rückenfläche hoch gewölbt auf der Bauchfläche platt. Mit der Verschmälerung der Segmente nimmt die dorsale Wölbung ab. An den epitoken Segmenten ist die Bauchfläche nicht selten median furchenartig vertieft. Das geht auf einen Contractionszustand der Körperwand zurück. An den verschmälerten atoken

---

1) S. J. Whitmee, a. a. O. pg. 498.

2) A. Kraemer, Ueber den Bau der Corallenriffe. Kiel und Leipzig 1897. Collin, Anhang. pg. 166.

3) Powell, Remarks on the structure and the habits of the Coral-reef Annelid. Journal of the Linneau Society. Zool. Vol. XVI. London 1883. pg. 393.

Segmenten findet sich häufig eine quere Ringwulstbildung, oft nur auf die dorsale oder ventrale Fläche beschränkt. Auch diese, anderen Euniceen ebenfalls zukommende Bildung, ist wohl auf partielle Contraction zurückzuführen.

Der Unterschied der breiteren atoken und der schmäleren epitoken Strecke wird endlich durch die ungleiche Färbung beider Strecken verstärkt. Die atoke Strecke ist weiß oder fahl gelbgrau, selten schwach glänzend, mit Ausnahme der ersten Segmente, die so characteristisch gezeichnet sind, daß darin ein gutes Erkennungsmerkmal der Art gegeben ist. Die Rückenfläche des Kopflappens ist nämlich braun, und auf den vier nächsten Segmenten steht eine braune Querbinde auf deren hinterer dorsalen Hälfte; sie greift am ersten Segment auf die Seitenfläche hinüber, läuft an den folgenden gegen diese spitz aus. In einem Falle waren die einzelnen Binden durch Abschwächung der Farbe so unterbrochen, daß sie wie von Längsstreifen zusammengesetzt erschienen. Bisweilen zeigt sich unter Vergrößerung die braun gefärbte Strecke fein weiß getüpfelt, in der Weise wie das bei Euniciden häufig vorkommt und vielleicht auf Entwicklung von Hautdrüsen zurückgeht.

Gegen die hinten farblose Vorderstrecke sticht die verschmälerte epitoke Strecke scharf ab. Die Entwicklung der Geschlechtproducte bringt diese Färbung mit sich, die wie längst bekannt einen sexuellen Unterschied ausmacht. Die Weibchen sind im Leben dunkelblaugrün, die Männchen hellbräunlich, diese Farben sind auch, wenn auch abgeschwächt, an den conservirten Stücken zu unterscheiden. Ein von H. Dr. Friedländer getrennt aufbewahrtes Stück, das im Leben hell apfelgrün war, zeigte jetzt nichts besonderes. — An der epitoken Strecke sind dann besonders auffallend die großen dunkelbraunen kreisförmigen Flecke auf der Bauchfläche eines jeden Segmentes, die „Bauchaugen“; sie fehlen nur den letzten 5—6 präanalen und dem Aftersegment; die letzten Bauchaugen sind wohl immer wenig entwickelt. In dem Stücke, an dem der Zusammenhang der atoken und epitoken Strecke erhalten ist, besitzt auch das letzte der atoken Segmente ein „Bauchauge“. Diese Erscheinung wiederholt sich an einem am 11. November 1897 aus dem Riff ausgemeißelten Bruchstück der Eunice viridis, an dem der Uebergang von atoken zu epitoken Segmenten besteht. Das letzte der atoken Segmente trägt auch hier ein ventrales Bauchauge, daß allerdings kleiner ist als die folgenden voll entwickelten der epitoken Segmente.

Der Kopflappen, der wenig schmäler und kürzer als das erste Buccalsegment ist, hat einen in der Mitte eingeschnittenen Vorder-

rand dadurch, daß hier die beiden einfach kissenförmig gewölbten, nicht getheilten Palpen ohne Absatz über ihn hinausragen. Die auf der hinteren Hälfte in schwachem, nach vorn concaven Bogen stehenden, farblosen Fühler sind schwach gegliederte Fäden, deren Basalglied an der Wurzel verdünnt ist; die Gliederung, durch feine Ringfurchen angezeigt, ist nur bei stärkerer Vergrößerung zu erkennen; sie wird gegen das Ende hin deutlicher, und zugleich werden damit die einzelnen Glieder etwas länger. Der mittlere unpaare Fühler ist der längste, er reichte in einem Falle nach hinten gelegt bis an das achte Rudertragende Segment; die mittleren und äußeren nehmen an Länge, im Allgemeinen um je ein Drittel ab. Ich zählte bei dem gleichen Thiere am unpaaren Fühler 16, am mittleren 12, und am äußeren 9 Glieder. — Die Augen stehen lateralwärts vom Ursprunge der mittleren Fühler; es sind schwarze Pigmentflecke, von eckigem Umriß, bisweilen dem Rechteck, aber auch einem verzogenen Fünfeck mit nach hinten gerichteter Spitze ähnelnd.

Die Fühlercirren des zweiten Buccalsegmentes sind wie die Fühler, aber etwas schlanker gegliedert; sie reichen nach vorn gelegt etwas über den Rand des Buccalsegmentes; ich fand an ihnen 6 Glieder.

Die Ruder ändern in fließenden Uebergängen an den aufeinanderfolgenden Segmenten ihre und ihrer Anhänge Form.

Das erste Ruder steht tiefer am Seitenumfange des Segmentes als die übrigen; es weicht von allen durch die große Entwicklung der Rücken- und Bauchcirren und die geringe des Borstenhöckers ab, der fast nur wie eine basale Auftreibung der letzteren erscheint; der aus 5 schwach von einander getrennten Gliedern bestehende fadenförmige Rückencirrus reicht über die halbe Länge des ersten Buccalsegmentes nach vorn; der Bauchcirrus ist viel kürzer, ragt aber über den Borstenhöcker erheblich hinaus, er besteht aus einem etwas dickeren Basal- und einem wenig längeren Endgliede. In diesem Ruder stehen nur einzelne einfache, in der Endstrecke schwach erweiterte Borsten neben einer graden und spitzen, hellen Stütznadel.

Das einfache Parapodium der folgenden Segmente ist an den ersten zehn länger als an den folgenden, an denen es allmälig an Größe abnimmt; es ist ein kurzer, schwach kegelförmiger, abgestumpfter Höcker, der vor dem austretenden Borstenbündel in den vorderen Segmenten eine ganz niedrige dreieckige Lippe besitzt. An den folgenden Segmenten verkürzt sich der Höcker, bleibt anfänglich stumpf, geht aber mit Entwicklung der Lippe in eine

spitz kegelförmige Form über, ohne an Länge zu gewinnen; diese Form besteht dann an den epitoken Segmenten.

Das Borstenbündel besteht aus oberen einfachen und unteren zusammengesetzten Borsten, zu denen eine grade einfach zugespitzte dunkelfarbige Stütznadel gehört; eine zweite bisweilen daneben auftretende hellfarbige ist vielleicht eine Ersatznadel. Die oberen einfachen Borsten sind in der ersten Strecke des Endabschnittes schwach erweitert, ungesäumt; die unteren zusammengesetzten bräunlichen Borsten haben ein mäßig erweitertes mit Feilkerben versehenes Schaftende, und ein kurzes (0,03 mm langes) Endglied, das einen starken terminalen Doppelzahn und ein mit Härchen besetztes Deckblatt trägt. Die Form der Borsten ist überall, auch an den epitoken Segmenten, die gleiche. Dagegen nimmt ihre Zahl von vorn nach hinten stark ab; in den vorderen Segmenten fand ich 5 obere einfache, und 20 in Reihen geordnete zusammengesetzte; in den epitoken Segmenten ist häufig nur eine einfache und eine zusammengesetzte Borste vorhanden.

Die Rückencirren sind an den vorderen Rudern Fäden, die eine schwache Gliederung erkennen lassen und über die Borsten hinausragen; ihre Länge nimmt aber in der atoken Strecke rasch ab; die Fäden, die dann kaum über das Ruder hinausragen, sind einfach; an den epitoken Segmenten sind sie kürzer als der Borstenhöcker. Ich habe bisweilen an der Basis des Rückencirrus die bei Euniceen häufig vorkommende Pigmentanhäufung gesehen.

Der Bauchcirrus der vorderen Ruder ist ein kegelförmiger Fortsatz, der über das Borstenbündel kaum hervorragt; sein basaler Theil entspricht dem Wurzelgliede desjenigen am ersten Rudertragenden Segment. Etwa vom 15. Segmente ab ist diese basale Hälfte zu einem großen Wulste erweitert, der auf die Ventralfläche des Segmentes hinübergreift und auf dessen lateraler Ecke die Endstrecke des Cirrus als ein kurzes, das Parapodium kaum überragendes Fädchen aufsitzt. Die Breite der queren Wülste nimmt an den hinteren Segmenten der atoken Strecke ab; an den epitoken gestreckten Segmenten ist sie bis auf einen geringer Höcker reducirt, dagegen ist hier nun das Endglied verlängert, fadenförmig geworden, länger als der Rückencirrus und ragt über das Borstenbündel hinaus.

Die Kiemen fehlen einer größeren Reihe von Segmenten der atoken Strecke und vielleicht nur einer geringen Zahl von Segmenten der Afterstrecke. Es bedarf das einer genaueren Darlegung. An dem atoken Vorderstücke von 126 rudertragenden Segmenten des aus dem Riff ausgemeißelten Wurmes fehlen die

Kiemen, alle folgenden atoken Strecken besaßen sie. An einem anderen Vorderende fand ich die erste Kieme am 137. Ruder. Damit ist die Region in der die Kieme zuerst auftritt, gekennzeichnet. Die Kieme ist überall ein einfacher an der Wurzel des Rückencirrus entspringender Faden, der in der größten Längsentwicklung — und diese tritt fast gleich an den ersten Kiemen auf — den Rückencirrus erheblich an Länge übertrifft, und auf das Segment gelegt nicht viel von dessen dorsaler Medianlinie entfernt blieb. Starke Vascularisirung durch einen axialen Gefäßstamm und capillare Verbreitung unter der Oberfläche kennzeichnen die Bedeutung des Anhanges. Wo in der atoken Strecke die Segmente sich zu verlängern anfangen, nimmt die Länge der Kieme ab, und wird zu einem kurzen Anhang des Rückencirrus. Collin hat angegeben, die Ruder des „Palolo" seien kiemenlos. Ich habe in vielen Fällen gleichfalls an diesen Rudern vergeblich nach Kiemen gesucht, in einigen Fällen aber mit Sicherheit die Kieme gefunden, die als ein kurzer spindelförmiger Anhang an der Basis des Rückencirrus haftete. Ich komme zu der Auffassung daß, wo die epitoken Glieder des Palolo keine Kieme zeigten, diese abgefallen ist; es ist das um so wahrscheinlicher, als die Verbindung zwischen Kieme und Rückencirrus eine sehr kleine ist. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß der Abfall der Kieme zu den regelmäßigen Vorgängen im Leben des Palolo gehört. — Vermuthlich fehlt aber den letzten präanalen Segmenten des Wurmes die Kieme stets; hier habe ich sie nie gesehen.

Das Aftersegment ist kurz kegelförmig. Es trägt unter der Afteröffnung 4 Aftercirren. Von diesen sind die dorsalen schlank kegelförmig, etwa so lang als die 5—6 letzten Segmente, die ventralen etwa ein Drittel so lang und erheblich dünner.

Der für die Stellung der Art characteristische Kieferapparat ist in einem muskulösen Kieferträger enthalten, der bis in das fünfte Segment hineinragt. Der Oberkiefer ist meist tief braunschwarz gefärbt mit weißen Rändern an den Zahnstücken; die Träger sind so lang wie die davor gelegenen Kieferstücke zusammen, in ihrer Länge fast gleichmäßig breit, nur an den hinteren Enden dreieckig zugespitzt; an der Zange ist das Basalstück fast so lang als das hakenförmig gekrümmte Endstück; der linke Zahn hat drei, der rechte zwei große Sägezähne; davor liegen links drei, rechts zwei kleine ungezähnelte (oder einzähnige) Zahnplatten, keine Reibplatten. — Der Unterkiefer erhält seine characteristische Gestalt dadurch, daß die lateralen Ränder seiner vorschiebbaren Vorderstrecke dorsalwärts hochaufgekrümmt

sind, so daß diese Strecke tief schaufelförmig aussieht; nur in dieser Vorderstrecke stoßen die beiden Unterkieferhälften median zusammen, die hinteren Strecken sind von einander getrennt, aber fast parallelrandig. Der schaufelförmige Vordertheil ist zumeist emailleweiß, nur an der medianen Strecke dunkelbraun; diese Färbung erstreckt sich auf die Medianränder der hinteren Strecken, die sonst hellbräunlich gefärbt sind. An einem Thiere war die weiße schaufelförmige Vorderstrecke des Unterkiefers sehr brüchig und zerbröckelte leicht; das ist zu beachten, wo man die Kieferform zur Bestimmung der Art verwendet.

Einen Uebergang von der atoken zur epitoken Form bildet ein Wurm, der von der Palolostelle bei Apia (Matautu) am 27. October 1897 aus dem Korallenfels herausgemeißelt wurde. Ich schicke voran, daß der Wurm in der Zeichnung und Färbung der vorderen Körperstrecke, in der Bildung der Anhänge des Kopflappens, der Ruder und der Borsten sowie in der Kiemenform mit der voranstehenden Beschreibung übereinstimmt. Das Thier ist in zwei offenbar zusammengehörende Stücke zerfallen, ein vorderes längeres aus 594 Rudertragenden Segmenten bestehendes, und ein hinteres aus 90 Segmenten zusammengesetztes. Es liegen also 684 Segmente vor, die Afterstrecke fehlt. Die Länge der beiden zusammengehörenden Stücke schätzte ich auf 248 mm, wovon 110 mm auf das vordere Stück entfallen. An keiner Region der beiden Stücke zeigten sich die characteristischen Verhältnisse der Färbung und Größe der Segmente, die die vollausgebildete Palolo-Strecke kennzeichnen. Die größte Breite der Vorderstrecke betrug 4 mm, diese nahm nach hinten bis auf etwa 2 mm ab. Die Segmente der vorderen Strecke sind so kurz, wie es oben beschrieben ist. Kurz vor dem Auftreten der ersten Kieme, das am 137. Ruder erfolgt, ist der Körper eingeschnürt, doch weiß ich nicht, ob diese Bildung eine normale, oder durch einen äußeren Eingriff veranlaßt ist. Die hierauf folgende Strecke, in der die einzelnen Segmente noch sehr kurz sind, ist schwach grünlich grau gefärbt, sie geht bald in die fast farblose, allmälig verschmälerte Endstrecke über, in der mit der Breitenabnahme die Segmente sich strecken, überall aber eine solche Größe behalten, daß sie etwa fünfmal breiter als lang sind. Die Ringwulstbildung ist an einen Theil von ihnen vorhanden. — Die Kiemen finden sich vom 137. Ruder an in der ganzen Länge des vorderen Stückes, mit der Verschmälerung der Segmente nehmen sie in der angegebenen Weise an Größe ab. An den Rudern des 2. Stückes fehlen sie zum Theil. Die „Bauchaugen“ sind an dem vorderen Stücke vom

327. rudertragenden Segmente an vorhanden, an dem hinteren Stücke auf allen Segmenten. Sie treten schon an den noch ganz kurzen, aber allerdings schon verschmälerten Segmenten auf; damit sind sie im Anfang ihrer Reihe so eng aneinander geschoben, daß sie unter unzureichender Vergrößerung fast das Bild eines ununterbrochenen schwarzen Längsstreifen erzeugen. Mit der Streckung der Segmente weiterhin rücken sie dann deutlich ganz von einander; da wo an den Segmenten Querwülste gebildet sind, stehen sie auf deren Höhe. Diese Augen haben nur ein Drittel des Durchmessers von dem der vollentwickelten (0,06 mm gegen 0,19 mm), sie sind im Umfange nicht so scharf wie diese abgegrenzt, und sie machen den Eindruck, als ob ihr Pigment aus der Tiefe an die Oberfläche träte. Ihr Aussehen stimmt mit dem überein, was die Bauchaugen auf dem letzten der atoken Segmente bei vollentwickelten Thieren besitzen. Reife Geschlechtsproducte fehlten in der Leibeshöhle; sie enthielt ovale vielkernige Körper, die ich als Spermatogonien deute.

Als atoke Form fasse ich dann einen Wurm auf, der am 15. October 1897 bei Samatau durch Herausmeißeln aus dem Korallenfels erbeutet war. Er liegt mir, in einem Glase besonders verwahrt, in 7 Bruchstücken vor, die ganz wohl sich aneinanderfügen; von diesen sind Kopf- und Schwanzstrecke die längsten, erstere besteht aus 192, letztere aus 105 Rudertragenden Segmenten, die dazwischen gehörenden Bruchstücke sind alle kürzer. Falls nicht Bruchstücke ausgefallen sind, bestand der Wurm aus 417 Segmenten. Keins dieser Segmente hat ein Bauchauge. Die Vorderstrecke stimmt völlig in der Zeichnung des Vorderendes in den Dimensionen der Segmente, der Form der Fühler, Fühlercirren, Parapodien und ihrer Anhänge mit der gleichen Strecke des epitoken Thieres; die Segmente der mittleren und hinteren Körperstrecke strecken sich, ähnlich wie in der Uebergangsform, etwas in die Länge; die characteristischen Wülste sind bei einem Theil von ihnen vorhanden. Eine kleine Strecke des mittleren Körpertheiles ist hell grünlich grau gefärbt, alle übrigen sind fahl weißlich. — Die erste Kieme steht am 153. Segment; ihre Länge nimmt an den gestreckten Segmenten in gleicher Weise ab, wie es vorhin beschrieben; Kiemen finden sich hier aber an allen Segmenten mit Ausnahme etwa der letzten 30 präanalen Segmente. Der Kiefer zeigt die characteristische Gestaltung.

Eine Zusammenstellung dieser Formen läßt den Entwicklungsgang der atoken zur epitoken Form erkennen. Die atoke Form

hat keine Bauchaugen und keine scharf abgesetzte, besonders gestaltete Hinterstrecke. An ihr treten mit der Reife der Geschlechtsproducte zuerst die Bauchaugen, kleiner als in der vollen Entwicklung, hervor, und zwar auf den zum Theil noch kurzen Segmenten. Bei der Vollreife der Geschlechtsproducte ist dann die Reihe der epitoken Segmente scharf von der atoken Vorderstrecke abgesetzt, die einzelnen Segmente sind verschmälert und gestreckt, nach dem Unterschiede des Geschlechtes blaugrün oder braun gefärbt und mit dem vollentwickelten Bauchauge versehen; daß auch ein letztes Segment der atoken Strecke noch ein Bauchauge trägt, wie es oben erwähnt ist, bleibt beachtenswerth. Ob die Epitokie bis zur Vollreife an allen von ihr ergriffenen Segmenten gleichzeitig auftritt, oder sich der Länge nach allmälig entwickelt und ausbreitet, bleibt zur Zeit unentschieden. Da bei vollreifen Würmern, wie es scheint, die ersten der epitoken Segmente hellfarbigere Bauchaugen als die der hinteren Segmente tragen, könnte man vermuthen, daß die Reife von hinten nach vorn vorschreitet. — Nach völliger Reife löst sich die epitoke Strecke von der atoken ab und tritt aus den Wohnsitzen des Thieres freischwimmend hinaus ins Meer. Hier brechen offenbar die Strecken vielfach noch auseinander. Mit diesem Aufbrechen hat aber die Entleerung der Geschlechtsproducte nichts zu thun, denn die die Bruchflächen tragenden Segmente sind meist noch von den Geschlechtsproducten erfüllt und die Angaben Powells, wonach die Geschlechtsproducte durch ausführende Apparate entleert werden, sind offenbar ganz zutreffend. Das weitere Schicksal der atoken und epitoken Strecken ist nicht sicher bekannt. Vermuthlich regeneriren die ersteren die abgeworfene Körperstrecke, und gehen die letzteren nach Whitmees Angaben zu Grunde.

Die Art steht in der großen Zahl und den Dimensionen der Segmente, in der Form des Kopflappens, in der Bildung der Parapodien, der Wulstbildung an den Segmenten, dem Verhalten der Kieme und zumal in der Form des Kieferapparates der Eunice siciliensis Gr. sehr nahe; die gegliederten schlanken Fühler und Fühlercirren, die Ausrüstung des ersten Ruders, besonders die characteristische Zeichnung des Vorderendes lassen die Eunice viridis, abgesehen von den feineren Unterschieden in der Bildung der Parapodien, und der Form der Borsten leicht von der Eunice siciliensis Gr. unterscheiden.

Bemerken will ich, daß auch bei Eunice siciliensis Gr. mit dem Eintritt der geschlechtlichen Vollreife die hintere Körperstrecke durch intensive Färbung der Segmente sich scharf von der vor-

deren Strecke absetzt[1]). Das ist gleichsam eine Einleitung zur epitoken Ausgestaltung.

Ich habe die Erscheinungen, die Eunice viridis Gr. in der Fortpflanzungsthätigkeit zeigt, mit den Vorgängen, die in der Epitokie von Borstenwürmern auftreten, zusammengebracht, wie das nach den noch unvollständigen Mittheilungen von Collin und Friedländer, M. Caullery und F. Mesnil[2]) schon angedeutet haben.

Damit ist zunächst ein sexueller Gestaltungswechsel in einer Familie der Anneliden, den Euniciden, nachgewiesen, von denen ein solcher bislang nicht bekannt war.

Dann ist aber hervorzuheben, daß die mit der Entwicklung des „Palolo" verknüpften Vorgänge von den Vorgängen, die zur Epitokie anderer Anneliden führen, in einigen Punkten abweichen, in anderen übereinstimmen. Damit bringen aber die hier auftretenden Vorgänge in die Kette der Fortpflanzungserscheinungen der Borstenwürmer, zu denen die Epitokie gehört, ein neues Glied. Die typische Epitokie, wie sie in der Gattung Nereis auftritt, ist durch die Umbildung der Parapodien und die Entwicklung besonderer Borsten, Pubertäts- oder Schwimmborsten, an den Segmenten der hinteren Körperstrecke gekennzeichnet. Das tritt auch in jenen Erscheinungen ein, in denen wie bei Syllideen die mit Geschlechtstoffen beladenen epitoken Segmente durch die Bildung eines Kopfes individualisirt und unter Ablösung von der Vorderstrecke frei werden. Bei Palolo bleibt dagegen die Weiterbildung der Parapodien und die Entwicklung von Pubertäts- oder Schwimmborsten völlig aus; an den epitoken, die reifenden Geschlechtsproducte bergenden Segmenten kommt dagegen eine erhebliche Streckung mit einer Verschmälerung der Segmente, damit eine Verlängerung des Körpers und, in enger Verbindung mit dem Bauchmark, die Entwicklung der Bauchaugen zu stande. Ich will hinzufügen, daß, was schon Mc Intosh[3]) angegeben hat, in diesen Segmenten der Darm leer und zusammengedrückt ist und daß die Muskulatur der Körperwand eine eigenartige noch genauer zu untersuchende Umwandlung erleidet. Das von Mc Intosh erwähnte auf der Innenfläche der Muskulatur liegende Pigment gehört einem Peritonealepithel an. An entleerten epitoken Körperstrecken schimmert es durch die dünne Körperwand durch.

---

1) Ehlers, Borstenwürmer pg. 354.

2) M. Caullery et F. Mesnil, Les formes épitoques et l'évolution des Cirratuliens. 1898. pg. 153. (Annales de l'Université de Lyon. T. XXXIX.)

3) Mc Intosh, Challenger . . Report Zool. Vol. XII pg. 258.

Die größte Entwicklung von epitoken Rudern und Schwimmborsten findet bei den verhältnismäßig kurzen Nereis-Arten statt, hier werden diese Bildungen Schwimmapparate für die im atoken Zustande bodensässigen Thiere. Bei den sehr langen Palolo ist die Locomotion der Körperwandung allein übertragen und durch ihre große Längenentwicklung ermöglicht. Vielleicht liegt in diesem Verhältnis ein Hinweis darauf, wie das Ausbleiben der Entwicklung von Schwimmapparaten an den Parapodien zu verstehen ist. Unklar ist die Bedeutung der „Bauchaugen". Nach dem, was ich an mikroskopischen Präparaten von ihnen, die ich Herrn Friedländer verdanke, gesehen habe, bin ich noch nicht überzeugt, daß diese Organe Gesichtsapparate sind, wiewohl Powell[1]) nach seinen Beobachtungen an lebenden Würmern ihnen Gesichtswahrnehmungen zuschreibt. Eine sich mir aufdrängende Vorstellung, diese innervirten Pigmentflecke könnten Leuchtorgane sein, ist unhaltbar gegenüber der bestimmten Erklärung, die mir Herr Friedländer auf eine dahin an ihn gestellte Frage gab, daß er weder an der Masse des Palolo noch an einzelnen in der Nähe betrachteten Thieren je eine Lichtentwicklung beobachtet habe.

Die Trennung der kopflos bleibenden epitoken Strecke von der lebensfähig zurückbleibenden atoken Strecke des Wurmes ist in der Reihe der zusammenzustellenden Erscheinungen ein weiteres besonderes Glied. Das findet seines Gleichen in der Ablösung der „Schwimmknospe" (Albert) von Haplosyllis spongicola Gr., die allerdings mit Pubertätsborsten versehen ist. — Wenn die Trennung bei Eunice viridis in solcher Weise erfolgt, daß dem Endstücke der atoken Strecke im Besitz eines Bauchauges eine epitoke Bildung bleibt, so erinnert das an die Vorkommnisse, daß bei Syllideen, die ein Geschlechtsthier abstoßen, die letzten Segmente der atoken vorderen Körperstrecke von Geschlechtsproducten erfüllt sein können. Wie weit das in beiden Fällen Regel oder Ausnahme ist, bleibt noch festzustellen. —

Die epitok gewordenen Thiere der Nereis-Arten sterben höchst wahrscheinlich nach Entleerung der Geschlechtsproducte ab; jedenfalls nach meinen Beobachtungen Thiere, die im Aquarium diese Entwicklung erreicht haben. Würmer, bei denen die Entwicklung zum Abstoßen der epitok gewordenen Segmente mit oder ohne Kopf (Syllideen, Eunice) führt, überleben höchst wahrscheinlich die Generationsperiode und ergänzen das Abgestoßene durch Regeneration. Daß in der ersten Gruppe die Entwicklung der Epi-

1) Powell a. a. O. pg. 394.

tokie die ganze Person weit stärker in Mitleidenschaft zieht als in der zweiten, zeigt der Umstand, daß bei Nereis die Parapodien der vorderen Segmente, die an der Hervorbringung der Geschlechtsproducte nicht unmittelbar betheiligt sind, doch characteristischen Umwandlungen unterliegen. — So ungleich sich nun aber auch der Eintritt der geschlechtlichen Reife und Thätigkeit auf die Umprägung der Gestalt und die Lebensgeschichte der Thiere äußert, so sind doch alle davon abhängigen Erscheinungen für unsere Vorstellungen leicht mit einander zu verknüpfen.

Ich erwähne hier kurz einige Thiere, die sich in den Palolomassen finden und die man als Palolobegleiter bezeichnen könnte. Ich sehe dabei von vereinzelt vorkommenden Stücken, wie einem kleinen decapoden Krebs und einer fast aller Anhänge beraubten und daher unbestimmbaren epitoken Nereis ab. Dann fallen drei Anneliden durch häufiges Vorkommen in dem mir zugänglich gemachten Material auf. Das ist Euphrosyne myrtosa Sav.[1]), die als Männchen und Weibchen von Geschlechtstoffen strotzend in zahlreichen Stücken vorliegt. Es ist auffallend diese auf den Riffen lebende, zu Schwimmbewegungen doch offenbar wenig geschickte Annelidenart in diesem Zustande zwischen den Palolo zu finden; und es entsteht die durch Beobachtungen zu beantwortende Frage, ob dieser Wurm nicht etwa durch die aus dem Riff aufsteigenden Palolo passiv mit fortgeführt ist.

Anders steht es mit den beiden anderen Anneliden, die sich zahlreich zwischen den Palolomassen finden. Beide sind nach der schlanken und langen Körpergestalt augenscheinlich zu Schwimmbewegungen gut befähigt. Das eine ist eine zu der Gattung Rhynchonerella gehörende Alciopide, die ich Rhynchonerella comes n. sp. nenne[2]).

---

1) Wenn ich die Art so benenne, so geschieht das mit dem Vorbehalt, daß in der bei Savigny davon gegebenen Abbildung der Unterschied in der Form der dorsalen Borsten nicht angegeben ist, der darin besteht, daß neben glatten graden zweizinken Borsten solche mit gekrümmten, feilkerbigen Gabelzinken vorkommen.

2) Rhynchonerella comes n. sp.

Lang dünn fadenförmig, gegen 200 Segmente, ein 47 mm langes Thier, dem das Afterende fehlte, hatte 192 Segmente, die Vorderstrecke auf etwa $^1/_9$ der Länge breiter als die hintere, mit Borsten 2,5 mm gegen 1,5 mm. Rückenfläche grünlich schwarz bestäubt, vorn auf dem Rücken der Segmente mit querer rautenförmiger Zeichnung, weiterhin auch in den Segmentfurchen zwischen den Rudern schwarz gefärbt.

Kopflappen in der hinteren Hälfte durch die großen Augen breiter als lang,

Ihr häufiges Vorkommen zwischen den Palolo-Massen hängt vielleicht damit zusammen, daß sie sich von diesen nährt.

Ein dritter Palolobegleiter bleibt nach seiner Bedeutung noch klarzustellen. Es sind fadenförmig dünne sehr lange Strecken eines Borstenwurmes, von dem ich kein Kopfende gesehen habe, characteristisch im Habitus dadurch, daß ihre Seitenränder wie gesägt aussehen, indem die einzelnen, scharf von einander getrennten Segmente quer rautenförmig gestaltet sind und auf der größten Breite des Segmentes das kegelförmige Ruder tragen. Diese Strecken sind theils farblos, theils durch durchscheinendes Peritonealpigment braun gefärbt. Einzelne Strecken gehen plötzlich, ohne die Dimensionen zu verändern, in eine mit Analsegment auslaufende Strecke über, in der die einzelnen Segmente nicht quer rautenförmig erweitert, sondern gleichmäßig breit sind. Das Aftersegment trägt 2 lange und 2 kurze Cirren. Nach der Form der Ruder und der Borsten handelt es sich bei diesen Thieren gleichfalls um eine Eunicide. Da erhebt sich die Frage, ob hier etwa eine andere, epitok in Fragmenten ausschwärmende Eunicide

---

vor den Augen schnauzenförmig abgerundet dreieckig verlängert mit jederseits zwei übereinanderstehenden Fühlern, von denen die oberen etwa halb so lang als der Kopflappen, die unteren kürzer sind; unpaarer Fühler, sehr klein, auf dem Scheitel hinter den Augen und nicht höher als sie vorspringend, oft fehlend. Augen groß, oval rothbraun, auf der durch sie hoch aufgetriebenen Scheitelfläche fast oder ganz zusammenstoßend mit vorgewölbter Cornealfläche.

Vier Paar Fühlercirren an zwei Segmenten, alle auf großem Grundglied schlank kegelförmig, länger als der Kopflappen, die längsten am 1. Segment nach hinten gelegt bis zum 8. Rudertragenden Segment reichend; ohne Borsten.

Die rudertragenden Segmente in der verbreiterten Körperstrecke ohne die Ruder etwa 3—4 mal breiter als lang, die mittleren Körpersegmente gestreckt, doppelt so lang als breit deutlich dreitheilig, die hinteren Segmente wieder verkürzt etwa so breit als lang.

Ruder schlank kegelförmig, länger als das Segment breit, ohne terminalen Anhang, in den vorderen 3 Rudern nur zusammengesetzte Borsten; weiterhin dann über diesen, deren Zahl bis auf 2 sinkt, ein Fächer sehr langer einfacher Borsten bis zum 58. Segment, danach nur wenige zusammengesetzte Borsten; ihr Schaftende wenig verdickt, Endglied spitz messerförmig, einfach gesäumt, verhältnismäßig kurz (0,096 mm). Eine oder zwei helle grade Stütznadeln. — Rückencirren auf Basalgliedern blattartig eiförmig zugespitzt, länger als breit, mit breiter Basis aufsitzend, vorn länger als die Ruder, Bauchcirren schmäler, lang oval, so lang als die Ruder; in den hinteren Segmenten alle Cirren verkürzt, leicht abfallend.

Der ausgestreckte Rüssel grünlich schwarz gesprenkelt, in der basalen Hälfte dicker als in der terminalen mit Längsreihen von dreieckigen blattförmigen Papillen besetzt; Rüsseleingang mit Kranz von Papillen.

vorliegt. Ich möchte das zunächst nicht bejahen, da ich die Thiere nicht von Eiern oder Samen erfüllt gesehen habe. Es wäre aber möglich, daß die Geschlechtsproducte von diesen Thieren bereits entleert wären; und von diesem Gesichtspunkt aus wäre zu untersuchen, ob diese Thiere etwa abgelaichte und danach ganz umgestaltete Palolo wären. Dem ist aber nicht nur die Angabe, daß die Palolostücke nach ihrer Entleèrung absterben sollen, entgegenzuhalten, sondern auch der Umstand, daß diesen Wurmstücken die Bauchaugen fehlen; wollte man deren Rückbildung annehmen, so spricht gegen eine solche Zusammenstellung die Beschaffenheit der Endglieder der Borsten, die von denen der Eunice viridis Gr. abweichen; sie sind im Allgemeinen von gleicher Form, aber kürzer und haben einen kleineren Endzahn, als diese. Danach gehören diese Stücke nicht zu Eunice viridis Gr. Zur Zeit bleibt es möglich, daß es sich in ihnen um eine Eunicide handelt, die ähnlich wie Eunice viridis epitok wird und dann wie diese freischwimmt. Hier kann nur Untersuchung an Ort und Stelle Auskunft geben.

Ich will zum Schluß hervorheben, daß ich unter dem bei Levucca auf Fiji aus Korallen ausgemeißelten Material neben den Vorderstücken junger Euniceen, die vielleicht zu Eunice viridis Gr. gehören, auch Kopfstrecken einer Lysidice gefunden habe. Diese sind wahrscheinlich identisch mit dem Kopfstücke, das von Mc Donald[1]) beschrieben und abgebildet ist, und in dem er das Kopfende des Palolo sah. Daß Mc Donald eine Lysidice vor sich hatte, ging nicht sowohl aus der Dreizahl der Kopfanhänge des abgebildeten Wurmes hervor — diese hätte durch Verstümmelung entstanden sein können — als vielmehr durch die characteristische in der Abbildung kenntliche Gestalt des Kiefers. Es wird nöthig, dieser fälschlich auf Palolo bezogenen Annelide eine andere Bezeichnung zu geben. Ich nenne sie Lysidice fallax. Mir liegen nur Stücke vor, denen das Hinterende fehlt, daher kann ich über Länge und Segmentzahl Nichts angeben. Der Körper des Wurmes ist gleichmäßig dick, fast drehrund, in der vorderen Strecke meist blaß gelbbraun gefärbt und zum Theil schwach weiß getüpfelt, Scheitel und Seitenflächen des Kopflappens, das 2. Buccal- und das 2. und 3. Rudertragende Segment weiß, an den Seiten der vorderen Segmente hinter den Rudern in den Segmentfurchen ein bräunlicher Fleck; die hintere Körperstrecke meist gleichförmig grünlich grau. Segmente der vorderen Körperstrecke

1) Mc Donald, On the external anatomy and natural history of the Genus of Annelida named Palolo. Transact. Linn. Soc. Lond. XXII pg. 237—239. Pl. XLI.

viermal, der hinteren sechsmal breiter als lang. Am Kopflappen ragt der mittlere der ungegliederten Fühler wenig über die einfachen Palpen hinaus, seitlich und hinter den äußeren Fühlern ein rothbrauner, nach hinten dreieckig ausgezogener Augenfleck. Die beiden Buccalsegmente unter einander an Länge gleich, so lang als die folgenden; der Vorderrand des ersten nach vorn hin etwas über den Kopflappen verlängert.

Ruder niedrige abgestutzte Höcker mit zwei dunklen Stütznadeln, oberen einfachen fein lang zugespitzten, einer meißelförmigen und 10 unteren zusammengesetzten Borsten, die auf dem etwas verdickten, gebogenen Schaftende ein kurzes (0,091 mm langes) zweizähniges Endglied tragen; Rückencirren einfach fadenförmig, kaum länger als das Ruder, Bauchcirren höckerartig stumpf.

Oberkiefer kürzer als der Unterkiefer, hellbraun mit dunkleren Rändern und emailleweißen Zähnen, Träger in der hinteren größeren Strecke dreieckig zugespitzt; Zange mit großem Basalstück, Zahn jederseits mit drei großen Sägezähnen, unpaare Platte kurz mit 4, rechte Sägeplatte mit 3, linke mit 5 Zähnen, jederseits eine Reibplatte. Unterkiefer mit zwei nur vorn zusammenstoßenden, nach hinten schlank dreieckig ausgezogenen Hälften, bräunlich mit weißer Schneide und schwarzem lateralen Randstreif; auf der Ventralfläche vorn mit concentrisch concaven Linien, auf der dorsalen Fläche mit winkelhakigen Furchen am Innenrande neben den Schichtstreifen.

Die von Mc Donald gegebene Abbildung des Kiefers ist, was die Einzelheiten des Oberkiefers betrifft, unzulänglich, die Verhältnisse des Unterkiefers kommen zum Theil ganz gut zum Ausdruck, die Abbildung scheint nach einem gepreßten Stück gemacht zu sein. — In der Gesammtdarstellung sind offenbar Stücke des Palolo und der Lysidice zusammengeworfen. Mit einer der bekannt gemachten, zum Theil allerdings unzulänglich beschriebenen Lysidice-Arten kann ich diese Art nicht vereinigen.

Zur Entwickelung der Darmschleimhaut.

Von

Julius Voigt, cand. med.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1899 von Fr. Merkel.

Die Ansichten über die Entwicklung der Darmschleimhaut, wie sie sich in den verschiedenen Monographien und Lehrbüchern der Entwicklungsgeschichte finden, stimmen in wesentlichen Punkten so wenig überein, daß eine abermalige Untersuchung des Gegenstandes nicht überflüssig erscheint. Besonders in Bezug auf die Entwicklung der Lieberkühn'schen Drüsen und die Beteiligung der Zotten an derselben gehen die Ansichten weit auseinander.

Auf Grund der Betrachtung mikroskopischer Bilder und einer größeren Anzahl von Rekonstruktionen bin ich zu folgenden Resultaten gelangt:

Das embryonale bindegewebige Darmrohr läßt anfangs nur die Anlage der Ringsmuskulatur und einen glatten auskleidenden Epithelschlauch erkennen. Der erste Schritt zur weiteren Ausbildung besteht in einer unregelmäßigen Zerklüftung der bisher glatten innern Oberfläche des Darmrohrs durch Einsenkungen und Furchen. Diese werden immer zahlreicher und fließen zu einem Netz von Kanälen zusammen; die von ihnen umzogenen Oberflächenfelder werden immer kleiner. Jetzt beginnen auf diesen Feldern [Zottenbasen] kleine Erhebungen zu entstehen, die ersten Spuren der späteren Zotten. Von dem Grunde der Gräben, die zwischen den Zottenanlagen bleiben, bilden sich später die Lieberkühn'schen Krypten durch Entsendung von Hohlsprossen, ganz so, wie die Mehrzahl der übrigen tubulösen Drüsen zu entstehen pflegt. Diese Gräben sind auch die Stelle der Entwicklung der im Laufe des weiteren Wachstums sekundär entstehenden Zotten, welche von der verbreiterten Thalsohle aus emporsprossen. Eine Verwachsung der Zottenbasen zur Bildung der Lieberkühn'schen Krypten, wie sie meist geschildert wird, existiert nicht.

Eine mit Abbildungen versehene ausführliche Abhandlung über den Gegenstand wird an anderer Stelle erscheinen.